УДК 519.174.7

А. В. Бобу, А. Э. Куприянов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

О нижних оценках хроматического числа пространства с запрещенными одноцветными треугольниками

Настоящая работа посвящена оценкам хроматического числа пространства с запрещенными одноцветными треугольниками. В работе приводятся новые нижние оценки исследуемой величины, улучшающие все известные на настоящий момент границы.

Библиография: 37 названий.

Ключевые слова: проблема Нельсона–Эрдеша–Хадвигера, хроматическое число пространства с запрещенными одноцветными треугольниками, линейно-алгебраический метод.

A. V. Bobu, A. E. Kupriianov

Moscow State University

On lower bounds for the chromatic number of a space without monochromatic triangles

The present paper is devoted to the bounds for the chromatic number of a space without monochromatic triangles. New bounds that improve all previous results are presented.

Key words: Nelson–Erdos–Hadwiger problem, chromatic number of space without monochromatic triangles, linear-algebraic method.

1. Введение

В комбинаторной геометрии большой популярностью пользуется задача Нельсона–Эрдеша–Хадвигера, ставшая широко известной в 50-е годы XX столетия (см. [1–4]). Суть этой задачи состоит в отыскании величины $\chi(\mathbb{R}^n)$, которая носит названия *хроматического числа пространства* и равна минимальному числу цветов, в которые можно так покрасить все точки $\mathbb{R}^n$, чтобы любые две точки на расстоянии 1 были разных цветов. Описанная проблема все еще является открытой даже для евклидовой плоскости: на настоящий момент известно лишь, что $5 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$, причем оценка сверху довольно тривиальна. О малых значениях n можно подробнее прочитать в обзорах и исследованиях [3], [4], [5–13], однако наиболее интересным представляется случай $n \to \infty$. Наилучшая верхняя оценка при растущем n была доказана в работе [14] и выглядит следующим образом (см. также [15]):

$$\chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n, \quad n \to \infty.$$

Что касается нижних оценок, то при помощи линейно-алгебраического метода в классической работе [16] в 1981 году была получена оценка:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.207\ldots + o(1))^n, \quad n \to \infty.$$

Наилучшая же нижняя оценка при $n \to \infty$ была не так доказана в работе [17]:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.239\ldots + o(1))^n, n \to \infty.$$

Исходная задача обросла большим количеством обобщений, в частности, указанная проблема имеет смысл для произвольных метрических пространств (см. [18–23]). Упомянем также задачу о хроматическом числе сферы $\chi(S^n)$, которая формулируется ровно так же, как проблема Нельсона–Эрдеша–Хадвигера, но вместо всего пространства рассматриваются точки n-мерной сферы (см. [24–28]). Наконец, довольно популярным является вопрос: чему равно минимальное количество цветов $\chi(\mathbb{R}^n; l_1, \ldots l_m)$, в которые можно так покрасить точки пространства, чтобы расстояние между любыми двумя точками одного цвета не лежало во множестве $\{l_1, \ldots, l_m\}$ (см. [4], [6], [29–31])?

Наша основная задача будет близка к описанной выше. А именно, для $0 < a < 1 < b < \sqrt{2}$ определим величину $\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n)$ как минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить точки пространства, чтобы никакие три точки не образовывали равнобедренный треугольник с длинами боковых сторон 1 и длиной основания в пределах от a до b. Данную величину называют хроматическим числом пространства с запрещенными одноцветными треугольниками. Она изучалась в недавних работах [32–35] и частично освещалась в нашем предыдущем исследовании [36]. Нас будут интересовать в основном нижние оценки величины $\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n)$.

В следующем разделе мы укажем имеющиеся результаты касательно исследуемой величины и приведем формулировки полученных нами результатов, а также общий план их доказательства. В разделе 3 мы покажем, как соотносятся наши результатами с наилучшими известными на настоящий момент границами.

2. Формулировки основных результатов

Итак, приведем наилучшие имеющиеся на текущий момент оценки и обсудим основные идеи их доказательства.

