

УДК 51-73

В. С. Булыгин

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Кумулянтный анализ преобразования комплексного сигнала в линейной физической системе

Рассмотрен метод нахождения выходного сигнала, определяемого свёрткой входного сигнала и функции Грина физической системы, в виде ряда типа Грама–Шарлье, коэффициенты которого выражаются через сумму кумулянтов входного сигнала и кумулянтов функции Грина. Получено выражение для минимальной длительности выходного сигнала, определяемого свойствами функции Грина.

Ключевые слова: кумулянт, полиномы Эрмита, ряд Грама–Шарлье, функция Грина.

V. S. Bulygin

Moscow Institute of Physics and Technology

Cumulant analysis transforms of a complex signal in the linear physical system

The method for finding the output signal determined by the convolution of an entrance signal and the Green function of a physical system in the Gram-Charlier form whose coefficients are expressed by the sum of an entrance signal cumulants and Green function cumulants is considered. The expression for a minimum duration of the output signal determined by the properties of the Green function is obtained.

Key words: cumulant, Hermite polynoms, Gram–Charlier series, Green function.

1. Введение

Во многих физических задачах требуется определить изменение характеристик сигнала (например, оптического импульса, электронного или ионного пучка и т. д.) после его взаимодействия с физической системой. Свёртка функции Грина системы с входным сигналом позволяет определить выходной сигнал полностью, однако вычисление соответствующих интегралов не всегда возможно. Используемый подход является развитием нашей работы [1], основанной на применении некоторого обобщения известного в математической статистике кумулянтного анализа [2,3]. Кумулянты определяются через производные от фурье-преобразований или вычисляются через моменты соответствующих функции, их вычисление является математически более простой задачей, чем вычисление интеграла свёртки. При этом кумулянты результирующего сигнала находятся сложением соответствующих кумулянтов входного сигнала и функции Грина физической системы, по этим суммарным кумулянтам с помощью обобщения ряда Грама–Шарлье может быть восстановлена временная зависимость сигнала после его взаимодействия с физической системой.

2. Комплекснозначный сигнал, взаимодействующий с линейной физической системой

Рассмотрим линейную и инвариантную к сдвигу во времени физическую систему с функцией Грина $G(t)$ (в общем случае — комплекснозначной).

Сигналы: $u_0(t)$ — до взаимодействия с рассматриваемой системой и $u(t)$ — после взаимодействия будут связаны в этом случае свёрткой

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau u_0(\tau)G(t - \tau). \quad (1)$$

Для сигнала, преобразованного по Фурье:

$$\tilde{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} u(t) \quad (2)$$

из (1), поскольку фурье-преобразование свёртки равно произведению фурье-преобразований свёртываемых функций [4, форм. 1.42], имеем

$$\tilde{u}(\omega) = \tilde{u}_0(\omega) \cdot \tilde{G}(\omega), \quad (3)$$

где $\tilde{u}_0(\omega)$ и $\tilde{G}(\omega)$ — преобразования Фурье исходного сигнала $u(t)$ и функции Грина $G(t)$ соответственно.

Если исходный сигнал задан в комплексной форме с несущей частотой ω_0 :

$$u_0(t) = a_0(t) \cdot e^{-i\omega_0 t}, \quad (4)$$

то результирующий сигнал также может быть представлен в такой же форме:

$$u(t) = a(t) \cdot e^{-i\omega_0 t}. \quad (5)$$

Действительно, так как в этом случае

$$\tilde{u}_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot a_0(t) e^{-i\omega_0 t} \cdot e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot a_0(t) \cdot e^{i(\omega - \omega_0)t} = \tilde{a}_0(\omega - \omega_0),$$

то, совершая обратное преобразование Фурье выражения (3), получаем

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cdot e^{-i\omega t} \cdot \tilde{a}_0(\omega - \omega_0) \cdot \tilde{G}(\omega) = [\omega \rightarrow \omega + \omega_0] = \\ &= e^{-i\omega_0 t} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cdot e^{-i\omega t} \cdot \tilde{a}_0(\omega) \cdot \tilde{G}(\omega + \omega_0), \end{aligned} \quad (6)$$

откуда из сравнения с (5) следует, что

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cdot e^{-i\omega t} \cdot \tilde{a}_0(\omega) \cdot \tilde{G}(\omega + \omega_0).$$

Таким образом, если входной сигнал задан в форме (4), то выходной сигнал действительно имеет вид (5). При этом, как это видно из (6), его комплексная амплитуда $a(t)$ имеет фурье-преобразование

$$\tilde{a}(\omega) = \tilde{a}_0(\omega) \cdot \tilde{G}(\omega + \omega_0) \quad (7)$$

и, следовательно, выражается через свёртку исходной комплексной амплитуды $a_0(t)$ с преобразованной функцией Грина $G_0(t)$:

$$a(t) = a_0(t) * G_0(t), \quad (8)$$

где обозначено

$$G_0(t) = G(t) \cdot e^{i\omega_0 t}, \quad (9)$$

поскольку

$$\tilde{G}_0(\omega) = \tilde{G}(\omega + \omega_0).$$

Итак, если сигналы заданы в форме (4) и (5), то свёртка сигналов заменяется свёрткой их комплексных амплитуд с преобразованной функцией Грина.

Не ограничивая общности, будем рассматривать в дальнейшем сигналы вида (4) и (5), т. к. их энергии одинаковы, поскольку $|u(t)|^2 = |a(t)|^2$, а положив $\omega_0 = 0$ мы возвращаемся от рассмотрения комплексных амплитуд $a(t)$ к рассмотрению сигналов $u(t)$ произвольного вида.

