УДК 517.938

Ф. Д. Рухович

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Существование апериодической траектории для внешних биллиардов вне правильных многоугольников

Рассматривается преобразование внешнего биллиарда вне правильных n-угольников. Основным результатом работы является доказательство существования апериодической точки для внешнего биллиарда при $n = 10, 8, 12$, а также полнота меры периодических точек в этих случаях.

Ключевые слова: внешний (двойственный) биллиард, апериодическая точка, ренормализационная схема.

F. D. Rukhovich

Moscow Institute of Physics and Technology

Outer billiards outside regular polygons

The outer billiard map outside regular n-gons is considered. The main result of the work is the proof of existence of an aperiodic point for an outer billiard in cases $n = 10, 8, 12$ and also fullness of the measure of periodic points.

Key words: outer(dual) billiard, aperiodic point, renormalization scheme.

Для любой гладкой выпуклой кривой на плоскости можно определить отображение внешности этой кривой в себя, называемое внешним биллиардом. А именно, обозначим кривую γ, и пусть x — точка вне ее. Существуют две касательные к γ прямые, проходящие через x; выберем одну из них, например правую относительно x, и, отразив x относительно точки касания, получим новую точку Tx.

Отображение T называется внешним биллиардом; кривая γ называется столом внешнего биллиарда.

Точку x вне фигуры назовем периодической, если существует такое натуральное n, что $T^n x = x$, а периодом этой точки – минимальное такое n.

В случае, когда стол есть многоугольник, точки вне стола можно разбить на следующие три типа:

1) точки с конечной траекторией (случай, когда $T^n x$ не определено для некоторого n);

2) точки с периодической траекторией;

3) точки с апериодической траекторией; в дальнейшем будем называть такие точки апериодическими.

В данной статье нас будут интересовать внешние биллиарды вне правильных многоугольников. Открытым в общем случае вопросом остается существование апериодической точки для внешнего биллиарда вне правильных многоугольников. Внешние биллиарды вне правильных тре-, четырех- и шестиугольника являются наиболее простыми случаями; несложно показать (см., например, [1–4]), что в этих случаях апериодической точки нет.

Табачникову в своей прорывной работе [1] удалось показать, что существует апериодическая точка для внешнего биллиарда вне правильного пятиугольника; сделано это было с помощью впервые появившегося метода ренормализационной схемы.

Основным результатом настоящей статьи являются следующие теоремы, доказанные на основе ренормализационной схемы по Табачникову.

Теорема 1. *Для внешних биллиардов вне правильных восьми- и двенадцатиугольника существуют апериодические точки.*

Теорема 2. *В случае внешних биллиардов вне правильных восьми- и двенадцатиугольника, периодические точки образуют вне столов множества полной меры.*

Теорема 3 (случай восьмиугольника). *В случае правильного восьмиугольника, всевозможные периоды периодических точек образуют множество*

$$\{-4*(-3)^k+12*9^k, 4*9^k, 4*(-3)^k+12*9^k, 8l+8, -4(-3)^k+(36+24l)*9^k, (8l+12)*9^k, +4(-3)^k+(36+24l)*9^k \mid k,l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

Теорема 3 (случай десятиугольника). *Пусть* $B_2=\{\frac{5}{7}(6^{l+2}-(-1)^l), \frac{5}{7}(9*6^{l+1}+2*(-1)^l), 20*6^l, 30, 90*6^l, 10, 5, \frac{20}{7}((78+120k)*6^l-(k+1)*(-1)^l), \frac{5}{7}((276+240k)*6^l-(2k+3)*(-1)^l), \frac{5}{7}((234+180k)*6^l+(2k+4)*(-1)^l), \frac{5}{7}((34+40k)*6^l+(2k+1)*(-1)^l), \frac{10}{7}((20+40k)*6^l+(2k+2)*(-1)^l), 40k+70, \frac{5}{7}((306+180k)*6^l+(2k+2)*(-1)^l), 40k+50, 60k+40, 30k+35, 20k+30, 20k+20, 10k+15, \frac{10}{7}(6^{l+2}-(-1)^l), \frac{10}{7}((276+240k)*6^l-(2k+3)*(-1)^l), \frac{10}{7}((34+40k)*6^l+(2k+1)*(-1)^l), 60k+70, 20k+30 \mid k,l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$

Тогда B_2 *есть множество всевозможных периодов периодических точек для внешнего биллиарда вне правильного десятиугольника.*

Теорема 3 (случай двенадцатиугольника)