Теорема 8. *Пусть* $0 < a < 1 < b < \sqrt{2},\ \ 0 < \kappa < 1/2,\ \ 0 < \gamma < \kappa,$

$$\alpha = \kappa - b^2(\kappa - \gamma),\ \ \beta = \kappa - a^2(\kappa - \gamma),\ \ r = \frac{\alpha(\kappa - \alpha)}{1 + 2(\alpha - \kappa)}.$$

При $\alpha > 0$ *и* $x \in [\beta - \kappa + \alpha + r, \alpha + r]$ *положим*

$$\begin{gathered}
C_1(\alpha) = (\alpha + 2r)^{\alpha+2r}(\alpha + r)^{-\alpha-r}r^{-r}(1 - \alpha - 2r)^{1-\alpha-2r}\times \\
\times(\kappa - \alpha - r)^{-\kappa+\alpha+r}(1 - \kappa - r)^{-1+\kappa+r}, \\
C_2(x, \alpha) = (\alpha + r)^{\alpha+r}x^{-x}(\alpha + r - x)^{2(-\alpha-r+x)}r^r(x - \alpha)^{-x+\alpha}, \\
C_3(x, \alpha, \beta) = (\kappa - \alpha - r)^{\kappa-\alpha-r}(\beta - x)^{-\beta+x}\times \\
\times(\kappa + x - \alpha - \beta - r)^{2(-\kappa-x+\alpha+\beta+r)}\times \\
\times(1 - \kappa - r)^{1-\kappa-r}(1 + \alpha + \beta - x - 2\kappa)^{-1-\alpha-\beta+x+2\kappa}, \\
\lambda(\alpha, \beta) = \max_x C_2(x, \alpha) \cdot C_3(x, \alpha, \beta).
\end{gathered}$$

Тогда

$$\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n) \geqslant \left(\frac{C_1(\alpha)}{\lambda(\alpha, \beta)(\kappa - \gamma)^{-\kappa+\gamma}(1 + \gamma - \kappa)^{-1-\gamma+\kappa}} + o(1)\right)^n.$$

Теорема 9. *Пусть* $0 < a < 1 < b < \sqrt{2},\ \ 0 < \kappa < 1/2,\ \ 0 < \gamma < \kappa,$

$$\alpha = \kappa - b^2(\kappa - \gamma),\ \ \beta = \kappa - a^2(\kappa - \gamma),\ \ r = \frac{\alpha(\kappa - \alpha)}{1 + 2(\alpha - \kappa)}.$$

Пусть также $\alpha > 0$ *и* $x \in [\beta - \kappa + \alpha + r, \alpha + r]$. *Положим*

$$\delta = \left[\frac{\kappa - \gamma}{\gamma - \alpha}\right], \;\; p = \frac{\kappa - \gamma}{\delta}.$$

Допустим, $p > \beta - \gamma$. *Тогда*

$$\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n) \geqslant \left(\frac{C_1(\alpha)p^p(1-p)^{1-p}}{\lambda(\alpha,\beta)} + o(1)\right)^n,$$

где функции $C_1(\alpha)$ *и* $\lambda(\alpha,\beta)$ *определены в формулировке предыдущей теоремы.*

Теорема 10. *Пусть* $0 < a < 1 < b < \sqrt{2}$, $0 < \kappa < 1/2$, $0 < \gamma < \kappa$, $\kappa - \frac{\kappa}{b^2} < \gamma < \kappa$,

$$\alpha = \kappa - b^2(\kappa - \gamma), \;\; \beta = \kappa - a^2(\kappa - \gamma).$$

Положим

$$\delta = \left[\frac{\kappa - \gamma}{\beta - \gamma}\right].$$

Зафиксируем $i \in \{1, \ldots, \delta\}$ *и рассмотрим*

$$p = \frac{\kappa - \gamma}{i}, \;\; \alpha' = \max\{\alpha, \gamma - p\}, \;\; r = \frac{\alpha'(\kappa - \alpha')}{1 + 2(\alpha' - \kappa)}.$$

Пусть $y \in [\beta, \kappa]$, $x \in [y - \kappa + \alpha' + r, \alpha' + r]$. *Тогда*

$$\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n) \geqslant \left(\frac{C_1(\alpha')p^p(1-p)^{1-p}}{\lambda(\alpha',y)} + o(1)\right)^n,$$

где функции $C_1(\alpha')$ *и* $\lambda(\alpha', y)$ *определены в формулировке теоремы 8.*

