Лекции по физической кинетике. 3-й курс, весенний семестр.

I. ЛЕКЦИЯ 2. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА-ПЛАНКА.ЧАСТИЦА В СИЛЬНО-ВЯЗКОЙ СРЕДЕ.

Рассмотрим наиболее простой пример движения частицы под действием случаных сил. Пусть частица находится в достаточно вязкой среде, так что сила, действующая на нее компенсируется в-основном вязким сосротивлением, а не ускорением частицы. В этом случае закон движения можно записать так:

$$\dot{x} = \xi(t) \tag{1.1}$$

Здесь $\xi(t)$ - некоторая "сила"завясящая от времени. Эта величина есть сила, действующая на частицу, деленная на коэффициент вязкого сопротивления. Формально, решение этого уравнения можно записать следующим образом:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \xi(\tau) d\tau \tag{1.2}$$

Однако, если точное выражение для силы, как функции времени нам неизвестно (а это именно так для случаынх сил), решить это уравнение явно не удается. Можно, однако, найти уравнение, которому удовлетворяет функция распределения по координате $F(x)$. Для этого необходимо знать статистику силы $\xi(t)$. Прежде всего, будем считать, что среднее значение силы в любой момент времени равно нулю:

$$< \xi(t) >= 0 \tag{1.3}$$

Угловые скобки означают усреднение по "реализациям"силы. Его можно представить себе, например, как усреднение по ансамблю частиц. Равенство нулю среднего значения силы во всяком случае необходимо для отсутствия у среды выделенных направлений. Далее, нам необходимо знать среднее значение произведения:

$$< \xi(t)\xi(t') > \tag{1.4}$$

Если система однородна по времени (находится в состоянии равновесия), то эта величина будет зависеть только от разности времен, мы будем предполагать, что это свойство имеет место. В реальной системе это среднее будет очень мало, если моменты времени t и t' достаточно удалены друг от друга. При этом, можно ввести некоторое время τ - время корреляции, такое, что на временах больших τ, написанное выше среднее равно нулю. На временах, меньших времени корреляции, это не так, и среднее значение произведения сил есть некоторая функция от $t - t'$. Однако, если интересоваться статистикой системы на временах, много больших чем время корреляции силы, последнее можно считать бесконечно малым, и написанное выше среднее значение можно записать следующим образом:

$$< \xi(t)\xi(t') >= 2D\delta(t - t') \tag{1.5}$$

Вообще говоря, для полного решения задачи о нахождении уравнения на функцию распределения необходимо знать корреляционные функции силы всех порядков, то есть произведения вида:

$$< \xi(t_1)\xi(t_2)...\xi(t_n) > \tag{1.6}$$

Мы будем предполагать, что, во-первых, все такие произведения с нечетным числом множителей равны нулю, а во-вторых, четные произведения выражаются через паруню корреляционную функцию, например:

$$< \xi(t_1)\xi(t_2)\xi(t_3)\xi(t_4) >=< \xi(t_1)\xi(t_2) >< \xi(t_3)\xi(t_4) > + \\ + < \xi(t_1)\xi(t_3) >< \xi(t_2)\xi(t_4) > + < \xi(t_1)\xi(t_4) >< \xi(t_3)\xi(t_2) > \quad (1.7)$$

В этом случае будем говорить, что сила имеет Гауссову статистику.

Перейдем к выводу уравнения на функцию распределения. Будем обозначать ее $F(x)$. Имеем по определению:

$$F(x,t) =< \delta(x - \tilde{x}(t)) > \quad (1.8)$$

где символом с тильдой мы обозначаем текущую (точную) координату частицы. Она является функцией времени, мы будем далее опускать в записи аргумент для упрощения формул. Рассмотрим изменение функции распределение на малом промежутке времени Δt (все же промежуток предполагается большим по сравнению со сременем корреляции случайной силы). Имеем:

$$F(x,t+\Delta t) - F(x,t) =< \delta(x - \tilde{x} - \Delta\tilde{x}) > - < \delta(x - \tilde{x}) > \quad (1.9)$$

Где $\Delta\tilde{x}$ - изменение координаты за время Δt. Далее, интегрируем уравнение движения (1.1):

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \int_t^{t+\Delta t} \xi(\tau)d\tau \quad (1.10)$$

Отсюда получаем:

$$\Delta\tilde{x}(t) = \int_t^{t+\Delta t} \xi(\tau)d\tau \quad (1.11)$$

Раскладываем теперь правую часть соотношения (1.9) по степеням Δx до второго порядка. Пишем:

$$< \delta(x - \tilde{x} - \Delta\tilde{x}) >=< \delta(x - \tilde{x}) > -\partial_x < \delta(x - \tilde{x})\Delta\tilde{x} > +\frac{1}{2}\partial_x^2 < \delta(x - \tilde{x})(\Delta\tilde{x})^2 > \quad (1.12)$$

Теперь нам необходимо провести усреднение по реализациям случайной силы. При этом сущесвтенно, что усреднение величины $\Delta\tilde{x}$ происходит по реализациям силы на промежутке $t, t+\Delta t$, а усреднение дельта функции - на промежутке до момента времени t. Так как мы предполагаем, что интервал Δt много больше, чем время корреляции случайной силы, то указанные усреднения являются независимыми. Это означает, что линейный по $\Delta\tilde{x}$ вклад в (1.12) при усреднении исчезает. Усредним вклад второго порядка. Пишем:

$$< (\Delta\tilde{x})^2 >= \int_t^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} < \xi(\tau_1)\xi(\tau_2) > d\tau_1 d\tau_2 = 2D \cdot \Delta t \quad (1.13)$$

В итоге получаем:

$$F(x,t+\Delta t) - F(x,t) = D\partial_x^2 F(x,t) \cdot \Delta t \quad (1.14)$$

Деля обе части на Δt и устремляя последний к нулю, получим окончательно:

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2} \quad (1.15)$$

Это - уравнение диффузии.

Рассмотрим несколько подробнее роль Гауссовой статистики силы в выводе уравнения (1.15). Для этого продолжим разложение в выражении (1.12)по степеням Δt. Член третьего порядка при усреднении исчезнет, а член четвертого порядка дает:

$$\frac{1}{24}\partial_x^4 < \delta(x-\tilde{x})(\Delta\tilde{x})^4 > \tag{1.16}$$

Усредним теперь это выражение. Используя (1.7), получим:

$$\frac{1}{24}\partial_x^4 < \delta(x-\tilde{x})(\Delta\tilde{x})^4 >= \frac{D^2}{6}\partial_x^4 F(x,t)\cdot(\Delta t)^2 \tag{1.17}$$

Таким образом, мы получили вклад, пропорциональный $(\Delta t)^2$, который мал по сравнению со вкладом первого порядка. Нетрудно понять, что дальнейшее разложение будет давать вклады еще более высоких порядков. В проведенных выкладках существенную роль играл тот факт, что корреляционная функция четвертого порядка (как и более выскоих порядков) не является аномально большой по сравнению с квадратом корреляционной функции второго порядка. Именно это в итоге и привело к малому вкладу от старших членов разложения выражения (1.12).

Рассмотрим теперь уравнение диффузии (1.15) подробнее. Прежде всего заметим, что можно написать обобщение на случай наличия нескольких координат. Уравнения движения тогда будут иметь вид:

$$\dot{x}_i = \xi_i(t) \tag{1.18}$$

А корреляционые функции:

$$< \xi_i(t)\xi_k(t') >= 2D\delta_{ik}\delta(t-t') \tag{1.19}$$

Тогда уравнение диффузии перепишеться как:

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = D\nabla^2 F(x,t) \tag{1.20}$$

Рассмотрим несколько подробнее свойства уравнения диффузии. Покажем, что со временем происходит "разгалживание"функции распределения. Действительно, пусть в некоторой точке последняя имеет макимум. Тогда в этой точке вторая производная отрицательна, и согласно уравнению диффузии функция убывает со временем. Ананлогично расматривается и поведение вблизи минимумов. Далее, отметим, что уравнение диффузии инвариантно по отношению к изменению знака координаты, но не инвариантно по отношению к изменению знака времени. Это означает, что процесс диффузии необратим.

