УДК 517.972

А. Д. Грехнева

Российский университет дружбы народов

О существовании локального решения задачи Коши–Дирихле для нелинейного уравнения Шредингера с запаздыванием временного аргумента

Исследуется задача с начальным условием Коши–Дирихле для дифференциально-разностного уравнения Шредингера с запаздыванием. Установлены локальная однозначная разрешимость задачи Коши–Дирихле с запаздыванием временного аргумента и эффекты глобального существования решения.

Ключевые слова: Нелинейное уравнение Шредингера, регуляризация, отклонение по временному аргументу, запаздывание.

A. D. Grekhneva

Peoples' Friendship University of Russia

On the Cauchy-Dirichlet problem for the nonlinear Schroedinger equation with a delay temporary argument

We study the initial condition problem for the Cauchy-Dirichlet problem for the differential difference Schroedinger equation with delay. We find the local well-posedness of the Cauchy problem, i.e. the Dirichlet problem with a lag argument and temporary effects of the global existence of the solution.

Key words: The nonlinear Schrödinger equation, regularize, deviation of a temporary argument, delay.

1. Введение

Нелинейное уравнение Шредингера описывает ряд явлений нелинейной оптики и моделей самосогласованного поля в квантовой механике. Этим уравнением описывается распространение электромагнитных волн в нелинейных оптических средах и в том числе явление самофокусировки [1, 9]. Наличие запаздывания в нелинейном уравнении Шредингера обусловлено описанием некоторых моделей управления с обратной связью и запаздыванием сигнала [1]. С математической точки зрения это уравнение представляет интерес с точки зрения теории солитонов, обратной задачи теории рассеяния [11] и теории разрушения решений [5, 8]. Для теории разрушения решений интерес представляет тот факт, что локальное решение сохраняет L_2-норму на всем промежутке своего существования, но норма решения в пространствах Лебега с более высоким показателем суммируемости и его норма в пространствах Соболева неограниченно возрастают при приближении к конечной границе промежутка существования решения.

В настоящей работе исследуется нелинейное уравнение Шредингера, аддитивно возмущенное нелинейным слагаемым с запаздыванием. В статье установлены условия на нелинейное слагаемоес отклонением аргумента, при которых имеет место локальная однозначная разрешимость задачи с начальным условием, заданным на промежутке запаздывания.

Исследуем решение задачи с начальными условиями и граничными условиями Коши для дифференциально-разностного уравнения Шредингера, дополненного операторами сдвига временного аргумента неизвестной функции:

$$i\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + |u(t,x)|^p u(t,x) + f(|\mathbf{T}_h u(t,x)|^2)\mathbf{T}_h u(t,x) +$$

$$+f(|\mathbf{T}_{-h}u(t,x)|^2)\mathbf{T}_{-h}u(t,x),\ (t,x) \in (-h,+\infty)\times(-l,l), \tag{1}$$

где $h \in (0,+\infty)$ и операторы сдвига $\mathbf{T}_h$ отображают функции $u: \ (-h,+\infty) \to H$ в функции $\mathbf{T}_{\pm h}u: \ (0,+\infty) \to H$ по следующему правилу:

$$\mathbf{T}_h u(t) = u(t-h),\ t \in (0,+\infty); \quad \mathbf{T}_{-h}u(t) = u(t+h),\ t \in (0,+\infty).$$

Ставится задача найти решение дифференциаально-разностного уравнения (1), удовлетворяющего двум условиям:

начальному условию

$$u|_{(-h,0)} = \varphi, \tag{2}$$

где φ – заданная на промежутке $(-h,0)$ функция со значениями в пространстве H, и

граничному условию

$$u(t,-l+0) = u(t,l-0) = 0,\ t \in (0,+\infty). \tag{3}$$

Относительно функции $f: \ [0,+\infty) \to R$ сделаем предположение, что существует такая константа $k > 0$, что $|f(s)| \leq k|s|^{\frac{p}{2}}$ при всех $s \geq 0$.