Обратимся к первой из представленных теорем. Общая идея ее доказательства заключается в следующем. При помощи явных построений получают совокупность $\mathcal{M}(0,1)$, состоящую из $(0,1)$-векторов (то есть векторов с координатами, равными 0 или 1), у которых попарные скалярные произведения лежат в заданном отрезке. Пусть $M(0,1) = |\mathcal{M}(0,1)|$. На следующем шаге линейно-алгебраическим методом оценивается максимальный размер $D(0,1)$ подсовокупности $\mathcal{D}(0,1) \subset \mathcal{M}(0,1)$, в которой запрещено ровно одно скалярное произведение p. На последнем этапе при помощи этих двух оценок и простых геометрических соображений выводится, что

$$\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n) \geqslant \frac{M(0,1)}{3D(0,1)}.$$

Следующие теоремы представляют собой некоторое усложнение исходной техники.

Наша основная идея заключается в том, чтобы на первом и втором этапах использовать не $(0,1)$-векторы, а $(-1,0,1)$-векторы, то есть векторы с координатами из множества $\{-1,0,1\}$. Аналогично определениям $D(0,1)$ и $M(0,1)$ вводятся определения величин $D(-1,0,1)$ и $M(-1,0,1)$. При этом оказывается, что

$$\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n) \geqslant \frac{M(-1,0,1)}{3D(-1,0,1)}. \tag{1}$$

Конечно, почти всегда $M(-1,0,1) > M(0,1)$, остается добиться того, чтобы величина $D(-1,0,1)$ была не слишком большой по сравнению с $D(0,1)$. Идея введения $(-1,0,1)$-векторов была впервые успешно применена в работе [17] для усиления нижней оценки хроматического числа пространства $\chi(\mathbb{R}^n)$, именно это послужило мотивацией для применения данных векторов в нашей задаче.

Доказанный нами результат звучит следующим образом.

Теорема 11. *Пусть натуральные числа* k_1, k_{-1}, l *удовлетворяют условию* $0 < l < k_1 + k_{-1} < n/2$ *и пусть разность* $q = k_1 + k_{-1} - l$ *является простым числом.*

Введем следующие обозначения:

$$\gamma = l/n, \quad \kappa_1 = k_1/n, \quad \kappa_{-1} = k_{-1}/n;$$
$$\alpha = \kappa_1 + \kappa_{-1} - b^2(\kappa_1 + \kappa_{-1} - \gamma),$$
$$\beta = \kappa_1 + \kappa_{-1} - a^2(\kappa_1 + \kappa_{-1} - \gamma);$$
$$\bar{\alpha} = \lceil \alpha n \rceil, \quad \bar{\beta} = \lfloor \beta n \rfloor.$$

Пусть, наконец, целые неотрицательные числа

$$r, r_1, r_0, r_{-1}, s, s_1, s_0, s_{-1}, t, t_1, t_0, t_{-1}$$

удовлетворяют соотношениям

$$r + s + t = n, \quad r_1 + r_0 + r_{-1} = r,$$
$$s_1 + s_0 + s_{-1} = s, \quad t_1 + t_0 + t_{-1} = t;$$
$$r_1 + s_1 + t_1 = k_1, \quad r_{-1} + s_{-1} + t_{-1} = k_{-1};$$
$$\max(-2r_1, -2r_{-1}) + \max(0, r_1 - r_{-1} - r_0) +$$
$$\max(0, r_{-1} - r_0 - r_1) + \max(-2s_1, -2s_{-1}) +$$
$$\max(0, s_1 - s_{-1} - s_0) + \max(0, s_{-1} - s_0 - s_1) +$$
$$\max(-2t_1, -2t_{-1}) + \max(0, t_1 - t_{-1} - t_0) +$$
$$\max(0, t_{-1} - t_0 - t_1) \geqslant \bar{\alpha}.$$