Рассмотрим теперь решение уравнения диффузии для безграничного пространства. Пусть в начальный момент времени имело место некторое распределение $F(x,t=0)$. Необходимо найти функцию распределения во все последующие моменты времени. Для решения это задачи разложим функцию распределения в интеграл Фурье:

$$F(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int F(k,t)e^{ikx}dk \tag{1.21}$$

Тогда уравнение на Фурье-образ будет следующим:

$$\partial_t F(k,t) = -Dk^2 F(k,t) \tag{1.22}$$

Его решение имеет вид:

$$F(k,t) = F(k,0)e^{-Dk^2t} \tag{1.23}$$

Отсюда снова видно "разглаживание"функции распределения: Фурье-гармоники затухают со временем тем быстрее, чем больше их волновой вектор. Теперь необходимо выразить начальные значения Фурье-гармоник через значения самой функции. Пишем:

$$F(k,0) = \int F(x,0)e^{-ikx}dx \tag{1.24}$$

Подставляем теперь решение в выражение (1.21). Получаем:

$$F(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\int F(x',0)e^{-ikx'}e^{-k^2Dt}e^{ikx}dx'dk \tag{1.25}$$

Интегрирование по k можно выполнить явно выделяя в экспоненте полный квадрат. В итоге получаем:

$$F(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\int F(x',0)\exp\left[\frac{-(x-x')^2}{4Dt}\right]dx' \tag{1.26}$$

Точно таким же образом можно рассмотреть и многомерный случай. Так, например, для трехмера получаем:

$$F(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{8(\pi Dt)^{3/2}}\int F(\boldsymbol{r}',0)\exp\left[\frac{-(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2}{4Dt}\right]dx' \tag{1.27}$$

Рассмотрим подробнее формулу (1.26). Пусть в начальный момент времени частица находилась в начале коорлинат, то есть ее функция распределения была: $F(x,0) = \delta(x)$. Тогда тривиальное интегрирование дает:

$$F(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{Dt}}\exp\left[\frac{-x^2}{4Dt}\right] \tag{1.28}$$

Отсюда видим, что средний квадрат расстояния, которое прошла частица, имеет следующее значение:

$$< x^2(t) >= 2Dt \tag{1.29}$$

Рассмотрим теперь свойства решений уравнения диффузии в ограниченной области. Ищем частные решения, зависящие от времени экспоненциально: $F_n(x,t) = F_n(x)e^{-\gamma_n t}$, где γ_n - есть характерные декременты затухания. Подстановка в уравнение диффузии дает:

$$\nabla^2 F_n(\boldsymbol{r}) + \frac{\gamma_n}{D}F(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{1.30}$$

Для конкретной геометрии, существует некоторый набор экспонент γ_n, имеющий дискретный спектр, такой, что решения уравенения (1.30) удовлетворяют необходимым граничным условиям (например, поглощающие или отражающие границы). Все эти экспоненты положителны, а соответствующие собственные функции - ортогональны. Тогда решение уравнения диффузии представляется в следующем виде:

$$F(\boldsymbol{r},t) = \sum a_n F_n(\boldsymbol{r})e^{-\gamma_n t} \tag{1.31}$$

Коэффициенты a_n можно найти по начальной функции распределения, пользуясь ортогональностью решений F_n.

II. ЛЕКЦИЯ 3. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА-ПЛАНКА. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ.

Обобщим теперь выведенное на прошлой лекции уравнение Фоккера-Планка на случай наличия трения и массы. Прежде всего заметим, что полученные ранее результаты можно сразу применить к движению частиц без трения, только вместо распределения по координатам, нужно писать распределение по импульсам. Действительно, уравнение движения имеет в таком случае следующий вид:

$$\dot{p} = \xi(t) \tag{2.1}$$

Введем следующую корреляционную функцию:

$$< \xi(t)\xi(t') >= 2\delta(t - t') \tag{2.2}$$

Где C - есть некоторая константа. Она отличается от константы D в (1.5), связь между этими величинами будет установлена ниже. Теперь мы можем написать уравнение на функцию распределения по импульсам $F(p,t)$:

$$\partial_t F(p,t) = C\frac{\partial^2 F(p,t)}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

То есть, функция распределения по импульсам теперь удовлетворяет такому же уравнению, что в предыдущем случае функция распределения по координатам. Соответственно, все свойства последней можно рапсрстранить и на первую. Например, средний квадрат импульса частицы (при учете, что в начальный момент она покоилась) дается выражением:

$$< p^2(t) >= 2Ct \tag{2.4}$$

Рассморим теперь несколько более сложную задачу: пусть на частицу действует помимо случайной силы, еще и сила трения. Найдем тогда функцию распределения по импульсам. Имеем следующее уравнение движения частицы:

$$\dot{p} = -\gamma p + \xi(t) \tag{2.5}$$

Вместо того, чтобы рассматривать изменение функции распределения на некотором малом промежутке времени, мы поступим по-другому. Функция распределения дается следующим соотношением:

$$F(p,t) =< \delta(p - \tilde{p}(t)) > \tag{2.6}$$

Продифференцируем это соотношение по времени:

$$\partial_t F(p,t) = -\partial_p < \dot{\tilde{p}}(t)\delta(p - \tilde{p}(t)) > \tag{2.7}$$

Где мы специально вынесли производную по импульсу за знак усреднения. В полученном выражении подвтавляем $\dot{\tilde{p}}(t)$ из уравнения движения (2.5), тогда получаем:

$$\partial_t F(p,t) = \partial_p < \gamma\tilde{p}(t)\delta(p - \tilde{p}(t)) > -\partial_p < \xi(t)\delta(p - \tilde{p}(t)) > \tag{2.8}$$

Первое из полученных выражений преобразуется просто. В силу наличия дельта функции, мы можем заменить множитель $\tilde{p}(t)$ на p, после чего проводим усреднение. В результате, первое слагаемое в (2.8) дает следующий вклад:

$$\partial_p < \gamma\tilde{p}(t)\delta(p - \tilde{p}(t)) >= \partial_p(\gamma p F(p,t)) \tag{2.9}$$

Перейдем теперь к анализу второго слагаемого в правой части (2.8). Для проведения усреднения поступим следующем образом. Так как сила предполагается коротко коррелированной по времени, то вклад в среднее значение дадут времена, мало отличающиеся от t. Иными словами, случайная сила в момент времени t никак не коррелирована с величинами в момент времени $t - \Delta t$. С другой стороны, мы можем написать:

$$\tilde{p}(t) = \tilde{p}(t - \Delta t) - \gamma \tilde{p}(t - \Delta t)\Delta t + \int_{t-\Delta t}^{t} \xi(\tau) d\tau \tag{2.10}$$

Подставим теперь это соотношение в выражение $< \xi(t)\delta(p - \tilde{p}(t)) >$, и разложим дельта функцию по степеням $\Delta \tilde{p}$:

$$\begin{aligned} < \xi(t)\delta(p - \tilde{p}(t)) >=< \xi(t)\delta(p - \tilde{p}(t - \Delta t)) > + < \xi(t)\delta'(p - \tilde{p}(t - \Delta t))\gamma \tilde{p}(t - \Delta t) > \Delta t \\ - < \xi(t)\delta'(p - \tilde{p}(t - \Delta t)) \int_{t-\Delta t}^{t} \xi(\tau) d\tau > \end{aligned} \tag{2.11}$$

Как мы уже говорили выше, случайная сила в момент времени t, не коррелирует с величинами в момент $t - \Delta t$. Всвязи с этим, в первом и втором слагаемом в написанном выражении сила может буть усреднена независимо, что в итоге дает нуль. В последнем слагаемом силы также усредняются независимо от дельта-функции. Однако, при этом усреднение сил дает:

$$< \xi(t) \int_{t-\Delta t}^{t} \xi(\tau) d\tau >= 2C \int_{t-\Delta t}^{t} \delta(t - \tau) d\tau = C \tag{2.12}$$

Собирая все вклады вместе, получим окончательно следующее уравнение Фоккера-Планка:

$$\partial_t F(p, t) = \partial_p \left[(\gamma p + C\partial_p) F(p, t) \right] \tag{2.13}$$

Данное уравнение принципиально отличается от уравнения (2.3) тем, что оно допускает стационарное решение. Действительно, решая уравнение (2.13) без левой части, получим:

$$F(p) = \sqrt{\frac{C}{2\pi\gamma}} \exp\left[-\frac{Cp^2}{2\gamma} \right] \tag{2.14}$$

С другой стороны, мы знаем, что стационарное распределение по импульсу должно иметь вид распределения Максвелла:

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mT}} \exp\left[-\frac{p^2}{2mT} \right] \tag{2.15}$$

Где m - масса частицы, а T - температура. Отсюда сразу находим связь между константами C и γ:

$$\gamma = CmT \tag{2.16}$$

Данное соотношение является частным случаем так-называемой флуктуационно-диссипационной теоремы. Качественно она выражает тот факт, что случайные силы и трение обе имеют одну природу - тепловую.