Определим кумулянты комплексной амплитуды $a(t)$ выражением

$$\varkappa_n = (-i)^n \left[\frac{d^n}{d\omega^n} \ln \tilde{a}(\omega) \right]_{\omega=0} \quad \text{при } n \geq 0. \quad (10)$$

Подставив сюда выражение (7), получаем связь между кумулянтами комплексных амплитуд сигналов до и после взаимодействия с физической системой:

$$\begin{aligned} \varkappa_n &= (-i)^n \left[\frac{d^n}{d\omega^n} \ln \tilde{a}_0(\omega) \tilde{G}(\omega + \omega_0) \right]_{\omega=0} = \\ &= (-i)^n \left[\frac{d^n}{d\omega^n} \ln \tilde{a}_0(\omega) \right]_{\omega=0} + (-i)^n \left[\frac{d^n}{d\omega^n} \ln \tilde{G}(\omega + \omega_0) \right]_{\omega=0} = \\ &= (-i)^n \left[\frac{d^n}{d\omega^n} \ln \tilde{a}_0(\omega) \right]_{\omega=0} + (-i)^n \left[\frac{d^n}{d\omega^n} \ln \tilde{G}(\omega) \right]_{\omega=\omega_0} = \\ &= \varkappa_n^{(0)} + \varkappa_n^{(G)}, \end{aligned}$$

где $\varkappa_n^{(0)}$ — кумулянты амплитуды $a_0(t)$, определяемые аналогично (10):

$$\varkappa_n^{(0)} = (-i)^n \left[\frac{d^n}{d\omega^n} \ln \tilde{a}_0(\omega) \right]_{\omega=0}, \quad (11)$$

и $\varkappa_n^{(G)}$ — кумулянты функции Грина:

$$\varkappa_n^{(G)} = (-i)^n \left[\frac{d^n}{d\omega^n} \ln \tilde{G}(\omega) \right]_{\omega=\omega_0}. \quad (12)$$

Таким образом, кумулянты функции $a(t)$ после взаимодействия с физической системой, имеющей функцию Грина $G(t)$, найдутся простым сложением кумулянтов функции $a_0(t)$ до взаимодействия с системой и соответствующих кумулянтов функции Грина G :

$$\varkappa_n = \varkappa_n^{(0)} + \varkappa_n^{(G)} \quad \text{при } n \geq 1, \quad (13)$$

а при $n = 0$ с помощью (7) получаем

$$\varkappa_0 = \varkappa_0^{(0)} + \varkappa_0^{(G)} = \ln \tilde{a}_0(0) + \ln \tilde{G}(\omega_0) = \ln [\tilde{a}_0(0) \cdot \tilde{G}(\omega_0)],$$

или, с учётом (9),

$$m_0 = e^{\varkappa_0} = \tilde{a}_0(0)\tilde{G}(\omega_0) = \tilde{a}_0(0)\tilde{G}_0(0) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt a(t)e^{i\omega t} \right]_{\omega=0} \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt G_0(t)e^{i\omega t} \right]_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt G_0(t) = m_0^{(0)} \cdot m_0^{(G)}, \quad (14)$$

где введены моменты комплексной амплитуды $a(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} dt t^n a(t) = (-i)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \int_{-\infty}^{\infty} dt a(t)e^{i\omega t} \right]_{\omega=0} = \\ = (-i)^n \left. \frac{d^n \tilde{a}(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0}, \quad (15)$$

моменты $m_n^{(0)}$ комплексной амплитуды $a_0(t)$:

$$m_n^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} dt t^n a_0(t) = (-i)^n \left. \frac{d^n \tilde{a}_0(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0},$$

и моменты функции Грина $G(t)$ (см. (9)):

$$m_n^{(G)} = \int_{-\infty}^{\infty} dt t^n G_0(t) = (-i)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \int_{-\infty}^{\infty} dt G_0(t)e^{i\omega t} \right]_{\omega=0} = \\ = (-i)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \int_{-\infty}^{\infty} dt G(t)e^{i(\omega+\omega_0)t} \right]_{\omega=0} = (-i)^n \left. \frac{d^n \tilde{G}(\omega + \omega_0)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0},$$

то есть

$$m_n^{(G)} = (-i)^n \left. \frac{d^n \tilde{G}(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=\omega_0}. \quad (16)$$

При $n = 1$ из (10) с учётом (15) находим

$$\varkappa_1 = -i \left[\frac{d}{d\omega} \ln \tilde{a}(\omega) \right]_{\omega=0} = \left[\frac{1}{\tilde{a}(\omega)} \cdot (-i) \frac{d\tilde{a}}{d\omega} \right]_{\omega=0} = \frac{m_1}{m_0}, \quad (17)$$

и, согласно (13),

$$\varkappa_1 = \varkappa_1^{(0)} + \varkappa_1^{(G)}, \quad (18)$$

и при $n = 2$ с помощью (10) получаем

$$\varkappa_2 = (-i)^2 \left[\frac{d^2}{d\omega^2} \ln \tilde{a}(\omega) \right]_{\omega=0} = (-i)^2 \left[\frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{\tilde{a}} \frac{d\tilde{a}}{d\omega} \right) \right]_{\omega=0} = \\ = (-i)^2 \left[\frac{1}{\tilde{a}} \frac{d^2 \tilde{a}}{d\omega^2} - \frac{1}{\tilde{a}^2} \left(\frac{d\tilde{a}}{d\omega} \right)^2 \right]_{\omega=0} = \left[\frac{1}{\tilde{a}} \cdot (-i)^2 \frac{d^2 \tilde{a}}{d\omega^2} - \frac{1}{\tilde{a}^2} \left(-i \frac{d\tilde{a}}{d\omega} \right)^2 \right]_{\omega=0} = \\ = \frac{m_2}{m_0} - \left(\frac{m_1}{m_0} \right)^2 = \mu_2 = \sigma^2, \quad (19)$$

где введено обозначение для центральных моментов:

$$\mu_n = \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(t - \frac{m_1}{m_0} \right)^n a(t) = \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt (t - \varkappa_1)^n a(t) \quad (20)$$

и $\sigma^2 = \mu_2$ — среднеквадратичное отклонение комплексной амплитуды $a(t)$. Таким образом, при $n = 2$ из (13) с помощью (19) находим

$$\varkappa_2 = \mu_2 = \sigma^2 = \varkappa_2^{(0)} + \varkappa_2^{(G)} = \sigma_0^2 + \sigma_G^2. \quad (21)$$

Таким же образом могут быть введены нормированные центральные моменты:

$$\bar{\mu}_n = \frac{1}{m_0 \sigma^n} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(t - \frac{m_1}{m_0} \right)^n a(t) = \frac{1}{m_0 \sigma^n} \int_{-\infty}^{\infty} dt (t - \varkappa_1)^n a(t). \quad (22)$$