Определение. Функцию u будем называть H^k-решением задачи (1) – (3) ($k \in \mathbf{N}$), если $u \in C([0,T), H^k \bigcap L_{p+2}(-l,l))$ и выполнено равенство

$$u(t) = e^{-it\mathbf{\Delta}}u_0 - i\int\limits_0^t e^{-i(t-s)\mathbf{\Delta}}\mathbf{G}u(s)ds,\ t \in [0,T). \tag{4}$$

где

$$\mathbf{G}u(s,x) = |u(s,x)|^p u(t,x) + f(|\mathbf{T}_h u(s,x)|^2)\mathbf{T}_h u(s,x) +$$

$$+f(|\mathbf{T}_{-h}u(s,x)|^2)\mathbf{T}_{-h}u(s,x);\ (s,x) \in (0,+\infty)\times(-l,l). \tag{5}$$

Согласно теореме вложения при всех $k \in \mathbf{N}$ имеет место вложение $H^k(-l,l) \subset C([-l,l])$ и оценка

$$\|u\|_{C([-l,l])} \leq C_{emb}\|u\|_{H^1}. \tag{Emb}$$

Поэтому в определении решения условие $u \in C([0,T), H^k \bigcap L_{p+2}(-l,l))$ можно заменить на условие $u \in C([0,T), H^k)$.

Докажем теорему о локальной разрешимости задачи с начальными данными (1) – (3), используя принцип сжимающих отображений и теорему вложения.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in C([-h,0], H^1)$ *и* $\|\varphi\|_{C([-h,0],H^1)} = d_0$. *Тогда существует* $T = T(d_0) > 0$ *такое, что на промежутке* $(-h,T)$ *задача с начальными данными* (1) – (3) *имеет единственное* H^1*-решение.*

Доказательство.

Обозначим через Y_T банахово пространство функций $C([-h,T], H^1(-l,l))$. Через $Z_T(\varphi)$ обозначим ограниченное выпуклое замкнутое подмножество пространства Y_T, состоящее из таких функций $u \in Y_T$, которые удовлетворяют условию

$$u(t) = \varphi(t),\, \forall\, t \in [-h,0]; \quad \|u(t)\|_{H^1} \leq 2\|\varphi\|_{C((-h,0),H^1)}\, \forall\, t \in [-h,T].$$

Выберем некоторое число $T > 0$ и рассмотрим отображение $\mathbf{\Phi}$, сопоставляющее каждой функции $u \in Y_T$ функцию v, определяемую равенством

$$v(t) = (\mathbf{\Phi} u)(t) \equiv e^{-it\mathbf{\Delta}} u(0) - i \int_0^t e^{-i(t-s)\mathbf{\Delta}} \mathbf{G} u(s) ds, \ t \in [0, T); \quad v(t) = u(t), \, t \in (-h, 0). \quad (6)$$

Для любого $u \in L_{\bar{q}}(R)$ справедлива оценка

$$\|e^{-it\mathbf{\Delta}} u\|_{L_q(R)} \leq (4\pi)^\theta t^\theta \|u\|_{L_{\bar{q}}(R)},$$

где $\bar{q} = \frac{q}{q-1}$, $q \geq 2$, $\theta = \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$. В частности, $\|e^{-it\mathbf{\Delta}} u\|_{L_1(R)} \leq \sqrt{4\pi t} \|u\|_{L_\infty(R)}$ и $\|e^{-it\mathbf{\Delta}} u\|_{L_2(R)} = \|u\|_{L_2(R)}$.

Лемма 1. *Если $u \in Y_T$, то $v = \mathbf{\Phi} u \in Y_T$ и справедлива оценка*

$$\|v\|_{Y_T} \leq \|u\|_{Y_T} (1 + TC(p, C_{Emb} \|u\|_{Y_T}, \|f\|_{C^1([0, C_{Emb}\|u\|_{Y_T})})),$$

в которой константа является функцией трех неотрицательных аргументов и не зависит от величины T.

Действительно, если $u \in Y_T$, то $u(0) \in H^1$ и, следовательно, первое слагаемое $e^{-it\mathbf{\Delta}} u(0)$ лежит в пространстве $C([0, T], H^1)$ и $\|e^{-it\mathbf{\Delta}} u(0)\|_{C([0,T],H^1)} = \|u_0\|_{H^1} \leq \|u\|_{Y_T}$.