Всвязи с уравнением (2.13) отметим, что вместо комбинации $-\gamma p$ может стоять произвольное выражение для силы, в том числе зависящей от координаты и импульса.

Выведем теперь уравнение Фоккера планка для совместной функции распределения по координате и импульсу. Начнем с уравнений движения. Уравнение на импульс запишем следующим образом:

$$\dot{p} = -\gamma p + f + \xi(t) \tag{2.17}$$

где наряду с силой трения мы ввели произвольную силу f, которая может быть функцией координаты, импульса и времени.

Нам необходимо найти уравнение на следующую величину:

$$F(x,p,t) =< \delta(x-\tilde{x}(t))\delta(p-\tilde{p}(t)) > \tag{2.18}$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\partial_t F(x,p,t) = -< \dot{\tilde{x}}(t)\delta'(x-\tilde{x}(t))\delta(p-\tilde{p}(t)) > - < \dot{\tilde{p}}(t)\delta(x-\tilde{x}(t))\delta'(p-\tilde{p}(t)) > \tag{2.19}$$

Для преобразования первого слагаемого замечаем, что имеет место соотношение:

$$\dot{x}(t) = \frac{p(t)}{m} \tag{2.20}$$

являющееся просто определением импульса. Тогда первое слагаемое в (2.19) после усреднения дает:

$$-< \dot{\tilde{x}}(t)\delta'(x-\tilde{x}(t))\delta(p-\tilde{p}(t)) >= -\frac{p}{m}\partial_x F(x,p,t) \tag{2.21}$$

Преобразование второго слагаемого проводится аналогично тому, как это было сделано выше. Имеем:

$$-< \dot{\tilde{p}}(t)\delta(x-\tilde{x}(t))\delta'(p-\tilde{p}(t)) >= \partial_p < (\gamma\dot{\tilde{p}}(t)-f)\delta(x-\tilde{x}(t))\delta(p-\tilde{p}(t)) > -\partial_p < \xi(t)\delta(x-\tilde{x}(t))\delta(p-\tilde{p}(t)) > \tag{2.22}$$

При усреднении второго слагаемого в этом выражении нужно поступить как и ранее, рассмотрев изменение координат и импульса на промежутке времени между $t-\Delta t$ и t. При этом имеем:

$$x(t) = x(t-\Delta t) + \frac{p(t)}{m}\Delta t \tag{2.23}$$

В соответствии со сказанным выше вклад от этого слагаемого после усреднения даст ноль. Таким образом, окончательно получаем следующее уравнение на совместную функцию распределения:

$$\partial_t F(x,p,t) = -\frac{p}{m}\partial_x F(x,p,t) + \partial_p\left[(\gamma p - f + C\partial_p)F(x,p,t)\right] \tag{2.24}$$

Это есть наиболее общая форма уравнения Фоккера-Планка. Можно написать обобщение этого уравнения на случай нескольких переменных. Имеем:

$$\partial_t F(r_i,p_i,t) = -\frac{p_i}{m}\frac{\partial F(x,p,t)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial p_i}\left[(\gamma p_i - f_i + C\frac{\partial}{\partial p_i})F(x_i,p_i,t)\right] \tag{2.25}$$

Отметим, что уравнение (2.25) может быть переписано следующим образом:

$$\partial_t F(r_i,p_i,t) = -\frac{\partial}{\partial x_i}j_i - \frac{\partial}{\partial p_i}J_i \tag{2.26}$$

Где j_i и J_i есть потоки в координатном и импульсном пространстве соответственно:

$$j_i = \frac{p_i F}{m}; \qquad J_i = -\gamma p_i F + fF - C\frac{\partial}{\partial p_i}F \tag{2.27}$$

Такой вид уравнения, когда в одной части стоит производная по времени, а в другой - полная дивергенция, обеспечивает сохранения полного интеграла от функции распределения по всем координатам и импульсам:

$$\partial_t \int F(r_i, p_i, t) dx dp = 0 \tag{2.28}$$

В соответствии с тем, что уравнение (2.25) является наиболее общим, из него могут быть получены все выведенные ранее уравнения как частные случаи. Для уравнения на функцию распределения по импульсам это делается простым интегрированием по координатам. Действиетльно, имеет место соотношение:

$$F(p,t) = \int F(x,p,t) dx \tag{2.29}$$

Интегрируя уравнение (2.25) в силу того, что функция распределения обращается в нуль на бесконечности, возвращаемся к уравнению (2.13).

Уравнение на координатную функцию рапсределения получается несколько более сложными преобразованиями. Прежде всего замечаем, что из-за наличия силы трения, в системе будет утсанавливаться равновесие по импульсам. Характерное время его установления - $\sim 1/\gamma$. Если рассматривать систему на больших временах, то можно исключить импульсную переменную и получить уравнение только на координатную функцию распределения. Это и будет соответствовать частице в сильно вязкой среде. Для того, чтобы получить уравнение, интегрируем (2.25) по импульсам. При этом производная по импульсу в правой части даст ноль, и мы получаем:

$$\partial_t n(x,t) \equiv \partial_t \int F(r,p,t) dp = -\partial_x \int \frac{p}{m} F(x,p,t) dp \tag{2.30}$$

Стоящая в правой части величина есть не сто иное как дивергенция потока в координатном пространстве (с обрастным знаком). Для ее вычисления необходимо написать уравнение на поток. Ддя этого умножаем исходное уравнение Фоккера-Планка на p/m и интегрируем по импульсам. Получаем:

$$\partial_t j(x,t) = -\int \frac{p^2}{m^2} F(x,p,t) dp + \int \frac{p}{m} \partial_p \left[(\gamma p - f) F(x,p,t) \right] dp + \int \frac{p}{m} \partial_p \left[C \partial_p F(p,x,t) \right] dp \tag{2.31}$$

Последнее слагаемое после двукратного интегрирования по частям обращается в нуль. Второе слагаемое после однократного интегрирования по частям дает следующее:

$$\int \frac{p}{m} \partial_p \left[(\gamma p - f) F(x,p,t) \right] dp = -\gamma j(t) + f n(x,t) \tag{2.32}$$

Первое слагаемое нужно в главном приближении интегрировать с помощью асимптотического вида функции распределения по импульсам $F \sim \exp(-p^2/2mT)$. В итоге получаем:

$$-\int \frac{p^2}{m^2} F(x,p,t) dp = -\frac{T}{m} n(x,t) \tag{2.33}$$

Собирая все вместе, получаем следующее уравнение для потока:

$$\partial_t j(x,t) = -\frac{T}{m} \partial_x n(x,t) + \frac{f}{m} n(x,t) - \gamma j(x,t) = B(x,t) - \gamma j(x,t) \tag{2.34}$$

Где мы ввели обозначение:

$$B(x,t) = -\frac{T}{m}\partial_x n(x,t) + \frac{f}{m}n(x,t) \tag{2.35}$$

Интегрируем теперь это уравнение:

$$j(x,t) = j(x,0)e^{-\gamma t} + \int_0^t B(x,t')e^{-\gamma(t-t')}dt' \tag{2.36}$$

В последнем интеграле существенна область вблизи верхнего предела, так как мы рассматриваем времена $t \gg 1/\gamma$. Окончательно имеем:

$$j(x,t) = \frac{B(x,t)}{\gamma} \tag{2.37}$$

Подставляя все это в выражение (2.30), получаем:

$$\partial_t n(x,t) = -\frac{1}{m\gamma}\partial_x\left[fn(x,t)\right] + \frac{T}{m\gamma}\partial_x^2 n(x,t) \tag{2.38}$$

Это - окончательное уравнение на функцию распределения по координатам. Его можно было получить и напрямую из уравнения движения (2.17, если пренебречь нам производной по времени и учеть связь между γ и C.

Сделаем еще одно замечание. В уравнении (2.38) комбинация $Tm\gamma$ играет роль коэффициента диффузии. Для сферической частицы в жидкости мы можем написать этот коэффициент явно, зная силу вязкого сопротивления - $\gamma = 6\pi\eta R/m$, где R - радиус чатицы. Тогда получаем следующий коэффициент самодиффузии:

$$D = \frac{T}{6\pi\eta R} \tag{2.39}$$

III. ЛЕКЦИЯ 3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ. ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА.