Отметим, что кумулянты некоторой функции могут быть выражены через её центральные моменты, для чего из [5] может быть получено следующее выражение:

$$\varkappa_n = n! \sum_{r=1}^{r_m} \frac{(-1)^j (j-1)}{j_1! \dots j_r!} \left(\frac{\mu_{l_1}}{l_1!} \right)^{j_1} \dots \left(\frac{\mu_{l_r}}{l_r!} \right)^{j_r}, \quad j = j_1 + \dots + j_r, \quad (23)$$

где

$$r_m = \left[\sqrt{2n + \frac{9}{4}} - \frac{3}{2} \right],$$

здесь [...] означает взятие целой части числа, а внутреннее суммирование в (23) распространяется на все $j_i > 0$ и все различные $l_i > l_{i+1}$, удовлетворяющие условию

$$l_1 j_1 + \dots + l_i j_i + \dots + l_r j_r = n, \quad j_1 + \dots + j_r = j.$$

Эти выражения могут оказаться полезными в случае, если вычисление фурье-преобразования сигнала для определения его кумулянтов окажется затруднительным; например, если сигнал задан таблично.

Приведём для справки выражения для нескольких первых кумулянтов, полученные с помощью (23):

$$\begin{aligned} \varkappa_2 &= \mu_2 = \sigma^2, & \varkappa_3 &= \mu_3, & \varkappa_4 &= \mu_4 - 3\mu_2^2, & \varkappa_5 &= \mu_5 - 10\mu_3\mu_2, \\ \varkappa_6 &= \mu_6 - 15\mu_4\mu_2 - 10\mu_3^2 + 30\mu_2^3, \\ \varkappa_7 &= \mu_7 - 21\mu_5\mu_2 - 35\mu_4\mu_3 + 210\mu_3\mu_2^2, \\ \varkappa_8 &= \mu_8 - 28\mu_6\mu_2 - 56\mu_5\mu_3 - 35\mu_4^2 + 420\mu_4\mu_2^2 + 560\mu_3^2\mu_2 - 630\mu_2^4. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, как это следует из выражений (13) и (14), по кумулянтам входного сигнала $a_0(t)$ и кумулянтам функции Грина $G(t)$ легко определяются кумулянты выходного сигнала $a(t)$, что позволяет получить информацию о временном поведении выходного сигнала $a(t)$. Разложим $a(t)$ по полиномам Эрмита с пока неизвестными сдвигом по оси времени α и масштабным коэффициентом β :

$$a(t) = \frac{m_0}{\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\tau^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} He_n(\tau), \quad \tau = \frac{t - \alpha}{\beta}, \quad (25)$$

где полиномы Эрмита определяются выражением [6, с. 62]:

$$\begin{aligned} He_n(\tau) &= (-1)^n e^{\tau^2/2} \frac{d^n}{d\tau^n} e^{-\tau^2/2} = \sum_{k=0}^{k \leq n/2} (-1)^k \cdot \frac{(n-2k+1)2k}{2^k \cdot k!} \tau^{n-2k} = \\ &= \tau^n - \frac{(n-1)n}{2^1 \cdot 1!} \tau^{n-2} + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{2^2 \cdot 2!} \tau^{n-4} - \\ &- \frac{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}{2^3 \cdot 3!} \tau^{n-6} + \dots, \end{aligned} \quad (26)$$

здесь

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} = \prod_{k=1}^n (\alpha + k - 1) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n - 1)$$

— символ Похгаммера, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Умножим обе части выражения (25) на $He_m(\tau)$ и проинтегрируем по всему временному промежутку ($dt = \beta d\tau$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) \cdot He_m\left(\frac{t - \alpha}{\beta}\right) = \frac{m_0}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-\tau^2/2} He_m(\tau) He_n(\tau),$$

или, поскольку полиномы Эрмита являются ортогональными относительно веса $e^{-\tau^2/2}$ [6, с. 66]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-\tau^2/2} He_m(\tau) He_n(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ \sqrt{2\pi n!} & \text{при } m = n, \end{cases}$$

то получаем

$$c_n = \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) He_n\left(\frac{t - \alpha}{\beta}\right). \quad (27)$$

Первые три полинома Эрмита, согласно (26), имеют вид

$$He_0(\tau) = 1, \quad He_1(\tau) = \tau, \quad He_2(\tau) = \tau^2 - 1,$$

поэтому, с учётом (15)

$$c_0 = \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) = 1, \quad c_1 = \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) \left(\frac{t - \alpha}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{m_1}{m_0} - \alpha\right)$$

и $c_1 = 0$ при выборе сдвига $\alpha = \frac{m_1}{m_0} = \varkappa_1$, см. (17). Тогда, с учётом (15) и (19),

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) \left[\left(\frac{t - \frac{m_1}{m_0}}{\beta}\right)^2 - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) \left[\frac{t^2 - 2\frac{m_1}{m_0}t + \left(\frac{m_1}{m_0}\right)^2}{\beta^2} - 1 \right] = \\ &= \frac{m_2 - 2\frac{m_1}{m_0}m_1 + \left(\frac{m_1}{m_0}\right)^2 m_0}{m_0 \beta^2} - 1 = \frac{\left[\frac{m_2}{m_0} - \left(\frac{m_1}{m_0}\right)^2 \right] - \beta^2}{\beta^2} = \frac{\varkappa_2 - \beta^2}{\beta^2} \end{aligned}$$

и $c_2 = 0$ при выборе масштаба $\beta = \sqrt{\varkappa_2} = \sqrt{\mu_2} = \sigma$. Таким образом, при данном выборе сдвига и масштаба разложение (25) принимает вид

$$a(t) = \frac{m_0}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\tau^2/2} \left(1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{c_n}{n!} He_n(\tau) \right); \quad \tau = \frac{t - \varkappa_1}{\sigma}, \quad (28)$$

где, согласно (27) и (26), коэффициенты c_n при $n \geq 3$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) He_n \left(\frac{t - \varkappa_1}{\sigma} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{k \leq n/2} (-1)^k \frac{(n - 2k + 1)_{2k}}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{1}{m_0 \sigma^{n-2k}} \int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) (t - \varkappa_1)^{n-2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{k \leq n/2} (-1)^k \frac{(n - 2k + 1)_{2k}}{2^k \cdot k!} \cdot \bar{\mu}_{n-2k}, \end{aligned} \quad (29)$$