Тогда

$$\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n) \geqslant \frac{1}{3 \sum\limits_{(m_1,m_2)\in\mathcal{B}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2}} \times$$
$$\times \left(\frac{C_r^{r_1} C_{r-r_1}^{r_0} C_s^{s_1} C_{s-s_1}^{s_0} C_t^{t_1} C_{t-t_1}^{t_0}}{2 \sum\limits_{\mathcal{A}} \prod\limits_{i=-1}^{1} C_{r_i}^{r_{i,1}} C_{r_i - r_{i,1}}^{r_{i,0}} C_{s_i}^{s_{i,1}} C_{s_i - s_{i,1}}^{s_{i,0}} C_{t_i}^{t_{i,1}} C_{t_i - t_{i,1}}^{t_{i,0}}} - 1 \right),$$

где область суммирования $\mathcal{A}$ *задается условиями*

$$r_{i,j} \geqslant 0; s_{i,j} \geqslant 0; t_{i,j} \geqslant 0; \quad i, j \in \{-1, 0, 1\};$$
$$\sum_i r_{i,j} = r_j, \quad j \in \{-1,0,1\}; \qquad \sum_j r_{i,j} = r_i, \quad i \in \{-1,0,1\};$$
$$\sum_i s_{i,j} = s_j, \quad j \in \{-1,0,1\}; \qquad \sum_j s_{i,j} = s_i, \quad i \in \{-1,0,1\};$$
$$\sum_i t_{i,j} = t_j, \quad j \in \{-1,0,1\}; \qquad \sum_j t_{i,j} = t_i, \quad i \in \{-1,0,1\};$$

$$r_{1,1} - r_{1,-1} - r_{-1,1} + r_{-1,-1} + s_{1,1} - s_{1,-1} - s_{-1,1} + s_{-1,-1} +$$
$$+ t_{1,1} - t_{1,-1} - t_{-1,1} + t_{-1,-1} > \bar{\beta},$$

а область $\mathcal{B}$ *определяется следующим образом:*

$$\mathcal{B} = \{(m_1, m_2) \colon m_1, m_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m_1 + m_2 \leqslant n, m_1 + 2m_2 \leqslant q - 1\}.$$

Предложим небольшое пояснение относительно формулировки данной теоремы. На самом деле величина

$$\sum_{m_1,m_2\in\mathcal{B}} C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2}$$

представляет собой оценку величины $D(-1,0,1)$, а выражение в скобках является оценкой величины $M(-1,0,1)$. Наконец, число 3 в знаменателе возникает из формулы (1), которую, по сути, и представляет наша оценка.

3. Численные результаты

Покажем, как соотносится оценка теоремы 11 с известными на настоящий момент результатами.

Ниже приведены две таблицы с оценками исследуемой величины $\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n)$. По вертикали откладывается параметр a с шагом 0.02, по горизонтали — параметр b с шагом 0.05, в ячейке таблицы записана константа c в основании экспоненты в правой части оценки вида $\chi_{a,b}(\mathbb{R}^n) \geqslant (c+o(1))^n, n \to \infty$. Прочерк означает, что полученная оценка не является экспоненциальной, то есть $c \leqslant 1$.

Таблица 1

Максимум из оценок теорем 8–10

	1.10	1.15	1.2	1.25	1.30	1.35	1.40
0.02	1.053	1.079	1.104	1.129	1.153	1.177	1.200
0.04	1.049	1.075	1.100	1.125	1.149	1.173	1.196
0.06	1.044	1.070	1.095	1.120	1.144	1.168	1.191
0.08	1.038	1.064	1.089	1.114	1.138	1.162	1.185
0.10	1.032	1.057	1.082	1.107	1.131	1.155	1.177
0.12	1.025	1.050	1.075	1.099	1.123	1.147	1.170
0.14	1.020	1.043	1.067	1.091	1.115	1.138	1.161
0.16	1.015	1.036	1.059	1.083	1.106	1.130	1.153
0.18	1.010	1.029	1.051	1.074	1.098	1.121	1.143
0.20	1.006	1.023	1.044	1.066	1.089	1.111	1.134
0.22	1.002	1.018	1.037	1.058	1.080	1.103	1.125
0.24	—	1.013	1.030	1.051	1.072	1.094	1.115
0.26	—	1.009	1.025	1.043	1.064	1.085	1.106
0.28	—	1.004	1.019	1.037	1.056	1.076	1.097
0.30	—	1.001	1.015	1.030	1.049	1.068	1.088
0.32	—	—	1.010	1.025	1.042	1.060	1.080
0.34	—	—	1.005	1.020	1.035	1.053	1.072
0.36	—	—	1.002	1.014	1.030	1.046	1.064
0.38	—	—	1.002	1.009	1.024	1.040	1.057
0.40	—	—	1.002	1.005	1.018	1.034	1.050
0.42	—	—	1.002	1.005	1.013	1.028	1.043
0.44	—	—	1.002	1.005	1.007	1.022	1.037
0.46	—	—	1.002	1.005	1.005	1.016	1.031
0.48	—	—	1.002	1.005	1.005	1.010	1.025
0.50	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.019
0.52	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.012
0.54	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.006
0.56	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.005
0.58	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.005
0.60	—	—	1.002	1.005	1.005	1.005	1.005