В настоящей лекции мы рассмотрим корреляционные функции различных величин. Начнем с разновременной корреляционной функции импульса. Пусть импульс подчиняется следующему стохастическому уравнению:

$$\dot{p} = -\gamma p + \xi(t) \tag{3.1}$$

Вычислим следующую величину:

$$< p(t)p(t') > \tag{3.2}$$

Прежде чем перейти к непосредственному вычислению этой величины укажем, что она должна стремиться к нулю при стремлении разности t и t' к бесконечности. Мы будем для определенности полагать, что $t > t'$. Пусть в начальный момент времени импульс был равен нулю, а в дальнейшем изменялся в соответствии с уравнением (3.1). Тогда имеем по определению:

$$< p(t)p(t') >= e^{-\gamma t} e^{-\gamma t'} \int_0^t \int_0^{t'} e^{\gamma\tau} e^{\gamma\tau'} < \xi(\tau)\xi(\tau') > d\tau d\tau' \tag{3.3}$$

При выполнении интегрирования учитываем, что $t > t'$. Имеем:

$$< p(t)p(t') >= e^{-\gamma t} e^{-\gamma t'} \frac{C}{\gamma} \left[e^{2\gamma t'} - 1 \right] \tag{3.4}$$

Нам интересен случай, когда оба момента времени стремятся к бесконечности, а разница между ними остается постоянной. Переходя к пределу имеем:

$$< p(t)p(t') >= \frac{C}{\gamma} e^{-\gamma|t-t'|} \tag{3.5}$$

Здесь мы написали в экспоненте модуль разности времен, тем самым сняв ограничение на соотношение между t и t'. Эту формулу можно переписать и иначе:

$$< p(t)p(t') >=< p^2 > e^{-\gamma|t-t'|} = mTe^{-\gamma|t-t'|} \tag{3.6}$$

Где через $< p^2 >$ обозначено среднее значение импульса в состоянии равновесия. Так как корреляционная функция может быть записана как функция только от разности времен, можем написать:

$$\varphi(t) =< p(t)p(0) >=< p^2 > e^{-\gamma|t|} \tag{3.7}$$

Все сказанное выше, касается любой величины, имеющей пределом стационарное распределение, например координаты частицы, если она находится в потенциале. Рассмотрим теперь важный для дальнейщего вопрос о Фурье преобразовании корреляционных функций. Пусть имеется некоторая величина x (не обязательно координата). Запишем преобразование Фурье для этой величины:

$$x(\omega) = \int x(t) e^{i\omega t} dt \tag{3.8}$$

Обратное преобразование имеет следующий вид:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int x(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \tag{3.9}$$

Вычислим теперь следующую величину $< x(\omega)x(\omega') >$:

$$< x(\omega)x(\omega') >= \int < x(t)x(t') > e^{i\omega t}e^{i\omega' t'}dtdt' \tag{3.10}$$

Учтем теперь, что величина $< x(t)x(t') >$ на самом деле является функцией только разности времен $t - t'$. Перейдем к новым переменным: $u = (t + t')/2$ и $\tau = t - t'$. Имеем:

$$< x(\omega)x(\omega') >= \int \varphi(\tau)e^{i\omega u}e^{i\omega\tau/2}e^{i\omega' u}e^{-i\omega'\tau/2}dud\tau \tag{3.11}$$

Интегрирование по du теперь можно выполнить явно, что даст дельта функцию. Окончательно имеем:

$$< x(\omega)x(\omega') >= 2\pi(x^2)_\omega\delta(\omega + \omega') \tag{3.12}$$

Где через $(x^2)_\omega$ обозначен Фурье-образ корреляционной функции:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int (x^2)_\omega e^{-i\omega t}d\omega \tag{3.13}$$

Средний квадрат величины x вычисляется следующим образом:

$$< x^2 >= \frac{1}{2\pi}\int (x^2)_\omega d\omega \tag{3.14}$$

Вычислим введенные величины явно для корреляционных функций импульса. Имеем:

$$< p(t)p(0) >=< p^2 > e^{-\gamma|t|} \tag{3.15}$$

Простое интегрирование дает:

$$(p^2)_\omega =< p^2 > \frac{2\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \tag{3.16}$$

Обратное преобразование этого выражения разберем на семинаре. Далее, вычислим подобную величину для случайной силы. Прямое интегрирование дает:

$$(\xi^2)_\omega = 2\gamma mT \tag{3.17}$$

Этот результат можно получить из (3.16) и уравнения движения. Независимость этой величины от частоты соответствует наличию дельта-функции в корреляторе силы. Рассмотрим теперь величину, динамика которой описывается уравнением гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\xi}{m} \tag{3.18}$$

В таком случае и сама величина x и соответствующий ей импульс $m\dot{x}$ имеют стационарное распределение в передел больших времен. Вычислим величину $(x^2)_\omega$. Для этого запишем уравнение движения в Фурье представлении:

$$-\omega^2 x_\omega - i\omega\gamma x_\omega + \omega_0^2 x_\omega = \frac{\xi_\omega}{m} \tag{3.19}$$

Отсюда имеем:

$$x_\omega = \frac{\xi_\omega}{m(\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2)} \tag{3.20}$$

Отсюда, воспользовавшись выражением для коррелятора силы (3.17), можно найти:

$$(x^2)_\omega = \frac{2\gamma m T}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + m^2\gamma^2\omega^2} \tag{3.21}$$

Зададимся теперь следующим вопросом. Величина, найдена выше, была вычислена через отклик системы на тепловой шум. Очевидно, что должна существовать связь между откликом системы на произвольную внешнюю силу и ее тепловыми флуктуациями. Рассмотрим отклик осциллятора на периодическую внешнюю силу $f_\omega e^{-i\omega t}$. Имеем:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t} \tag{3.22}$$

Решая это уравнение, найдем:

$$x_\omega = \frac{1}{m(\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2)} f_\omega \tag{3.23}$$

Введем теперь обозначение:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{m(\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2)} \tag{3.24}$$

Данная величина характеризует отклик системы на внешнее возмущение и носит название обощенная восприимчивость. Вместо координаты и силы могут быть другие величины, производение которых равно энергии. Мы можем записать:

$$x_\omega = \alpha(\omega) f_\omega \tag{3.25}$$

Под действием силы система совершает движение, в результате которого происходит диссипация энергии. Найдем скорость диссипации энергии. Она очевидно равна средней за период мощности работы силы. Последняя пишется как $Q = vf$. При этом, мы должны сначала взять силу и скорость в вещественном виде, а затем произвести усреднение. Пишем:

$$(v \cdot f) = \left(\frac{v + v^*}{2}\right)\left(\frac{f + f^*}{2}\right) \tag{3.26}$$

Используем теперь тот факт, что $v = -i\omega x = -i\omega\alpha(\omega)f$. После усреднения, все слагаемые, содержащие экспоненты сократятся. В результате получим:

$$Q = \frac{\omega}{2}\alpha''|f|^2 \tag{3.27}$$

То есть, диссипация определяется мнимой частью восприимчивости. Вычислим теперь мнимую часть от (3.24). Имеем:

$$\alpha''(\omega) = \frac{\gamma m \omega}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + m^2\gamma^2\omega^2} \tag{3.28}$$

Сравнивая с (3.21), получим:

$$(x^2)_\omega = \frac{2T}{\omega}\alpha'' \tag{3.29}$$

Это - классический варинат флуктуационно-диссипационной теоремы. Она позволяет найти флуктуации в системе, зная отклик системы на внешние силы.

IV. ЛЕКЦИЯ 4. ЗАКОН АРРЕНИУСА.

V. ЛЕКЦИЯ 5. УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ.

Движение жидкости описывается заданием в каждой точки пространства вектора скорости жидкости, а также термодинамического состояния каждого элемента объема. Мы будем считать, что каждый элемент объема жидкости находится в своем состоянии равновесия (но не обязательно в равновесии с другими элементами). Тогда, состояние каждого малого объема жидкости можно полностью описать указав всего две величины, например плотность и давление. Иными словами, для полного описания движения жидкости нам необходимо иметь систему из пяти уравнений. Получим их.