здесь введено обозначение для нормированных центральных моментов $\bar{\mu}_n = \mu_n / \mu_2^{n/2} = \mu_n / \sigma^n$, которые могут быть выражены через нормированные кумулянты $\gamma_n = \varkappa_n / \varkappa_2^{n/2} = \varkappa_n / \mu_2^{n/2} = \varkappa_n / \sigma^n$ с помощью (24):

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_3 &= \gamma_3, \quad \bar{\mu}_4 = \gamma_4 + 3, \quad \bar{\mu}_5 = \gamma_5 + 10\gamma_3, \\ \bar{\mu}_6 &= \gamma_6 + 15\gamma_4 + 10\gamma_3^2 + 15, \\ \bar{\mu}_7 &= \gamma_7 + 21\gamma_5 + 5 + 35\gamma_3\gamma_4 + 105\gamma_3, \\ \bar{\mu}_8 &= \gamma_8 + 28\gamma_6 + 56\gamma_5\gamma_3 + 35\gamma_4^2 + 210\gamma_4 + 280\gamma_3^2 + 105, \end{aligned}$$

и ряд (28) может быть приведён к виду

$$\begin{aligned} a(t) &= m_0 \frac{e^{-\tau^2/2}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \left[1 + \frac{\gamma_3}{3!} He_3(\tau) + \frac{\gamma_4}{4!} He_4(\tau) + \frac{\gamma_5}{5!} He_5(\tau) + \frac{\gamma_6 + 10\gamma_3^2}{6!} He_6(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_7 + 35\gamma_3\gamma_4}{7!} He_7(\tau) + \frac{\gamma_8 + 56\gamma_5\gamma_3 + 35\gamma_4^2}{8!} He_8(\tau) + \dots \right], \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\tau = \frac{t - \varkappa_1}{\sqrt{\varkappa_2}} = \frac{t - \varkappa_1}{\sigma}$$

и приведённые в (30) полиномы Эрмита имеют вид

$$\begin{aligned} He_3(\tau) &= \tau^3 - 3\tau, \\ He_4(\tau) &= \tau^4 - 6\tau^2 + 3, \\ He_5(\tau) &= \tau^5 - 10\tau^3 + 15\tau, \\ He_6(\tau) &= \tau^6 - 15\tau^4 + 45\tau^2 - 15, \\ He_7(\tau) &= \tau^7 - 21\tau^5 + 105\tau^3 - 105\tau, \\ He_8(\tau) &= \tau^8 - 28\tau^6 + 210\tau^4 - 420\tau^2 + 105. \end{aligned}$$

Выражение (30), определяющее функцию через её нормированные кумулянты, является для данного случая обобщением ряда Грама–Шарлье (или ряда Эджворта, см. [2,3]) на случай комплекснозначных функций с $m_0^{(0)} \neq 1$, $m_0^{(G)} \neq 1$ и $m_0 = m_0^{(0)} \cdot m_0^{(G)} \neq 1$, причём при действительной $a(t)$ первые кумулянты имеют непосредственный смысл: \varkappa_1 — характеризует положение функции $a(t)$ на оси времени, $\sigma = \sqrt{\varkappa_2}$ — характеризует её ширину, γ_3 — асимметрию и γ_4 — эксцесс; при $\gamma_4 > 0$ функция $a(t)$ является в окрестности максимума обычно более острой, а при $\gamma_4 < 0$ — более широкой, чем функция Гаусса. При комплекснозначной $a(t)$, когда её кумулянты также комплексны, их связь с формой $a(t)$ уже не является такой непосредственной; тем не менее из выражения (30) можно непосредственно определить $a(t)$ и затем уже по ней рассчитать все интересующие характеристики.

Приведём вывод аналога ряда Грама–Шарлье, позволяющий более легко запрограммировать получение произвольного количества членов этого ряда.

Получим разложение $\ln \tilde{a}(\omega)$ в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \ln \tilde{a}(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \left[\frac{d^n}{d\omega^n} \ln \tilde{a}(\omega) \right]_{\omega=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varkappa_n}{n!} (i\omega)^n = \\ &= \ln m_0 - i\varkappa_1\omega - \frac{\varkappa_2}{2}\omega^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\varkappa_n}{n!} (i\omega)^n, \end{aligned}$$

где учтено, что согласно (10): $\left[\frac{d^n}{d\omega^n} \ln \tilde{a}(\omega) \right]_{\omega=0} = i^n \varkappa_n$.

Поэтому, с учётом того, что $\varkappa_2 = \sigma^2$

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{a}(\omega) e^{-i\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{\ln \tilde{a}(\omega)} e^{-i\omega t} = \\ &= \frac{m_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-\varkappa_1) - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2} \exp\left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\varkappa_n}{n!} (i\omega)^n\right) = \\ &= \frac{m_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-\varkappa_1) - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2} \left(1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{b_n}{n!} (i\omega)^n\right) = \\ &= \frac{m_0}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-\varkappa_1) - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{b_n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (i\omega)^n e^{-i\omega(t-\varkappa_1) - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2} \right) = \\ &= \frac{m_0}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-\varkappa_1) - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{b_n}{n!} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-\varkappa_1) - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2} \right), \end{aligned}$$

или, поскольку

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\left(-i\omega(t-\varkappa_1) - \frac{\sigma^2}{2}\omega^2\right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} \left(\omega^2 + 2i \frac{t-\varkappa_1}{\sigma^2} \omega\right)\right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} \left(\omega + i \frac{t-\varkappa_1}{\sigma^2}\right)^2 - \frac{(t-\varkappa_1)^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\varkappa_1}{\sigma}\right)^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} \left(\omega + i \frac{t-\varkappa_1}{\sigma^2}\right)^2\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\varkappa_1}{\sigma}\right)^2\right), \end{aligned}$$

то, вводя переменную $\tau = (t - \varkappa_1)/\sigma$, получаем ($dt = \sigma d\tau$) с учётом (26):

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{m_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\tau^2/2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{b_n}{n!} \cdot (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} e^{-\tau^2/2} \right) = \\ &= \frac{m_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\tau^2/2} \left(1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{b_n}{n!} \cdot (-1)^n e^{\tau^2/2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-\tau^2/2} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\tau^2/2} \left(1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{b_n}{\sigma^n \cdot n!} \cdot (-1)^n e^{\tau^2/2} \frac{d^n}{d\tau^n} e^{-\tau^2/2} \right) = \\
&= \frac{m_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\tau^2/2} \left(1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{b_n}{\sigma^n \cdot n!} \cdot He_n(\tau) \right),
\end{aligned}$$

и из сравнения с (28) находим, что

$$c_n = \frac{b_n}{\sigma^n},$$

где b_n — коэффициенты следующего разложения в ряд Тейлора:

$$\exp\left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\varkappa_n}{n!} x^n\right) = 1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n.$$

Программы для нахождения произвольного числа членов обобщённого ряда Грама–Шарлье, написанные в среде программ аналитических вычислений *Maxima* и *Maple*, приведены в Приложении.