В таблице 1 продемонстрирован максимум из оценок теорем 8–10.

В таблице 2 мы привели численные результаты теоремы 11. Жирным шрифтом выделены участки, где новая оценка экспоненциально превосходит результаты теорем 8–10. Оказывается, что новая теорема превосходит предыдущие оценки при малых a и больших b. Также небольшое улучшение имеется в области, где оценки теорем 8–10 близки к 1. Отметим, что имеется большая область значений параметров, при которых новая теорема значительно проигрывает: оценка величины $D(-1,0,1)$ при помощи линейно-алгебраического метода оказалась слишком плохой, и выгоднее в данном случае работать с $(0,1)$-векторами.

Т а б л и ц а 2

Оценка теоремы 11

	1.10	1.15	1.2	1.25	1.30	1.35	1.40
0.02	1.036	1.062	1.088	1.113	1.149	**1.186**	**1.216**
0.04	1.034	1.059	1.085	1.110	1.143	**1.181**	**1.211**
0.06	1.030	1.056	1.081	1.106	1.133	**1.175**	**1.204**
0.08	1.027	1.051	1.077	1.101	1.126	**1.166**	**1.195**
0.10	1.023	1.045	1.070	1.096	1.120	**1.156**	**1.185**
0.12	1.019	1.040	1.064	1.088	1.113	1.145	**1.173**
0.14	1.015	1.034	1.057	1.082	1.105	1.133	1.160
0.16	1.012	1.029	1.051	1.074	1.098	1.121	1.146
0.18	1.008	1.025	1.044	1.067	1.090	1.113	1.136
0.20	1.005	1.020	1.038	1.059	1.082	1.105	1.127
0.22	1.001	1.016	1.032	1.052	1.074	1.094	1.118
0.24	—	1.011	1.027	1.046	1.066	1.089	1.110
0.26	—	1.006	1.022	1.039	1.058	1.081	1.103
0.28	—	1.003	1.017	1.033	1.053	1.071	1.093
0.30	—	1.001	1.014	1.028	1.044	1.066	1.088
0.32	—	—	**1.011**	1.023	1.038	1.058	1.076
0.34	—	—	**1.008**	1.019	1.033	1.053	1.067
0.36	—	—	**1.005**	**1.016**	1.027	1.043	1.061
0.38	—	—	**1.003**	**1.013**	1.023	1.037	1.055
0.40	—	—	1.002	**1.010**	1.018	1.032	1.047
0.42	—	—	—	**1.007**	**1.016**	1.028	1.042
0.44	—	—	—	1.003	**1.013**	**1.025**	1.035
0.46	—	—	—	1.001	**1.007**	**1.021**	1.030
0.48	—	—	—	—	**1.006**	**1.017**	**1.026**
0.50	—	—	—	—	1.004	**1.013**	**1.022**
0.52	—	—	—	—	1.003	**1.010**	**1.017**
0.54	—	—	—	—	1.001	**1.006**	**1.013**
0.56	—	—	—	—	—	1.003	**1.011**
0.58	—	—	—	—	—	1.001	**1.008**
0.60	—	—	—	—	—	—	**1.007**
0.62	—	—	—	—	—	—	1.005
0.64	—	—	—	—	—	—	1.003
0.66	—	—	—	—	—	—	1.002

Литература

1. *Hadwiger H.* Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum // Portugaliae Math. 1944. V. 4. P. 140–144.

2. *Soifer A.* The Mathematical Coloring Book. Springer, 2009.

3. *Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometry. Berlin: Springer, 2005.