Введем следующие обозначения. Пусть $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ - скорость жидкости в некоторой точке как функция времени. То есть мы имеем дело с полем скоростей. Далее, пусть $\rho(\boldsymbol{r},t)$ - плостность в некоторой точке. Запишем теперь уравнение, выражающее закон сохранения массы жидкости. Масса некоторого объема жидкости может очевижна быть записана, как интеграл от плотности жидкости оп этому объему. Изменение массы жидкости в некотором объеме тогда можно написать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV \tag{5.1}$$

Дифференцирование по времени здесь можно занести под знак интеграла, так как объем предполагается фикисрованным. С другой стороны, изменение массы жидкости может происходить только за счет е втекания и вытекания через границы обема. Очевидно, что полный поток жидкости через границу (то есть, масса вытекающая из объема в единицу времени) может быть написан как:

$$\int \rho(\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{s}) \tag{5.2}$$

где через $d\boldsymbol{s}$ обозначен элемент поверхности. Преобразуем этот интеграл по теореме Гаусса. Имеем:

$$\int \rho(\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{s}) = \int \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}), dV \tag{5.3}$$

Это выражение нужно приравнять к (5.1), взятому с обратным знаком (вытекание жидкости из объема приводит к уменьшению ее массы в этом объеме). В силу произвольности объема интегрирования, должны быть равны подинтегральные выражения. Окончательно получаем:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \tag{5.4}$$

Это уравнение носит название уравнения непрерывности. Отметим важный частный случай, когда жидксоть является несжимаемой. В этом случае ее плотность постоянна, и уравнение непрерывности дает:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \tag{5.5}$$

То есть, поле скоростей несжимаемой жидкости - соленоидально.

Перейдем теперь к выводу уравнения, выражающего собой 2-й закон Ньютона. Для этого необходимо приравнять ускорение единицы массы жидкости к действующей на нее силе. При этом необходимо учитывать следующее обстоятельство: ускорение отдельного элемента жидкости, находящегося в некторый момент времени в некоторой точке, не совпаает вообще говоря с производной от скорости жидкости в этой точке. Для того, чтобы связать эти величины, мы должны учитывать смещение элемента объема жидкости. Иными словами, скорость некоторого элемента жидкости является функцией времени и координат этого элемента, которые, в свою очередь тоже зависят от времени. При вычислении ускорения мы должны взять полную производную по времени. Пишем:

$$\frac{d\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + (\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v} \tag{5.6}$$

Теперь нам необходимо вычислить силу, действующую на элемент жидкости. В случае идеальной жидкости, никаких вязких сил нет. Кроме того, мы пока будем считать, что нет никаких полей. Тогда единственный вклад в силу будет вносить давление. Имеем силу, действующую на элемент объема жидкости:

$$f = -\int p d\boldsymbol{f} = -\int \mathrm{grad} p \; dV \tag{5.7}$$

Таким образом, силы, действующая на элемент объема жидкости равна $-\mathrm{grad}p$. Эту силу нужно приравнять ускорению элемента объема жидкости, умноженному на его массу. Последняя, очевидно - просто плотность ρ. Окончательно имеем следующее векторное уравнение:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + (\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{\mathrm{grad}p}{\rho} \tag{5.8}$$

Это уравнение называется уравнением Эйлера. Его переписать в несколько ином виде. Для этого замечаем, что второй закон Ньютона по сути выражает закон сохранения импульса. В теории поля это означает, что изменение плотности импульса в некоторой точке должно быть равно дивергенции потока импульса, взятой со знаком минус. Так как плотность импульса является вектором, то поток импульса является тензором. Будем далее пользоваться индексными обозначениями. Плотность импульса дается выражением ρv_i. Вычислим производную по времени от плотности импульса. Пишем:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \tag{5.9}$$

Используем теперь уравнения непрерывности и уравнение Эйлера. Имеем:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = -v_i \partial_k(\rho v_k) - \rho v_k \partial_k v_i - \partial_i p \tag{5.10}$$

Окончательно получаем:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \tag{5.11}$$

Где тензор потока импульса Π_{ik} определяется следующим выражением:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k \tag{5.12}$$

Выведенные ранее уравнения предполагали, что жидкость является идеальной - то есть невязкой. В случае наличия вязкости, эти уравнения нужно дополнить соответствующими слагаемыми. Уравнение непрерывности при этом остается тем же, так как наличие вязкости никак не влияет на сохранение массы. Уравнение Эйлера, однако, должно быть изменено. Наличие вязкости приводит к появлению дополнительных слагаемых в тензоре потока импульса. Этот вклад должен быть подобран таким образом, чтобы обеспечить выполнение некоторых общих требований. Прежде всего, вязкость никак не проявляется при однородном движении жидкости. Это означает, что тензор напряжений должен содержать производные от скоростей по координатам. Далее, эти производные должны входить в таком виде, чтобы обращатся в нуль при равномерном вращении жидкости как целого. Будем также предполагать, что жидкость является несжимаемой. Тогда наиболее общий вид тензора второго ранга, линейного по производным от скоростей и удовлетворяющего нужным требованиям, такой:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right] \tag{5.13}$$

Где коэффициент η - вязкость, которая положительна (смотреть ниже). Добавку, связанную с вязкостью принято обозначать отдельно:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right] \tag{5.14}$$

Подставляя все это в уравнение для сохранения импульса и учитывая несжимаемость, получим:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + (\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{\mathrm{grad} p}{\rho} - \frac{\eta}{\rho}\Delta \boldsymbol{v} \tag{5.15}$$

Это уравнение называется уравнением Навье-Стокса. Отметим, что как и уравнение Эйлера - нелинейно. Вычислим еще изменение кинетической энергии жидкости. Пишем:

$$\rho \frac{\partial v^2}{2\partial t} = \rho v_i \partial_t v_k = \tag{5.16}$$

Окончательно получаем следующее выражение:

$$\frac{\rho}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} = -\partial_i \left[\rho v_i (v^2/2 + p/\rho) - v_k \sigma'_{ik} \right] - \sigma'_{ik} \partial_k v_i \tag{5.17}$$

Окончательно получаем изменение кинетической энергии в объеме:

$$\dot{E} = -\frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV \tag{5.18}$$

VI. ЛЕКЦИЯ 6. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ (ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ).

Рассмотрим теперь несколько подробнее уравнение Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + (\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{\mathrm{grad} p}{\rho} - \nu\Delta\boldsymbol{v} \tag{6.1}$$

Как уже было сказано выше, это уравнение нелинейно, что существенно усложняет процедуру его решения. Оно может быть решено лишь в сравнительно простых случаях. Начнем с обсуждения стационарных решений. Стационарное уравнение выглядит следующим образом:

$$(\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{\mathrm{grad} p}{\rho} - \frac{\eta}{\rho}\Delta\boldsymbol{v} \tag{6.2}$$

Как мы уже знаем, оно легко решается для систем, в которых нелинейное слагаемой тождественно исчезает по соображениям симметрии. В других случаях можно пытаться найти приближенное решение, если нелинейное слагаемое мало по сравнению с вязким. Для того, чтобы найти необходимые для этого условия нам нужно оценить по порядку величины вклад от нелинейного и от вязкого слагаемых. Пусть параметры системы заданы таким образом, что есть некоторая характерная скорость U, например при обтекании тела потоком это есть скорость этого потока на бесконечности, а также некоторый характерный масштаб длины l (например, размер тела или трубы). Тогда порядок величины нелинейного слагаемого следующий: $(\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v} \sim U^2/l$. Порядок же вязкого члена есть $\nu U/l^2$. Тогда отношение первого ко второму (мы будем обозначать его Re):

$$\mathrm{Re} = \frac{Ul}{\nu} \tag{6.3}$$

Эту безразмерную комбинацию называют числом Рейнолдса. Можно убедиться, что из всех размерных параметров, характеризующих какой-либо тип течения (стационарного и в отсутствии сторонних сил), можно составить только эту безразмерную комбинацию. Действительно, размерных параметров, характеризующих течение всего три: размер, скорость и кинематическая вязкость жидкости, а размерностей - две.

Итак, если число Рейнолдса мало, что основную роль в уравнении Навье-Стокса играет вязкое слагаемое, и уравнение можно сделать линейным просто опустив нелинейное слагаемое. В противоположном предельном случае - большого числа Рейнолдса - основной вклад вносит именно нелинейность и можно опустить вязкое слагаемое. Тогда мы вернемся к уравнению Эйлера, что означает, что в большей части пространства жидкость движется как идеальная. Влияние вязкости начинает проявлятся только в тонком слое вблизи твердых поверхностей.