Операторы полугруппы $e^{-it\mathbf{\Delta}}$, $t \geq 0$, коммутируют с оператором дифференцирования, поэтому

$$\partial_x v(t) = e^{-it\mathbf{\Delta}} \partial_x u(0) - i \int_0^t e^{-i(t-s)\mathbf{\Delta}} \partial_x \mathbf{G} u(s) ds, \ t \in [0, T); \quad \partial_x v(t) = \partial_x u(t), \, t \in (-h, 0).$$

$$\partial_x \mathbf{G} u(s) = g_1 \partial_x u(s) + g_2 \partial_x \bar{u}(s) + g_3 T_h(\partial_x u(s)) + g_4 T_h(\partial_x \bar{u}(s)), \quad (7)$$

где $g_{1,2,3,4} \in C([0, T], L_\infty(-l, l))$, ибо

$$\partial_x \mathbf{G} u(t) = |u(t,x)|^{p-2} (u'_x(t,x) \bar{u}(t,x) + u(t,x) \bar{u}'_x(t,x)) u(t,x) + |u(t,x)|^p u'_x(t,x) +$$

$$+ f(|\mathbf{T}_h u(t,x)|^2) \mathbf{T}_h(u'_x(t,x)) + \mathbf{T}_h u(t,x) f'(|\mathbf{T}_h u(t,x)|^2) (\mathbf{T}_h(u'_x(t,x) \bar{u}(t,x)) + \mathbf{T}_h(u(t,x) \bar{u}'_x(t,x))). \quad (8)$$

В силу непрерывной дифференцируемости функции f на промежутке $[0, +\infty)$ и оценки (Emb) функция $\mathbf{G} u(s)$, $s \in [0, T]$, лежит в пространстве $C([0, T], H^1)$ и справедлива оценка

$$\|\mathbf{G} u\|_{C([0,T],H^1)} \leq C(p, C_{Emb} \|u\|_{Y_T}, \|f\|_{C^1([0, C_{Emb}\|u\|_{Y_T})}) \|u\|_{Y_T}. \quad (9)$$

Из полученных оценок следует, что

$$\|v\|_{Y_T} \leq \|u\|_{Y_T} (1 + TC(p, C_{Emb} \|u\|_{Y_T}, \|f\|_{C^1([0, C_{Emb}\|u\|_{Y_T})}))$$

и, таким образом, доказано утверждение леммы 1.

Следствие 1. Существует такое $T_1 > 0$, что если $T \in (0, T_1]$, то для любого $u \in Z_T(u_0)$ выполняется условие $\mathbf{\Phi} u \in Z_T(u_0)$.

Лемма 2. *Пусть $u_1, u_2 \in Z_T(u)$. Тогда если $f \in C^2([0, +\infty))$ и $\varphi \in C([-h, 0], H^1)$, то существует постоянная $C(p, \varphi, f) > 0$ такая, что*

$$\|\mathbf{\Phi} u_1 - \mathbf{\Phi} u_2\|_{Y_T} \leq TC(p, \varphi, f) \|u_1 - u_2\|_{Y_T}. \quad (10)$$

Согласно (6) для любых $u_1, u_2 \in Z_T(u)$ справедливо равенство

$$\mathbf{\Phi} u_1(t) - \mathbf{\Phi} u_2(t) = i \int\limits_0^t e^{-i(t-s)\mathbf{\Delta}} (\mathbf{G} u_2(s) - \mathbf{G} u_1(s)) ds,\ t \in [0, T); \quad \mathbf{\Phi} u_1(t) - \mathbf{\Phi} u_2(t) = 0,\ t \in (-h, 0). \tag{11}$$

Справедлива оценка

$$\sup_{s \in [0,T]} \|\mathbf{G} u_2(s) - \mathbf{G} u_1(s)\|_H \leq c(p, C_{Emb}\|u\|_{Y_T}, \|f\|_{C^1([0, C_{Emb}\|u\|_{Y_T}))}) \sup_{s \in [0,T]} \|u_2(s) - u_1(s)\|_H. \tag{12}$$

В силу унитарности операторов полугруппы $e^{-it\mathbf{\Delta}}$, $t \geq 0$, справедлива оценка

$$\|\mathbf{\Phi} u_1(t) - \mathbf{\Phi} u_2(t)\|_{C([0,T],H)} \leq T \|\mathbf{G} u_2(s) - \mathbf{G} u_1(s)\|_{C([0,T],H)},$$

поэтому имеет место неравенство

$$\|\mathbf{\Phi} u_1(t) - \mathbf{\Phi} u_2(t)\|_{C([0,T],H)} \leq T K(p, \varphi, f) \|u_2 - u_1\|_{Y_T}. \tag{13}$$

Так как операторы полугруппы $e^{-i(t-s)\mathbf{\Delta}}, t \geq 0$, коммутируют с оператором дифференцирования d_x, то

$$d_x(\mathbf{\Phi} u_1(t) - \mathbf{\Phi} u_2(t)) = i \int\limits_0^t e^{-i(t-s)\mathbf{\Delta}} (d_x(\mathbf{G} u_2(s)) - d_x(\mathbf{G} u_1(s))) ds,\ t \in [0, T);$$

$$d_x(\mathbf{\Phi} u_1(t) - \mathbf{\Phi} u_2(t)) = 0,\ t \in (-h, 0). \tag{14}$$

Оценим величину

$$\sup_{s \in [0,T]} \|\partial_x(\mathbf{G} u_2(s)) - \partial_x(\mathbf{G} u_1(s))\|_H$$

с учетом вытекающего из теоремы вложения неравенства $\|u_2(t,x) - u_1(t,x)\|_{C([0,T],C([-l,l]))} \leq$ $\leq C_{Emb}\|u_2(t,x) - u_1(t,x)\|_{C([0,T],H^1)}$.