4. *Райгородский А.М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи математических наук. 2001. Т. 56, № 1. С. 107–146.

5. *Székely L.A.* Erdős on unit distances and the Szemeredi–Trotter theorems // Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest // J. Bolyai Math. Soc. 2002. V. 11. P. 649–666.

6. *Raigorodskii A. M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory. J. Pach ed. Springer, 2013. P. 429–460.

7. *Raigorodskii A. M.* Combinatorial Geometry and Coding Theory // Fundamenta Informaticae. 2016. V. 145, N 3. P. 359–369.

8. *Frankl P., Kupavskii A.* Erdős–Ko–Rado theorem for $\{0, \pm 1\}$-vectors // Journal of Combinatorial Theory, Series A. 2018. V. 155. P. 157–179.

9. *Frankl P., Kupavskii A.* Intersection theorems for $\{0, \pm 1\}$-vectors and s-cross-intersecting families // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2017. V. 7, N 2. P. 91–109.

10. *Frankl P., Kupavskii A.* A size-sensitive inequality for cross-intersecting families // European Journal of Combinatorics. 2017. V. 62. P. 263–271.

11. *Канель-Белов А.Я., Воронов В.А., Черкашин Д.Д.* О хроматическом числе плоскости // Алгебра и анализ. 2017. Т. 29, № 5. С. 68–89.

12. *Черкашин Д.Д., Райгородский А.М.* О хроматических числах пространств малой размерности // Доклады РАН. 2017. Т. 472, № 1. С. 11–12.

13. *Райгородский А.М., Шабанов Л.Э.* Турановские оценки для дистанционных графов // Доклады РАН. 2017. Т. 475, № 3. С. 254–257.

14. *Larman D.G., Rogers C.A.* The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. 1972. V. 19. P. 1–24.

15. *Просанов Р.И., Райгородский А.М., Сагдеев А.А.* Улучшения теоремы Франкла–Редля и геометрические следствия // Доклады РАН. 2017. Т. 475, № 2. С. 137–139.

16. *Frankl P., Wilson R.* Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. 1981. V. 1. P. 357–368.

17. *Райгородский А.М.* О хроматическом числе пространства // Успехи математических наук. Т. 55, № 2. 2000. С. 147–148.

18. *Benda M., Perles M.* Colorings of metric spaces // Geombinatorics. 2000. V. 9. P. 113–126.

19. *Kang J.-H., Füredi Z.* Distance graphs on $\mathbb{Z}^n$ with l_1-norm // Theoretical computer science. 2004. V. 319, N 1–3. P. 357–366.

20. *Kupavskiy A.* On the chromatic number of $\mathbb{R}^n$ with an arbitrary norm // Discrete Mathematics. 2011. V. 311, N 6. P. 437–440.

21. *Пономаренко Е.И., Райгородский А.М.* Новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространства // Успехи математических наук. 2013. Т. 68, № 5. С. 183–184.

22. *Пономаренко Е.И., Райгородский А.М.* Новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространства с одним и двумя запрещенными расстояниями // Математические заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 84–89.

23. *Пономаренко Е.И., Райгородский А.М.* О хроматическом числе пространства $\mathbb{Q}^n$ // Труды МФТИ. 2012. Т. 4, № 1. С. 127–130.

24. *Lovaśz L.* Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere. // Acta Sci. Math. 1983. V. 45. P. 317–323.

25. *Raigorodskii A.M.* On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$ // Combinatorica. 2012. V. 32, N 1. P. 111–123.

26. *Купавский А.Б.* О раскрасках сфер, вложенных в $\mathbb{R}^n$. // Математический сборник. 2011. Т. 202, № 6. С. 83–110.

27. *Костина О.А., Райгородский А.М.* О нижних оценках хроматического числа сферы // Доклады РАН. 2015. Т. 463, № 6. С. 639.

28. *Костина О.А., Райгородский А.М.* О новых нижних оценках хроматического числа сферы // Труды МФТИ. 2015. Т. 7, № 2. С. 20–26.

29. *Бердников А.В., Райгородский А.М.* О хроматическом числе евклидова пространства с двумя запрещенными расстояниями // Математические заметки. 2014. Т. 96, № 5. С. 790–793.