Как мы видели ранее, стационарные ламинарные решения уравнения Навье-Стокса для простых систем дают результаты, находящиеся в полном противоречии с экспериментальными данными. Это связано с тем, что такие течения не являются устойчивыми. Иными словами, возникшие в таких течениях сколь угодно малые возмущения начинают расти со временем, делая течение как нестационарным, так и сильно неоднородным. Рассмотрим вопрос об устойчивости несколько подробнее. Пусть мы имеем некоторое стационарное (но неоднородное) решение уравнению Навье-Стокса $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{p}_0$:

$$(\boldsymbol{v}_0,\nabla)\boldsymbol{v}_0 = -\frac{\mathrm{grad} p_0}{\rho} - \frac{\eta}{\rho}\Delta\boldsymbol{v}_0 \tag{6.4}$$

Допустим, что это решение испытывает возмущение $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{p}_1$, не обязательно малые, по сравнению с невозмущенными. Понятно, что эти возмущения удовлетворяют следующему уравнению:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0,\nabla)\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_1,\nabla)\boldsymbol{v}_0 + (\boldsymbol{v}_1,\nabla)\boldsymbol{v}_1 = -\frac{\mathrm{grad} p_1}{\rho} - \nu\Delta\boldsymbol{v}_1 \tag{6.5}$$

Умножим теперь это уравнение скалярно на $\boldsymbol{v}_1$. После простых преобразований (с учетом того, что и возмущенное и невозмущенное течения непрерывны), получим:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}\frac{v_1^2}{2} = -v_{1i}v_{1k}\partial_k v_{0i} - \nu\left(\partial_k v_{1i}\right)^2 + \\ \frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\frac{v_1^2}{2}(v_{0k}+v_{1k}) - p_1 v_{1k} + \nu v_{1k}\partial_k v_{1i}\right] \end{gathered} \tag{6.6}$$

Проинтегрируем теперь это по всему объему, занимаемому жидкостью. Тогда последнее слагаемое исчезнет и мы получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{v_1^2}{2} dV = -\int v_{1i}v_{1k}\partial_k v_{0i} dV - \nu\int\left(\partial_k v_{1i}\right)^2 dV \tag{6.7}$$

Перейдем теперь к безразмерным переменным, то есть будем измерять скорость в величинах U_0, а длины - в величинах L. Тогда получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{v_1^2}{2} dV = -\int v_{1i}v_{1k}\partial_k v_{0i} dV - \frac{1}{\mathrm{Re}}\int\left(\partial_k v_{1i}\right)^2 dV \tag{6.8}$$

В левой части этого уравнения стоит средний квадрат скорости возмущения. Если он положителен - возмущение нарастает со временем, и течение неустойчиво. Последнее слагаемое в правой части всегда вносит отрицательный вклад в рост возмущения, являясь вязкой диссипацией энергии. Первое слагаемое может иметь любой знак. Понятно, что в течение непрерывно происходят возмущения разных конфигураций, в том числе и те, для которых это слагаемое имеет положительный знак. Устойчивость течения, таким образом, будет определяться балансом между двумя этими вкладами. Как видим, вязкий вклад тем слабее, чем больше число Рейнолдса (то есть, чем меньше вязкость). Это означает, что приповышении числа Рейнолда непременно будет достигнут такой момент, когда вполне немалое возмущение станет нарастать со временем. Это означает, что движение приобретает сложный характер.

Невозможно найти общее точное решение для уравнения Навье-Стокса, даже для систем с относительно простой геометрией в случае больших чисел Рейнолдса. Скорость испытывает нерегулярные изменения как во времени, так и в пространстве. Можно, однако, сделать ряд оценок по порядку величины, а также ряд весьма важных качественных заключений. Попробуем качественно разобраться, что происходит в случае, так называемой, развитой турбулентности. Допустим, что мы производим накачку (например, размешивая жидкость) на некотором масштабе длины L. Если бы уравнения гидродинамики были линейными, то решением было бы распределение скорости, которое соответсвует вихрю с размерами порядка L. В частности, если скорость U и масштаб L таковы, что мало соответствующее им число Рейнолдса - наблюдается именно такая картина. В случае не малых чисел Рейнолдса, нелинейность приведет к тому, что будут образовываться вихри более мелких масштабов. Понятно, что на некотором, достаточно малом, масштабе вязкость начнет играть роль и будет происходить существенная диссипация энергии. Этот масштаб, называемый вязким, мы определим ниже. Если есть существенный зазор между масштабом накачки и вязким масштабом, то в промежуточной области энергия будет непрерывно передаваться от больших масштабов к малым. Эта промежуточная область носит название инерционного интервала, а передача энергии - каскадом (прямым).

Как уже было сказано выше, невозможно точно описать свойства движения в турбелентном течении, в частности, невозможно определить точный характер распределения скоростей на произвольных масштабах. Можно, однако, сделать некоторые оценки.

Начнем с рассмотрения свойств поля скоростей в инерционном интервале, то есть будем интересоваться разностями скоростей на масштабах, много меньших масштаба накачки, но много больших вязкого масштаба. Рассмотрим поведение средней разности скорости v_l на расстояниях порядка l. Так как число Рейнолдса для этих масштабов большое, то вязкость не может оказать существенного влияния на движение, соответственно, разность скоростей не может зависеть от вязкости. Далее, как было сказано выше, в инерционном интервале происходит непрерывная перекачка энергии с больших масштабов на малые, диссипация на инерционных масштабов мала. Это значит, что на всех масштабах внутри инерционного интервала имеет смысл величина непрерывно "прокачиваемой"энергии, которая постоянна для всех этих масштабов, в силу ее сохранения. Принято пользоваться энергией, лиссипируемой в единицу времени в единице массы жидкости ε. Эта величина имеет размерность sm^2/s^3. Таким образом, разность скоростей на некотором масштабе l может зависеть только от ε и от самого этого масштаба. Однако, из этих величин можно составить только одну величину с размерностью скорости. Таким образом, мы получаем следующую оценку:

$$v_l \sim \varepsilon^{1/3} l^{1/3} \tag{6.9}$$

Наличие нелинейного слагаемого приводит к тому, что поле скоростей может меняться таким образом, что возбуждение скорости на каком-то пространственном масштабе постепенно будет передавать энергию на другие масштабы.

VII. ЛЕКЦИЯ 12. КОЛЕБАНИЯ В ПЛАЗМЕ

Рассмотрим возможность существования в плазме, представляющей собой газ из ионов и электронов, собственных колебаний. Для этого нам необходимо записать систему самосогласованных уравнений на функцию распределения частиц и электрическое поле. Мы будем пренебрегать наличием магнитного поля, что допустимо, если скорости частиц в плазме малы по сравнению со скоростью света и на систему не наложено внешнее магнитное поле. Будем обозначать посредством $f_e(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$ функцию распределения электронов по импульсам и координатам, а посредством $f_i(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$ - функцию распределения для ионов. Также будем обозначать через f^0 равновесные значения этих функций, причем будем предполагать, что они не зависят от времени и координат. Уравнения на функции распределения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_e, \frac{\partial f_e}{\partial \boldsymbol{r}}) - e(\boldsymbol{E}, \frac{\partial f_e}{\partial \boldsymbol{p}}) = -\nu(f_e - f_e^0) \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_i, \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{r}}) + ze(\boldsymbol{E}, \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{p}}) = -\nu(f_i - f_i^0) \tag{7.2}$$

Здесь через z обозначем заряд ионов. В правые части этих уравнений мы внесли релаксационные слагаемые, позже мы перейдем к пределу $\nu \to 0$. Для того, чтобы система уравнений была полной, необходимо еще добавить уравнение, связывающее электрическое поле с функциями распределения. Для этого необходимо выразить плотность заряда в плазме через функции распределения. Очевидно, что:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \int (zef_i - ef_e) d^3\boldsymbol{p} \tag{7.3}$$

Существенно, что если подставить сюда равновесные фукнции распределения, то это выражение обратится в нуль в силу условия электронейтральности плазмы. Уравение:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho \tag{7.4}$$

является третьим с полной системе самосогласованных уравнений на поле и функции распределение.