Если функция f дважды непрерывно дифференцируема на промежутке $[0, +\infty)$, то

$$\|\partial_x(\mathbf{G} u_2(s)) - \partial_x(\mathbf{G} u_1(s))\|_{C([0,T],H)} \leq$$

$$\leq K(p, \varphi, f) \|u_2(t,x) - u_1(t,x)\|_{C([0,T],H^1)}.$$

Поэтому в силу унитарности операторов полугруппы $e^{-it\mathbf{\Delta}}$, $t \geq 0$, справедлива оценка

$$\|\partial_x(\mathbf{\Phi} u_1(t) - \mathbf{\Phi} u_2(t))\|_{C([0,T],H)} \leq T \|\partial_x(\mathbf{G} u_2(s)) - \partial_x(\mathbf{G} u_1(s))\|_{C([0,T],H)} \leq$$

$$\leq T K(p, \varphi, f) \|u_2(t,x) - u_1(t,x)\|_Y. \tag{15}$$

Из полученных оценок следует утверждение леммы 2.

Следствие 2. Если $f \in C^2([0, +\infty))$ и $\varphi \in C([-h, 0], H^1)$, то существует такое $T_2 > 0$, что для любого $T \in (0, T_2)$ отображение Φ является сжимающим преобразованием замкнутого выпуклого множества $Z_T(\Phi)$ в себя.

Положим $d_0 = \min\{T_1, T_2\}$. Тогда в силу следствий 1, 2 и леммы 2 справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для любого $T \in (0, d_0]$ отображение $\Phi|_{Z_T(\varphi)}$ имеет единственную неподвижную точку $u \in Z_T(\varphi)$.

Положим $u_0(t) = \varphi(0), t \geq 0; u_0(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0]$. Тогда при любом $T > 0$ $u_0 \in Z_T(\varphi)$. При любом $T \in (0, T_1]$ определим последовательность $\{u_n\}$ функций, определяемых реккурентно с помощью равенств

$$u_k = \mathbf{\Phi} u_{k-1},\ k \in \mathbf{N}. \tag{16}$$

Тогда для любого $k \in \mathbf{N}$ в силу леммы 1 справедливо включение $u_k \in Z_T(\Phi)$, а в силу леммы 2 – оценка

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{Y_T} \leq TC(p, \varphi, f)\|u_k - u_{k-1}\|_{Y_T},\quad k \in \mathbf{N}.$$

Согласно следствию 3 последовательность итераций $\{u_k\}$ сходится к непродижной точке отображения $\mathbf{\Phi}$.

Единственная неподвижная точка $\hat{u}$ отображения $\Phi|_{Z_{d_0}(\varphi)}$ является решением задачи с начальными условиями (1) – (3) на промежутке $(-h, d_0)$, причем в силу следствия 3 единственным решением задачи с начальными условиями (1) – (3) на промежутке $(-h, d_0)$ из множества $Z_{d_0}(\varphi)$. Предположим, что существует решение $\tilde{u}$ на промежутке $(-h, d_0)$, отличное от $\hat{u}$ и не лежащее в множестве $Z_{d_0}(\varphi)$. Пусть $d_* = \sup\{t \in (0, d_0) :\ \hat{u}(t) = \tilde{u}(t)\}$. Тогда если $d_* < d_0$, то существует $s > 0$ такое, что $\|\hat{u}(t)\|_{H^1} \leq 2\|\hat{u}|_{[d_*-h, d_*]}\|_Y\ \forall\, t \in [d_*, d_*+s]$ и $\|\tilde{u}(t)\|_{H^1} \leq 2\|\tilde{u}|_{[d_*-h, d_*]}\|_Y\ \forall\, t \in [d_*, d_*+s]$. Поэтому на отрезке $[d_*-h, d_*+s]$ для функций $\hat{u}$ и $\tilde{u}$ выполняются условия $\hat{u}, \tilde{u} \in Z_s(\hat{u}|_{[d_*-h, d_*]})$, и так как эти функции являются решениями задачи, то они являются и неподвижными точками отображения $\mathbf{\Phi}|_{Z_s(\hat{u}|_{[d_*-h, d_*]})}$, поэтому в силу следствия 3 они совпадают на отрезке $[d_*, d_* + s]$. А это противоречит определению d_* и условию $d_* < d_0$. Поэтому $\tilde{u}$ не может отличаться от $\hat{u}$ на отрезке $[0, d_0]$.