30. *Бердников А.В.* Оценка хроматического числа евклидова пространства с несколькими запрещенными расстояниями // Математические заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 783–787.

31. *Berdnikov A.V.* Chromatic Number with Several Forbidden Distances in the Space with the l_q-Metric // Journal of Mathematical Sciences. 2017. V. 227, N 4. P. 395–401.

32. *Самиров Д.В., Райгородский А.М.* Хроматические числа пространств с запрещенными одноцветными треугольниками // Математические заметки. 2013. Т. 93, № 1. С. 134–143.

33. *Самиров Д.В., Райгородский А.М.* Новые нижние оценки хроматического числа пространства с запрещенными равнобедренными треугольниками // Итоги науки и техники, Современная математика и ее приложения. 2013. Т. 125. С. 252–268.

34. *Самиров Д.В., Райгородский А.М.* Новые оценки в задаче о хроматическом числе пространства с запрещенными равнобедренными треугольниками // Доклады РАН. 2014. Т. 456, № 3. С. 280–283.

35. *Самиров Д.В., Райгородский А.М.* Об одной задаче, связанной с оптимальной раскраской пространства без одноцветных равнобедренных треугольников // Труды МФТИ. 2015. Т. 7, № 2. С. 39–50.

36. *Бобу А.В., Куприянов А.Э., Райгородский А.М.* О максимальном числе ребер однородного гиперграфа с одним запрещенным пересечением // Доклады РАН. 2015. Т. 473, № 1. С. 11.

37. *Райгородский А.М. Харламова А.А.* О совокупностях $(-1, 0, 1)$-векторов с запретами на величины попарных скалярных произведений // Труды по векторному и тензорному анализу. 2013. Т. 29. С. 130–146.

References

1. *Hadwiger H.* Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum. Portugaliae Math. 1944. V. 4. P. 140–144.

2. *Soifer A.* The Mathematical Coloring Book. Springer, 2009.

3. *Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometry. Berlin: Springer, 2005.

4. *Raigorodskii A.M.* Borsuk's problem and the chromatic numbers of some metric spaces. Russian Mathematical Surveys. 2001. V. 56, N 1. P. 103–139.

5. *Székely L.A.* Erdős on unit distances and the Szemeredi–Trotter theorems. Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest. J. Bolyai Math. Soc. 2002. V. 11. P. 649–666.