Для решения системы уравнений мы, во-первых будем считать, что функции распределения возмущены слабо от своих равновесных значений, а во вторых - возмущение зависит от координат и времени посредством множителя $\exp[i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - i\omega t]$:

$$f_i = f_i^0 + \chi_i(\boldsymbol{p}) \exp[i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - i\omega t] \tag{7.5}$$

$$f_e = f_e^0 + \chi_e(\boldsymbol{p}) \exp[i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - i\omega t] \tag{7.6}$$

Равновесные функции распределения не зависят от координат и времени. Частота и волновой вектор возмущений связаны некоторым соотношением, которое определяется решением самосогласованных уравнений. Такой вид функций распределения необходимо подставить в уравнения (7.1) и (7.2). При этом существенно, что электрическое поле само по себе ялвяется величиной первого порядка малости, поэтому в третьем слагаемом этих уравнений нужно писать равновесную функцию распределения. В итоге получаем:

$$-i\omega\chi_e + i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}_e)\chi_e + ze(\boldsymbol{E}, \frac{\partial f_e^0}{\partial \boldsymbol{p}}) = -\nu\chi_e \tag{7.7}$$

$$-i\omega\chi_i + i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v}_i)\chi_i - e(\boldsymbol{E},\frac{\partial f_i^0}{\partial \boldsymbol{p}}) = -\nu\chi_i \tag{7.8}$$

Еще одно уравнение мы получим, записав связб между электрическим полем и возмущениями функций распределения. Очевидно, что поле также будет зависять от координат и времени посредством экспоненциального множителя $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{k},\omega)\exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t]$. Таким образом, имеем:

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{k},\omega) = i\boldsymbol{k}\frac{4\pi e}{k^2}\int(\chi_e - z\chi_i)d^3\boldsymbol{p} \tag{7.9}$$

Если теперь подставить это выражение в уравнения (7.7) и (7.8), мы получим систему однородных уравнений, которые имеют решения только при определенной связи между частотой и волновым вектором. Для упрощения записи введем обозначение:

$$\Phi(\boldsymbol{k},\omega) = -\frac{4\pi e}{k^2}\int(\chi_e - z\chi_i)d^3\boldsymbol{p} \tag{7.10}$$

Это есть ни что иное, как амплитуда электростатического потенциала (в нашем приближении поле квазистационарно). Тогда уравнения (7.7) и (7.8) перепишутся в виде:

$$-i\omega\chi_e + i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v}_e)\chi_e - ize(\boldsymbol{k},\frac{\partial f_e^0}{\partial \boldsymbol{p}})\Phi(\boldsymbol{k},\omega) = -\nu\chi_e \tag{7.11}$$

$$-i\omega\chi_i + i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v}_i)\chi_i + ie(\boldsymbol{k},\frac{\partial f_i^0}{\partial \boldsymbol{p}})\Phi(\boldsymbol{k},\omega) = -\nu\chi_i \tag{7.12}$$

Отсюда находим:

$$\chi_i = \frac{-ze\Phi(\boldsymbol{k},\omega)}{\omega - (\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})/m_i + i\nu}(\boldsymbol{k},\frac{\partial f_i^0}{\partial \boldsymbol{p}}) \tag{7.13}$$

$$\chi_e = \frac{e\Phi(\boldsymbol{k},\omega)}{\omega - (\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})/m_e + i\nu}(\boldsymbol{k},\frac{\partial f_e^0}{\partial \boldsymbol{p}}) \tag{7.14}$$

Где мы ввели обозначение m_i и m_e для масс ионов и электронов соответственно.

Дисперсионное уравнение, связывающее частоту и волновой вектор мы теперь получим, подставляя эти выражения в (7.10):

$$-\frac{4\pi e}{k^2}\int\left[\frac{e}{\omega - (\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})/m_e + i\nu}(\boldsymbol{k},\frac{\partial f_e^0}{\partial \boldsymbol{p}}) + \frac{z^2 e}{\omega - (\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})/m_i + i\nu}(\boldsymbol{k},\frac{\partial f_i^0}{\partial \boldsymbol{p}})\right]d^3\boldsymbol{p} = 1 \tag{7.15}$$

Теперь в это уравнение нужно подставить равновесные функции рапределения ионов и электронов. Мы будем предполагать, что последняя есть распределение Максвелла с некоторой температурой (не обязательно одинаковой для ионов и электронов). Для проведения дальнейших вычислений, рассмотрим следующий интеграл:

$$-\int\left[\frac{1}{\omega - (\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})/m + i\nu}(\boldsymbol{k},\frac{\partial f^0}{\partial \boldsymbol{p}})\right]d^3\boldsymbol{p} \tag{7.16}$$

С равновесной функцией рапсределения:

$$f^0 = \frac{n}{(\sqrt{2\pi mT})^3}e^{-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2mT}} \tag{7.17}$$

Где n - концентрация частиц. Тогда записанный интеграл есть:

$$\frac{n}{mT(\sqrt{2\pi mT})^3}\int\left[\frac{(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})e^{-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2mT}}}{\omega-(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})/m+i\nu}\right]d^3\boldsymbol{p} \tag{7.18}$$

Волновой вектор при интегрировании по импульсам считается постоянным. Выберем ось z в импульсном пространстве вдоль волнового вектора. Ттогда интегрирование по p_x и p_y становится тривиальным. В итоге получаем:

$$\frac{n}{mT\sqrt{2\pi mT}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{kp_z e^{-\frac{p_z^2}{2mT}}}{\omega-kp_z/m+i\nu}\right]dp_z \tag{7.19}$$

Этот интеграл не вычисляется при произвольных соотношениях между параметрами. Однако, его можно приближенно вычислить в двух предельных случаях, соответствующих большим и малым частотам. Частоту нужно сравнивать с произведением волнового вектора на тепловую скорость. Также будем пока считать, что $\nu=0$. При $\omega\gg kv_T$ раскладываем подынтегральное выражение в ряд:

$$\frac{kp_z e^{-\frac{p_z^2}{2mT}}}{\omega-kp_z/m}\approx\frac{kp_z e^{-\frac{p_z^2}{2mT}}}{\omega}+\frac{k^2p_z^2 e^{-\frac{p_z^2}{2mT}}}{m\omega^2} \tag{7.20}$$

После интегрирования первое слагаемое обращается в нуль, а второе дает:

$$\frac{n}{mT\sqrt{2\pi mT}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{kp_z e^{-\frac{p_z^2}{2mT}}}{\omega-kp_z/m+i\nu}\right]dp_z\approx\frac{nk^2}{m\omega^2} \tag{7.21}$$

Так как концентрации ионов и электронов отличаются максимум в несколько раз (так же как и заряды), а массы - на три порядка, вклад от ионов мал по сравнению со вкладом от электронов. Разумеется, если и для тех и для других выполнено неравенство $\omega\gg kv_T$. Подставляя найденое выражение в (7.15) и пренебрегая вкладом от ионов, мы видим, что волновой вектор выпадает из закона дисперсии. Для частоты получаем следующее выражение:

$$\omega^2=\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e} \tag{7.22}$$

Это выражение известно под названием плазменной частоты (обозначается ω_p). Его можно получить и более простыми методами, рассматривая однородные колебания электронов относительно неподвижных ионов.

Расмотрим теперь члены следующего порядка в разложении по kv_T/ω. Для этого нужно продлить разложение (7.20) дальше, до третьего порядка. Члены второго порядка дадут при интегрировании ноль. Слагаемое третьего порядка:

$$\frac{k^4p_z^4 e^{-\frac{p_z^2}{2mT}}}{m^3\omega^4} \tag{7.23}$$

После интегрирования этот вклад дает:

$$\frac{3nTk^4}{m^2\omega^4} \tag{7.24}$$

Окончательно получаем следующее выражение для квадрата частоты частоты:

$$\omega^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e} + \frac{3T}{m_e}k^2 \tag{7.25}$$

Для самой частоты имеем в том же приближении:

$$\omega = \omega_p + \frac{3T}{\omega_p m_e}k^2 \tag{7.26}$$

Вычислим групповую скорость таких волн:

$$\boldsymbol{v}_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}} = \frac{6T}{\omega_p m_e}\boldsymbol{k} \tag{7.27}$$

Она оказывается много меньшей, чем тепловая скорость электронов.

Полученное нами выражение для дисперсии оказывается, однако, неполным. Нами был оставлен в стороне качественный эффект наличия у частоты мнимой части. Это означает, что колебания будут либо затухающими, либо возрастающими, в зависимости от знака этой самой мнимой части. В предыдущих вычислениях мы с самого начала считали, что $\nu = 0$, интеграл (7.19) подразумевался в смысле главного значения. Между тем, если вычислить этот интеграл с ненулевым положительным ν, а затем перейти к пределу $\nu \to 0$, окажется, что ответ имеет ненулевую мнимую часть. Рассмотрим этот момент несколько подробнее.