3. Изменение временной ширины сигнала в результате взаимодействия с линейной физической системой

Рассмотрим более подробно частный случай, когда в разложении Грама–Шарлье (30) существенны лишь \varkappa_1 и $\varkappa_2 = \sigma^2$ и вкладом членов со старшими нормированными кумулянтами $\gamma_n = \varkappa_n/\sigma^2$ ($n \geq 3$) можно пренебречь. Комплексная амплитуда $a(t)$ сигнала $u(t) = a(t) e^{-i\omega_0 t}$, как это следует из (30), может быть представлена в виде

$$a(t) = \frac{m_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t - \varkappa_1)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (31)$$

Дисперсии сигналов будут в общем случае комплексными числами, поэтому $a(t)$ в предположении действительности \varkappa_1 может быть записана в виде ($\vartheta = t - \varkappa_1$)

$$\begin{aligned}
a(t) &= \frac{m_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{2|\sigma^2|^2} (\mathbf{Re} \sigma^2 - i\mathbf{Im} \sigma^2)\right) = \\
&= \frac{m_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\mathbf{Re} \sigma^2 \cdot \vartheta^2}{2|\sigma^2|^2} (1 - ik)\right) = \\
&= \frac{m_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\mathbf{Re} \sigma^2 \vartheta^2}{2|\sigma^2|^2}\right) \cdot \exp\left(ik \frac{\mathbf{Re} \sigma^2 \vartheta^2}{2|\sigma^2|^2}\right),
\end{aligned}$$

где

$$k = \frac{\mathbf{Im} \sigma^2}{\mathbf{Re} \sigma^2} = \operatorname{tg}(\arg \sigma^2),$$

$k \neq 0$ соответствует частотной модуляции («чирп») — линейному изменению частоты сигнала. При этом $|a(t)|^2$ может быть записан в виде

$$|a(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{m_0}{\sigma} \right|^2 \exp\left(-\frac{\mathbf{Re} \sigma^2 \vartheta^2}{|\sigma^2|^2}\right) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{m_0}{\sigma} \right|^2 \exp\left(-\left(2 \frac{t - \varkappa_1}{T}\right)^2\right),$$

где

$$T = \frac{2|\sigma^2|}{\sqrt{\mathbf{Re} \sigma^2}} \quad (32)$$

— длительность сигнала $|a(t)|^2$ на уровне $1/e$. Дисперсии произвольных комплексных сигналов будут в общем случае тоже комплексными, т. е. зависящими от двух действительных параметров. Дисперсию σ_0 сигнала на входе физической системы представим в виде

$$\sigma_0^2 = \frac{T_0^2}{4(1 - ik_0)} = \frac{T_0^2}{4(1 + k_0^2)} (1 + ik_0), \quad (33)$$

где T_0 — длительность входного сигнала в смысле определения (32), $k_0 = \frac{\text{Im} \sigma_0^2}{\text{Re} \sigma_0^2} = \text{tg}(\arg \sigma_0^2)$. При этом $k_0 \neq 0$ соответствует chirпу (линейному изменению частоты) входного сигнала, когда $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2k_0}{T_0} t$.

3.1. Действительная часть $\text{Re} \kappa_2^{(G)} = \text{Re} \sigma_G^2 \neq 0$

Комплексную дисперсию σ_G функции Грина рассматриваемой физической системы также представим зависящей от двух действительных параметров, а именно:

$$\sigma_G^2 = \frac{T_{\text{inf}}^2}{4} (1 + ik_G), \quad (34)$$

где $k_G = \frac{\text{Im} \sigma_G^2}{\text{Re} \sigma_G^2} = \text{tg}(\arg \sigma_G^2)$, а T_{inf} — как будет показано ниже — является нижней границей длительности сигнала, провозаимодействующего с физической системой; т. е. нижний предел длительности выходного сигнала определяется только свойствами самой физической системы и, с учётом (34) и (12), равняется

$$\begin{aligned} T_{\text{inf}} &= 2\sqrt{\frac{\sigma_G^2}{1 + ik_G}} = 2\sqrt{\frac{\text{Re} \sigma_G^2 + i\text{Im} \sigma_G^2}{1 + i\frac{\text{Im} \sigma_G^2}{\text{Re} \sigma_G^2}}} = 2\sqrt{\text{Re} \sigma_G^2} = \\ &= 2\sqrt{-\text{Re} \left[\frac{d^2}{d\omega^2} \ln \tilde{G}(\omega) \right]_{\omega=\omega_0}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Получим теперь связь между длительностью импульса T_0 до взаимодействия и длительностью импульса T после взаимодействия с физической системой. Так как, согласно (21), второй кумулянт сигнала после взаимодействия $\kappa_2 = \sigma^2$ равен сумме второго кумулянта сигнала до взаимодействия с физической системой (33) и второго кумулянта функции Грина физической системы (34), то

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_0^2 + \sigma_G^2 = \frac{T_0^2}{4(1 + k_0^2)} (1 + ik_0) + \frac{T_{\text{inf}}^2}{4} (1 + ik_G) = \\ &= \frac{T_{\text{inf}}^2}{4(1 + k_0^2)} \left\{ \left[\left(\frac{T_0}{T_{\text{inf}}} \right)^2 + 1 + k_0^2 \right] + i \left[k_0 \left(\frac{T_0}{T_{\text{inf}}} \right)^2 + k_G(1 + k_0^2) \right] \right\}, \end{aligned}$$