Введем следующие матрицы:

$$M_{68} := \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&8&18&13&24\\ 0&0&0&0&2&7&14&29\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, M_{66} := \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 5&4&3&2&1&0\\ 1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix},$$

$$M_{88} := \begin{pmatrix} 2&2&2&2&20&50&26&50\\ 2&2&2&2&20&50&26&50\\ 4&4&4&4&42&107&74&145\\ 2&2&2&2&20&50&48&94\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&8&18&13&24\\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$F := \{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\2\\5\\2\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\4\\10\\4\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\3\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}24\\24\\120\\102\\0\\0\\18\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}48\\48\\156\\108\\0\\0\\24\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\4\\9\\4\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\4\\2\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\7\\8\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\6\\13\\6\\0\\0\\2\\0\end{pmatrix} \},\ G := \{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\24\\36\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\18\\36\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\3\\0\end{pmatrix} \}.$$

Пусть $H := \{M_{66}^k M_{68} M_{88}^n f \mid f \in F, k, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{M_{66}^k g \mid g \in G, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, *и пусть* $B := \{12 \frac{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} h}{\text{НОД}(12, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix} h)} \mid h \in H\}$. *Множество всевозможных периодов точек для внешнего биллиарда вне правильного двенадцатиугольника есть объединение* $B_2 = B \cup \{2 * b | b \in B, b \text{ нечетно}\}$.

Также в статье установлена в общем виде связь между внешними биллиардами вне правильных n- и $\frac{n}{2}$-угольника, если n четно, а $\frac{n}{2}$ нечетно. А именно, доказана

Теорема 4. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 6}$, *$n$ четно, а* $\frac{n}{2}$ *нечетно. Пусть* T_n *и* $T_{\frac{n}{2}}$ *— внешние биллиарды вне правильных n- и $\frac{n}{2}$-угольника, соответственно. Тогда*:

- *Апериодическая точка существует для* T_n, *если и только если для* $T_{\frac{n}{2}}$ *существует апериодическая точка*;
- *Периодические относительно* T_n *точки образуют вне правильного n-угольника-стола множество полной меры, если и только если периодические относительно* $T_{\frac{n}{2}}$ *точки образуют вне правильного $\frac{n}{2}$-угольника-стола множество полной меры.*

Другими словами, проблемы периодичности для внешних биллиардов вне правильных n- и $\frac{n}{2}$-угольника эквивалентны, если n четно, а $\frac{n}{2}$ нечетно.

Еще одним важным результатом оказывается

Теорема 5. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$, *$n$ четно, γ — правильный n-угольник, а T_n — внешний биллиард вне γ. Тогда существует ограниченная область* $Z \subseteq \mathbb{R}^2 \backslash \gamma$, *т.ч.* $T_n(Z) \subseteq Z$, *и для T_n выполнены следующие утверждения*:

- *Апериодическая точка* $p \in \mathbb{R}^2 \backslash \gamma$ *существует, если и только если существует апериодическая точка* $p' \in Z$;
- *Периодические точки образуют вне γ множество полной меры, если и только если периодические образуют в Z множество полной меры.*

Автор выражает благодарность А. Я. Канелю-Белову за постаноку задачи и всестороннюю поддержку, а также А. Л. Семенова за плодотворные беседы и неоценимую помощь.

Работа была выполнена при поддержке гранта РНФ №17-11-01337.

Литература

1. *Табачников С.* Внешние биллиарды // Успехи математических наук. 1993. Т. 48, вып. 6(294). С. 75–102.

2. *Moser J.* Is the solar system stable? // Math. Intell. 1978. V. 1. P. 65–71.

3. *Schwartz R.E.*. Outer Billiards on kites // Annals of Mathematics Studies. 2009. V. 171.

4. *Dolgopyat D., Fayad B.* Unbounded orbits for semicircular outer bllliard // Ann. Henri Poincare. 2009. V. 10. P. 357–375.

References

1. *Tabachnikov S.* Outer billiards // Uspekhi matematicheskikh nauk. 1993. V. 48. I. 6(294). P. 75–102. (in Russian).

2. *Moser J.* Is the solar system stable? Math. Intell. 1978. V. 1. P. 65–71.

3. *Schwartz R.E.*. Outer Billiards on kites. Annals of Mathematics Studies. 2009. V. 171.

4. *Dolgopyat D., Fayad B.* Unbounded orbits for semicircular outer bllliard. Ann. Henri Poincare. 2009. V. 10. P. 357–375.

Поступила в редакцию 05.10.2019