6. *Raigorodskii A. M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters. Thirty Essays on Geometric Graph Theory. J. Pach ed. Springer. 2013. P. 429–460.
7. *Raigorodskii A.M.* Combinatorial Geometry and Coding Theory. Fundamenta Informaticae. 2016. V. 145, N 3. P. 359–369.
8. *Frankl P., Kupavskii A.* Erdős–Ko–Rado theorem for $\{0, \pm 1\}$-vectors. Journal of Combinatorial Theory, Series A. 2018. V. 155. P. 157–179.
9. *Frankl P., Kupavskii A.* Intersection theorems for $\{0, \pm 1\}$-vectors and s-cross-intersecting families. Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2017. V. 7, N 2. P. 91–109.
10. *Frankl P., Kupavskii A.* A size-sensitive inequality for cross-intersecting families. European Journal of Combinatorics. 2017. V. 62. P. 263-271.
11. *Kanel-Belov A.Ya., Voronov V.A., Cherkashin D.D.* On the chromatic number of plane layer. St. Petersburg Math. J. 2018. V. 29., N 5. P. 761–775.
12. *Cherkashin D.D., Raigorodskii A.M.* On the chromatic numbers of low-dimensional spaces. Doklady Mathematics. 2017. V. 95, N 1. P. 5–6.
13. *Shabanov L.E., Raigorodskii A.M.* Turán-type bounds for distance graphs. Doklady Mathematics. 2017. V. 96, N 1. P. 351–353.
14. *Larman D.G., Rogers C.A.* The realization of distances within sets in Euclidean space. Mathematika. 1972. V. 19. P. 1–24.
15. *Prosanov R.I., Raigorodskii A.M., Sagdeev A.A.* Improvements of the Frankl–Rödl theorem and geometric consequences. Doklady Mathematics. 2017. V. 96, N 1. P. 336–338.
16. *Frankl P., Wilson R.* Intersection theorems with geometric consequences. Combinatorica. 1981. V. 1. P. 357–368.
17. *Raigorodskii A.M.* On the chromatic number of a space. Russian Mathematical Surveys. 2000. V. 55, N 2. P. 351–352.
18. *Benda M., Perles M.* Colorings of metric spaces. Geombinatorics. 2000. V. 9. P. 113–126.
19. *Kang J.-H., Füredi Z.* Distance graphs on $\mathbb{Z}^n$ with l_1-norm. Theoretical computer science. V. 319, N 1–3. 2004. P. 357–366.
20. *Kupavskiy A.* On the chromatic number of $\mathbb{R}^n$ with an arbitrary norm. Discrete Mathematics. V. 311, N 6. 2011. P. 437–440.
21. *Ponomarenko E.I., Raigorodskii A.M.* A new lower bound for the chromatic number of the rational space. Russian Mathematical Surveys. 2013. V. 68, N 5. P. 960–962.
22. *Ponomarenko E.I., Raigorodskii A.M.* New lower bound for the chromatic number of a rational space with one and two forbidden distances. Mathematical Notes. 2015. V. 97, N 1–2. P. 249–254.
23. *Ponomarenko E.I., Raigorodskii A.M.* On the chromatic number of the space $\mathbb{Q}^n$. Trudy Mosk. Fiz. Tekhn. Inst. 2012. V. 4, N 1. P. 127–130. (in Russian)
24. *Lovaśz L.* Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere. Acta Sci. Math. 1983. V. 45. P. 317–323.
25. *Raigorodskii A.M.* On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$. Combinatorica. 2012. V. 32, N 1. P. 111–123.
26. *Kupavskii A.B.* On the colouring of spheres embedded in $\mathbb{R}^n$. Sbornik: Mathematics. 2011. V. 202, N 6. P. 859–886.
27. *Kostina O.A., Raigorodskii A.M.* On lower bounds for the chromatic number of sphere. Doklady Mathematics. 2015. V. 92, N 6. P. 500–502.
28. *Kostina O.A., Raigorodskii A.M.* On the new lower bounds of the chromatic number of sphere. Trudy Mosk. Fiz. Tekhn. Inst. 2015. V. 7, N 2. P. 20–26. (in Russian)

29. *Berdnikov A.V., Raigorodskii A.M.* On the chromatic number of Euclidean space with two forbidden distances. Mathematical Notes. V. 96, N 5–6. 2014. P. 827–830.

30. *Berdnikov A.V.* Estimate for the chromatic number of Euclidean space with several forbidden distances. Mathematical Notes. V. 99, N 5–6. 2016. P. 774–778.

31. *Berdnikov A.V.* Chromatic number with several forbidden distances in the space with the l_q-metric. Journal of Mathematical Sciences. 2017. V. 227, N 4. P. 395–401.

32. *Samirov D.V., Raigorodskii A.M.* Chromatic numbers of spaces with forbidden monochromatic triangles. Mathematical Notes. 2013. V. 93, N 1–2. P. 163–171.

33. *Samirov D.V., Raigorodskii A.M.* New lower bounds for the chromatic Number of a space with forbidden isosceles triangles. Itogi nauki i tekhniki. 2013. V. 125. P. 252–268. (in Russian)

34. *Samirov D.V., Raigorodskii A.M.* New bounds for the chromatic number of a space with forbidden isosceles triangles. Doklady Mathematics. 2014. V. 89, N 3. P. 313–316.

35. *Samirov D.V., Raigorodskii A.M.* On colorings with forbidden isosceles triangles in Euclidean spaces. Trudy Mosk. Fiz. Tekhn. Inst. 2015. V. 7, N 2. P. 39–50. (in Russian)

36. *Bobu A.V., Kupriianov A.E., Raigorodskii A.M.* On the maximal number of edges in a uniform hypergraph with one forbidden intersection. Doklady Mathematics. 2015. V. 92, N 1. P. 401–403.

37. *Raigorodskii A.M., Kharlamova A.A.* On sets of $(-1, 0, 1)$-vectors with forbidden pairwise scalar products. Trudy po vektornomu i tenzornomu analizu. 2013. V. 29. P. 130–146. (in Russian)

Поступила в редакцию 29.11.2018