откуда, согласно (32):

$$\frac{T(T_0)}{T_{\text{inf}}} = \frac{2|\sigma^2|}{T_{\text{inf}}\sqrt{\text{Re} \sigma^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{T_0}{T_{\text{inf}}} \right)^4 + 2(1 + k_G k_0) \left(\frac{T_0}{T_{\text{inf}}} \right)^2 + (1 + k_G^2)(1 + k_0^2)}{\left(\frac{T_0}{T_{\text{inf}}} \right)^2 + (1 + k_0^2)}}. \quad (36)$$

Параметр k_0 (см. (33)) в выражении (36) является произвольным, поэтому выражение (36) задаёт целое семейство кривых $T(T_0)$. Покажем, что все кривые этого семейства лежат выше $T = T_{\text{inf}}$, для чего найдём огибающие этого семейства. Продифференцировав выражение (36) по k_0 и приравняв производную нулю, найдём, что значения k_0 , соответствующие огибающим семейства (36), удовлетворяют квадратному уравнению:

$$k_G k_0^2 + \left[\left(\frac{T_0}{T_{\text{inf}}} \right)^2 + 1 - k_G^2 \right] k_0 - k_G \left[\left(\frac{T_0}{T_{\text{inf}}} \right)^2 + 1 \right] = 0,$$

откуда получаем

$$k_{01} = k_G, \quad k_{02} = -\frac{1}{k_G} \left[\left(\frac{T_0}{T_{\text{inf}}} \right)^2 + 1 \right].$$

Подставляя в (36) $k_0 = k_{0_1} = k_G$, получаем выражение для верхней огибающей:

$$\frac{T}{T_{\text{inf}}} = \sqrt{\left(\frac{T_0}{T_{\text{inf}}}\right)^2 + 1 + k_G^2}, \quad (37)$$

и, подставив в выражение (36) $k_0 = k_{0_2}$, находим выражение для нижней огибающей:

$$\frac{T}{T_{\text{inf}}} = \sqrt{1 + \frac{k_G^2}{\left(\frac{T_0}{T_{\text{inf}}}\right)^2 + 1}}. \quad (38)$$

Из последнего выражения для нижней огибающей непосредственно видно, что любая кривая $T(T_0)$ семейства (36) расположена выше T_{inf} . Из этого следует: каким бы не был сигнал до взаимодействия с физической системой, его длительность после взаимодействия не может быть короче T_{inf} , где T_{inf} определяется функцией Грина физической системы и задаётся выражением (35).

Зависимости $T(T_0)$ при фиксированном значении $k_G = \sqrt{3}$ изображены на рис. 1.

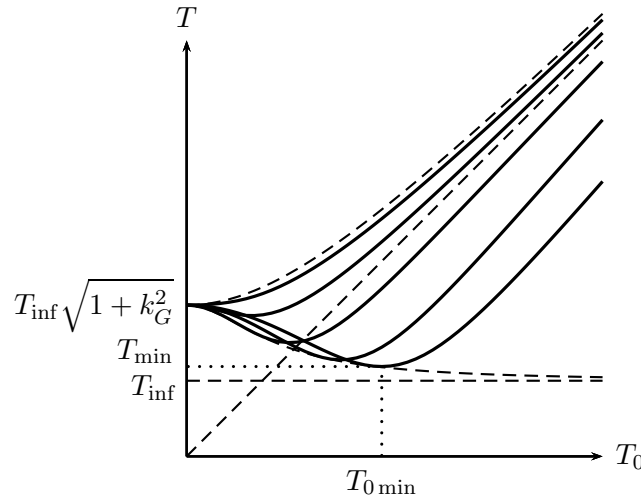


Рис. 1. Связь длительностей сигнала до взаимодействия T_0 и после взаимодействия T с физической системой при $\text{Re } \sigma_G^2 \neq 0$

Все кривые семейства (36) остаются конечными при $T_0 \rightarrow 0$ и выходят из общей точки:

$$T(0) = T_{\text{inf}} \sqrt{1 + k_G^2} = \frac{2 |\sigma_G^2|}{\sqrt{\text{Re } \sigma_G^2}}, \quad (39)$$

которая является длительностью $|G(t)|^2$ в смысле определения (32). При $T_0 \rightarrow \infty$ (т.е. $T_0 \gg T_{\text{inf}}$) длительность выходного сигнала T асимптотически стремится к длительности входного сигнала T_0 , при этом, поскольку согласно (36)

$$\begin{aligned} T &= T_0 \sqrt{\frac{1 + 2(1 + k_G k_0) \left(\frac{T_0}{T_{\text{inf}}}\right)^{-2} + (1 + k_G^2)(1 + k_0^2) \left(\frac{T_0}{T_{\text{inf}}}\right)^{-4}}{1 + (1 + k_0^2) \left(\frac{T_0}{T_{\text{inf}}}\right)^{-2}}} \simeq \\ &\simeq T_0 \left(1 + [2(1 + k_G k_0) - (1 + k_0^2)] \left(\frac{T_0}{T_{\text{inf}}}\right)^{-2} \right) = \\ &= T_0 \left(1 + [(1 + k_G^2) - (k_G + k_0)^2] \left(\frac{T_0}{T_{\text{inf}}}\right)^{-2} \right), \end{aligned}$$

то при выполнении условия

$$|k_0 + k_G| \leq \sqrt{1 + k_G^2} \quad (40)$$

длительность выходного сигнала $T \sim T_0$ остаётся больше T_0 , если же условие (40) не выполнено, то длительность выходного сигнала асимптотически стремится к длительности входного снизу.

Через каждую точку (T, T_0) проходят по две кривые семейства (36), соответствующие двум значениям параметра k_0 входного сигнала, за исключением точек, лежащих на огибающих (38) и (37).