Будем рассматривать p_z как комплексную переменную. Тогда интегрирование, будет проводиться вдоль действительной оси. наличие положительной ν смещает полюс подынтегрального выражения в (7.19) в верхнюю полуплоскость, то есть будет лежать выше пути интегрирования. В том случае, когда ν устремляется к нулю, полюс попадает на действительную ось, однако путь интегрирования теперь должен быть несколько деформирован так, чтобы обойти полюс снизу. От метим, что правило обхода полюса определяется знаком ν, который, в свою очередь следует из физических соображений. Правило обхода полюса в интеграле (7.19) с $\nu = 0$ не может быть получено из каких-либо математических теорем, а должно быть дополнительно наложено, что мы и сделали.

Таким образом, мы имеем следующую процедуру вычисления интеграла. Нам необходимо обойти полюс на действительной оси по малой полуокружности снизу, а затем устремить радиус этой полуокружности к нулю. При этом можно во всем подынтегральной выражении положить $p_z = m\omega/k$. Имеем при $\nu \to 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kp_z e^{-\frac{p_z^2}{2mT}}}{\omega - kp_z/m + i\nu}dp_z = \tag{7.28}$$

$$+\lim_{r\to 0}\left(\int_{-\infty}^{m\omega/k-r} \frac{kp_z e^{-\frac{p_z^2}{2mT}}}{\omega - kp_z/m}dp_z + \int_{m\omega/k-r}^{+\infty} \frac{kp_z e^{-\frac{p_z^2}{2mT}}}{\omega - kp_z/m}dp_z\right) - i\frac{\pi m^2\omega}{k}e^{-\frac{m\omega^2}{2k^2T}}$$

Выражение в скобках есть ничто иное как интеграл (7.19) с $\nu = 0$ в смысле главного значения. Последне слагаемое даст тот самый вклад в мнимую часть частоты, который мы и вычисляли. Для выражения частоты через волновой вектор теперь нужно везду кроме главного слагаемого подставить ω_p вместо самой частоты. При этом следует быть аккуратным с экспонентой: в ее показатель нужно подставить более точное значение из (7.26). Окончательно имеем:

$$\omega = \omega_p + \frac{3T}{\omega_p m_e}k^2 - i\frac{4\sqrt{2}\pi^{5/2}n_e^2 e^4}{m_e^{1/2}T^{3/2}k^3}e^{-\left(\frac{m_e\omega_p^2}{2k^2T}+\frac{3}{2}\right)} \tag{7.29}$$

Так как мнимая часть положительна, колебания будут затухать (амплитуда пропорциональна $e^{-i\omega t}$). Кроме того, в силу условия $\omega_p^2 \gg k^2T/m_e$, мнимая часть оказывается экспоненциально малой.

Мы рассмотрели случай высокочастотных колебаний. Рассмотрим теперь обратный предельный случай. Вернемся к интегралу (7.19):

$$\frac{n}{mT\sqrt{2\pi mT}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{kp_z e^{-\frac{p_z^2}{2mT}}}{\omega - kp_z/m + i\nu}\right]dp_z \tag{7.30}$$

При малых частотах $\omega \ll kv_T$ этот интеграл равен $-n/T$. Нетрудно убедиться, что если неравенство $\omega \ll kv_T$ выполняется и для ионов и для электронов, условие (7.26) не может быть выполнению, так как левая часть в нем будет заведомо отрицательной. В силу малой массы электронов, их скорость почти всегда велика по сравнению со скоротью ионов. Нам нужно, таким образом, рассмотреть промежуточный случай, когда $\omega \ll kv_e$, но при этом $\omega \gg kv_i$. Тогда вклад в интеграл (7.30) от электронов нужно вычислять в пределе малых частот, а от ионов - в переделе больших частот. Имеем:

$$\frac{n_e}{m_eT_e\sqrt{2\pi m_eT_e}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{kp_z e^{-\frac{p_z^2}{2m_eT_e}}}{\omega - kp_z/m_e + i\nu}\right]dp_z \approx -\frac{n_e}{T_e} \tag{7.31}$$

$$\frac{n_i}{m_iT_i\sqrt{2\pi m_iT_i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{kp_z e^{-\frac{p_z^2}{2m_iT_i}}}{\omega - kp_z/m_i + i\nu}\right]dp_z \approx \frac{n_ik^2}{m_i\omega^2} \tag{7.32}$$

где мы считаем, что температуры ионов и электронов могут быть различными. Подставляя это в (7.26), будем иметь:

$$\frac{4\pi e}{k^2}\left(\frac{z^2en_ik^2}{m_i\omega^2} - \frac{en_e}{T_e}\right) = 1 \tag{7.33}$$

Нас интересует волны самых больших длин, таких, что $k^2/e^2n_e/T_e$. Для нахождения их дисперсии нужно заменить правую часть нулем. Таким образом находим:

$$\omega = k\sqrt{\frac{zT_e}{m_i}} \tag{7.34}$$

Эти волны имеют такой же закон дисперсии как и обычные звуковые. Фазовая скрорость совпадает с групповой и равна:

$$c = \sqrt{\frac{zT_e}{m_i}} \tag{7.35}$$

VIII. КОЛЕБАНИЯ В КВАЗИДВУМЕРНОМ ГАЗЕ

Рассмотрим теперь специфические особенности двумерной плазмы. Мы будем предполагать, что частицы плазмы могут двигаться только в плоскости (например, тонкая пленка металла), но при этом, поле от них может существовать во всем пространстве. Такую систему можно описывать как двумерную, но она принципиально отличается от системы, однородной в одном из направлений. Определим, как изменяться написанные выше уравнения для такого случая. Прежде всего все функции распределения, а вместе с ними и плотность заряда, будут двумерными функциями, помноженными на дельта-функцию от третьей координаты - например в формулах (7.5) и (7.6) и f_0 и χ будут помноженными на такую дельта-функцию. Поле, однако, будет трехмерным и будет нетривиально зависеть от третьей координаты, но нас интересует лишь его значение в плоскости, и кроме того, только тангенциальные компоненты. Тогда в уравнениях (7.8) и (7.7) можно просто сократить дельта-функцию и решать их как чисто двумерные. Далее, пусть координата x перпендикулярна плоскости плазмы. Запишем уравнение Лапласа для потенциала с учетом выражения для плотности заряда:

$$\partial_x^2\varphi_0(\boldsymbol{k},\omega,x) - k^2\varphi_0(\boldsymbol{k},\omega,x) = -4\pi e\delta(x)\int(\chi_e - z\chi_i)d^2\boldsymbol{p} \tag{8.1}$$

Это уравнение имеет следующее решение:

$$\varphi_0(\boldsymbol{k},\omega,x) = -\frac{2\pi e}{k}e^{-k|x|}\int(\chi_e - z\chi_i)d^2\boldsymbol{p} \tag{8.2}$$

И выражение для тангенциального вектора электрического поля можно записать следующим образом:

$$\varphi_0(\boldsymbol{k},\omega,x) = -\frac{2\pi e}{k}e^{-k|x|}\int(\chi_e - z\chi_i)d^2\boldsymbol{p} \tag{8.3}$$

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{k},\omega,x) = ik\frac{2\pi e}{k}e^{-k|x|}\int(\chi_e - z\chi_i)d^2\boldsymbol{p} \tag{8.4}$$

Так как нас интересует только поле в плоскости плазмы, экспоненту можно сразу заменить единицей. Дальше проделываем те же самые выкладки, что и раньше и в итоге приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$-\frac{2\pi e}{k}\int\left[\frac{e}{\omega - (\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})/m_e + i\nu}(\boldsymbol{k},\frac{\partial f_e^0}{\partial\boldsymbol{p}}) + \frac{z^2 e}{\omega - (\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})/m_i + i\nu}(\boldsymbol{k},\frac{\partial f_i^0}{\partial\boldsymbol{p}})\right]d^3\boldsymbol{p} = 1 \tag{8.5}$$

Вычисляя стоящие здесь интегралы тем же способом, что и раньше, получаем следующий закон дисперсии:

$$\omega^2 = \frac{2\pi e^2 n_e}{m_e}k \tag{8.6}$$

Т.е. корневую дисперсию, как у гравитационных волн на поверхности жидкости.

Дальше нужно подумать, может еще каких качественных эффектов добавить, но и без этого задача вполне красива, да и к тому же крайне полезна - особенно теоретикам и твердотельщикам.