Литература

1. *Разгулин А.В., Романенко Т.Е.* Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием // Журнал выч. матем. и мат. физ. 2013. Т. 53, № 11. С. 1804–1821.
2. *Gasinski L., Papageorgiou N.S.* Nonlinear analysis. Series in Mathematical Analysis and Applications. Ed. by R.P. Agarwal and D. O'Regan. 2005. V. 9.
3. *Йаакбариех А., Сакбаев В.Ж.* Корректность задачи для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента // Изв. вузов. Серия Математика. 2015. № 4. С. 17–25.
4. *Грехнева А.Д.* О явлении взрыва решений задачи Коши–Дирихле для нелинейного уравнения Шредингера на отрезке // Труды МФТИ. 2016. Т. 8, № 1. С. 123–135.
5. *Митидиери, Похожаев С.И.* // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. 2001. Т. 234.
6. *Fujita H.* // J. Fac. Sci. Univ. Proc. Tokio, Sec. 1A. 1966. V. **13**. 109–124.
7. *Zhidkov P.E.* Lecture Notes in Math. 2001.
8. *Сакбаев В.Ж.* Градиентный взрыв решений задачи Коши для уравнения Шрёдингера // Тр. МИАН. 2013. Т. 283. С. 171–187.
9. *Glassey R.T.* On the blowing up of solution to the Cauchy Problem for nonlinear Schrodinger equations // J. Math. Phys. 1977. V. 18:9. P. 1794–1797.
10. *Ginibre J., Velo G.* On a class of nonlinear Schrodinger equations. I. The Cauchy problem, general case // J. Funktional Analysis 1979. V. 32, N 1. P. 1–32.
11. *Фаддеев Л.Д., Тахтаджян Л.А.* Квантовый метод обратной задачи и XY Z модель Гейзенберга // УМН. 1979. Т. 34, вып. 5(209). С. 13–63.

References

1. *Razgulin A.V., Romanenko T.E.* Rotating waves in parabolic functional differential equations with rotation of spatial argument and time delay. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2013. V. 53, N 11. P. 1626–1643. (in Russian).
2. Gasinski L., Papageorgiou N.S. Nonlinear analysis. Series in Mathematical Analysis and Applications. Ed. by R.P. Agarwal and D. O'Regan. 2005. V. 9.
3. *Yaakbarieh A., Sakbaev V.Zh.* The correctness problem for parabolic differential-difference equations with shifts temporal variables. News of the Universities, mathematics part. 2015. N 4. C. 17–25. (in Russian).
4. *Grekhneva A.D.* On the phenomenon of explosion of solutions to the Cauchy–Dirichlet problem for the nonlinear Schroedinger equation in the interval. Proceedings of MIPT. 2016. V. 8, N 1. P. 123–135.
5. *Mitidieri, Pohozhaev S.I.* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2001. V. 234. (in Russian).
6. *Fujita H.* J. Fac. Sci. Univ. Proc. Tokio, Sec. 1A. 1966. V. 13. 109–124.
7. *Zhidkov P.E.* Lecture Notes in Math. 2001.
8. *Sakbaev V.Zh.*, The explosion of the gradient of solutions of the Cauchy problem for the schroedinger equation. Proceedings MIAN. 2013. V. 283. C. 171–187. (in Russian).
9. *Glassey R.T.* On the blowing up of solution to the Cauchy Problem for nonlinear Schrodinger equations. J. Math. Phys. 1977. V. 18:9. P. 1794–1797.
10. *Ginibre J., Velo G.* On a class of nonlinear Schrodinger equations. I. The Cauchy problem, general case. J. Funktional Analysis 1979. V. 32. N 1. P. 1–32.
11. *Faddeev, L.D., Takhtajan L.A.* The quantum inverse problem method and the XYZ Heisenberg model. Russian Mathematical Surveys, 1979. V. 34, I. 5(209). P. 13–63.

Поступила в редакцию 25.04.2018