Для нахождения возможных минимумов зависимости (36) продифференцируем подкоренное выражение по $\theta = (T_0/T_{\text{inf}})^2$, что даёт для нахождения θ уравнение

$$\theta^2 + 2(1 + k_0^2)\theta + (1 + k_0^2)[(1 + k_0^2) - (k_0 - k_G)^2] = 0$$

с неотрицательным решением

$$\theta = \sqrt{1 + k_0^2} \left(|k_0 - k_G| - \sqrt{1 + k_0^2} \right),$$

или в исходной переменной

$$T_{0\text{min}} = T_{\text{inf}} \sqrt{\sqrt{1 + k_0^2} \left(|k_0 - k_G| - \sqrt{1 + k_0^2} \right)}. \quad (41)$$

При этом минимум выражения (36) находится подстановкой (41) в (36):

$$T_{\text{min}} = T_{\text{inf}} \sqrt{2|k_0 - k_G| \left(\sqrt{1 + k_0^2} - k_0 \cdot \text{sign}(k_0 - k_G) \right)}. \quad (42)$$

Как следует из (41), если выполняется соотношение

$$|k_0 - k_G| \leq \sqrt{k_0^2 + 1}, \quad (43)$$

то зависимость (36) будет монотонной (минимум (41) отсутствует), а если неравенство (43) не выполняется, то зависимость $T(T_0)$ будет двузначной — двум различным значениям длительности входного сигнала T_0 из интервала $T_0 \in [0, k_G(k_G - 2k_0) - 1]$, при котором длительность выходного сигнала будет меньше $T(0)$, будет соответствовать одно значение длительности выходного сигнала $T(T_0)$.

В любом случае, если длительность выходного сигнала $T(T_0) > T(0)$, где $T(0)$ определяется выражением (39), зависимость $T(T_0)$ всегда будет монотонной, и, следовательно, связь между длительностью сигнала до взаимодействия с физической системой T_0 и длительностью сигнала после взаимодействия всегда будет однозначной.

3.2. Действительная часть $\text{Re } \kappa_2^{(G)} = \text{Re } \sigma_G^2 = 0$

При $\text{Re } \sigma_G^2 = 0$, согласно (35), $T_{\text{inf}} = 0$, т.е. длительность импульса после взаимодействия с физической системой может стать сколь угодно малой. Пусть теперь

$$\sigma_G^2 = i\kappa_G,$$

тогда комплексная дисперсия сигнала после взаимодействия с физической системой равная сумме вторых кумулянтов входного сигнала (33) и функции Грина физической системы, будет равна

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \sigma_G^2 = \frac{T_0^2}{4(1 + k_0^2)}(1 + ik_0) + i\kappa_G = \frac{T_0^2}{4(1 + k_0^2)} + i \left(\frac{T_0^2 k_0}{4(1 + k_0^2)} + \kappa_G \right),$$

и связь между длительностями до взаимодействия с физической системой T_0 и длительностью после взаимодействия T будет даваться в этом случае выражением

$$T(T_0) = \frac{2|\sigma^2|}{\sqrt{\mathbf{Re}\sigma^2}} = \sqrt{T_0^2 + 8\kappa_G k_0 + \frac{16\kappa_G^2(1+k_0^2)}{T_0^2}}. \quad (44)$$

Теперь, в отличие от случая $\mathbf{Re}\sigma_G^2 \neq 0$, при $T_0 \rightarrow 0$ длительность выходного импульса стремится к бесконечности, т. е. в пределе $T_0 \rightarrow 0$ физически неправомерно пренебрегать действительной частью σ_G^2 .

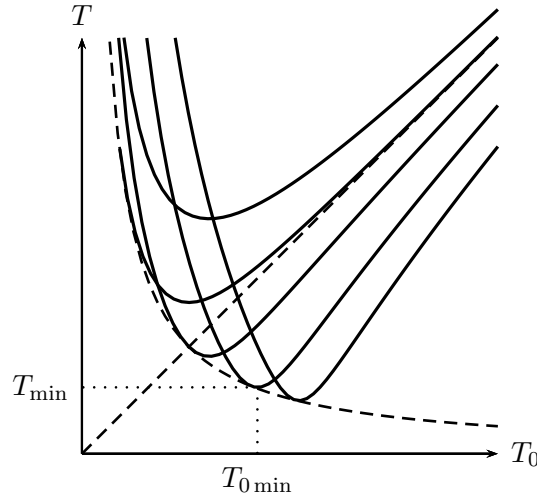


Рис. 2. Связь длительностей сигнала до взаимодействия T_0 и после взаимодействия T с физической системой при $\mathbf{Re}\sigma_G^2 = 0$

Для нахождения огибающей семейства $T(T_0)$ (44) продифференцируем подкоренное выражение (44) по k_0 и, приравняв производную нулю, найдём, что значение k_0 , соответствующее огибающей семейства (36), удовлетворяет уравнению

$$8\kappa_G + \frac{32\kappa_G^2}{T_0^2} k_0 = 0, \quad k_0 = -\frac{T_0^2}{4\kappa_G},$$

и, подставив этот корень в (44), устанавливаем, что у семейства (44) теперь существует только нижняя огибающая:

$$T = \frac{4|\kappa_G|}{T_0}.$$

Через каждую точку на плоскости (T, T_0) , лежащую выше этой огибающей, проходят две кривые семейства (44), отвечающие двум различным значениям k_0 , соответствующим двум различным «чирпам» входного сигнала.

Все кривые $T(T_0)$, даваемые (44), имеют минимум. Дифференцируя подкоренное выражение (44) по $\theta = T_0^2$, находим, что значение аргумента, при котором достигается минимум, удовлетворяет уравнению

$$1 - \frac{16\kappa_G^2(1+k_0^2)}{\theta^2} = 0,$$

откуда получаем, что минимум достигается при длительности входного сигнала

$$T_{0\min} = 2\sqrt{|\kappa_G| \sqrt{1+k_0^2}}, \quad (45)$$

и, подставляя полученное значение $T_{0\min}$ в выражение (44), находим соответствующий минимум $T(T_0)$:

$$T_{\min} = 2\sqrt{2\left(|\kappa_G| \sqrt{1+k_0^2} + \kappa_G k_0\right)}. \quad (46)$$

Асимптотика выражения (44) при $T_0 \rightarrow \infty$ равна

$$T \sim \sqrt{T_0^2 + 8\kappa_G k_0} \sim T_0 \left(1 + \frac{4\kappa_G k_0}{T_0^2}\right),$$

т. е. и в этом случае длительность выходного импульса T асимптотически стремится к длительности входного импульса T_0 . При этом если $\kappa_G k_0 \geq 0$, то T стремится к T_0 сверху, а при $\kappa_G k_0 < 0$ — снизу.

4. Заключение

Изложенный формализм позволяет рассматривать характеристики оптического импульса после его взаимодействия с диспергирующей средой. Рассмотрев плоскую монохроматическую волну с частотой ω_0 , распространяющуюся вдоль оси z в однородной среде с показателем преломления $n(\omega)$, находим, что фурье-преобразование функции Грина в этом случае даётся выражением

$$\tilde{G}_{\text{пр}}(\omega) = \exp\left(i \frac{\omega n(\omega)}{c} z\right), \quad \ln \tilde{G}_{\text{пр}}(\omega) = \frac{iz}{c} \omega n(\omega),$$

а при отражении такой волны от диспергирующей среды при углах падения, близких к нормальному, имеет вид ($r(\omega)$ — амплитудный коэффициент отражения):

$$\tilde{G}(\omega)_{\text{отр}} = r(\omega) = \frac{1-n(\omega)}{1+n(\omega)}, \quad \ln \tilde{G}(\omega)_{\text{отр}} = \ln[1-n(\omega)] - \ln[1+n(\omega)].$$

При этом, согласно (12), в линейном приближении по $n(\omega)$ при прохождении имеем

$$\begin{aligned} \varkappa_1^{(G)} &= -i \left[\frac{d}{d\omega} \ln \tilde{G}_{\text{пр}}(\omega) \right]_{\omega=\omega_0} = \frac{n(\omega_0)z}{c} \left(1 + \frac{\omega_0}{n(\omega_0)} \cdot \frac{dn}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \right), \\ \varkappa_2^{(G)} &= \sigma_G^2 = - \left[\frac{d^2}{d\omega^2} \ln \tilde{G}_{\text{пр}}(\omega) \right]_{\omega=\omega_0} = -i \frac{2z}{c} \cdot \frac{dn}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0}, \quad \mathbf{Re} \sigma_G^2 = 0, \end{aligned}$$

для непоглощающей среды с двухкумулянтной функцией Грина, с которой взаимодействует оптический импульс с гауссовской огибающей, эти результаты, получаемые с помощью данного формализма, соответствуют результатам, полученным в [7] другими методами. Отметим, что в силу принципа причинности показатель преломления $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ обязан иметь также и мнимую часть (соотношения Крамерса–Кронига [8, § 82]), так что (см. раздел 3.2) следствия $T_{\text{inf}} = 0$ и $T(T_0) \rightarrow \infty$ при $T_0 \rightarrow 0$ не будут выполняться в более реальной физической модели.

Для отражённого сигнала в линейном приближении $n(\omega)$ по ω имеем

$$\begin{aligned} \varkappa_1^{(G)} &= -i \left[\frac{d}{d\omega} \ln \tilde{G}_{\text{отр}}(\omega) \right]_{\omega=\omega_0} = i \frac{2}{n^2(\omega) - 1} \cdot \frac{dn}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0}, \\ \varkappa_2^{(G)} &= \sigma_G^2 = - \left[\frac{d^2}{d\omega^2} \ln \tilde{G}_{\text{отр}}(\omega) \right]_{\omega=\omega_0} = \frac{4n(\omega_0)}{[n^2(\omega_0) - 1]^2} \left(\frac{dn}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0}^2, \end{aligned}$$

при этом, согласно (35),

$$T_{\text{inf}} = 2\sqrt{\mathbf{Re} \sigma_G^2} = \frac{2\sqrt{n(\omega_0)}}{n^2(\omega_0) - 1} \left| \frac{dn}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}.$$

С помощью данного формализма может быть так же рассмотрена задача об эволюции квантового пакета, совершающего движение в произвольном ускоряющем потенциале.

5. Приложение

Здесь приведены программы вычисления коэффициентов разложения по полиномам Эрмита в ряде Грама–Шарлье, выраженных через нормированные кумулянты γ_n с помощью компьютерных программ аналитических вычислений *Maxima* и *Maple*.

Maxima

```
/* определение полиномов Эрмита (формула Родригеса) */
He[n](x) := (-1)^n*expand(exp(x^2/2)*diff(exp(-x^2/2),x,n));
/* ряд Грама-Шарлье */
GrCh[n](t) := subst((t-каппа[1])/sqrt(каппа[2]),x,
каппа[0]/sqrt(2*%pi*каппа[2])*exp(-x^2/2)*
horner(1+sum(He[k](x)*
coeff(taylor(exp(sum(gamma[i]/i!*x^i,i,3,k)),x,0,k),x,k),k,3,n),x));
```

Maple

```
restart;
# выбор числа коэффициентов разложения (здесь 12)
n := 12;
f := exp(sum(gamma[k]*x^k/factorial(k), k=3..n+1));
p := convert(taylor(f,x,n+1), polynom);
# коэффициенты ряда Грама-Шарлье
Coef_GCh := 1+coeff(p,x,3)*He[3]+sum(coeff(p,x,j)*He[j], j=3..n);
```

При работе в версии *Maple V Release 4* следует убрать все примечания (#...)

Литература

1. Булыгин В.С. Изменение длительности сигнала при взаимодействии с линейной системой // Тезисы докл. XI Всес. научно-техн. конф. «Высокоскоростная фотография и метрология быстропротекающих процессов». Москва, 1983. С. 45.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. Москва : Мир, 1975.
3. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. Москва : Радио и связь, 1982.
4. Снеддон И. Преобразования Фурье. Москва : Изд-во иностранной лит., 1955. 667 с.
5. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1973. 212 с.
6. Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петъо Г., Фогель Т. Функции математической физики (справочное руководство). Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 102 с.
7. Булыгин В.С., Дрожбин Ю.А., Степанов В.М. Временное уширение светового сигнала в зеркальных оптических системах // Приборы и техника эксперимента. 1980. Т. 296, № 6. С. 194–195.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. (Серия: «Теоретическая физика». Т. VIII. Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982.

References

1. *Bulygin V.S.* Change of duration of a signal in interaction with the linear system. Theses of reports XI All-Union scientific and technical conferences «The high-speed photo and metrology of the fast-proceeding processes». Moscow, 1983. P. 45. (in Russian).
2. *Cramér H.* Mathematical Methods of Statistics. Moscow : Mir, 1975.
3. *Tikhonov V.I.* Statistical radio engineering. Moscow : Radio and Communication, 1982. (in Russian).
4. *Sneddon I.* Fourier Transforms. Moscow : Foreign publishing house, 1955. 667 с. (in Russian).
5. *Prokhorov Yu.V., Rozanov Yu.A.* Probability Theory. Moscow : Nauka. Main redaction of technical and theoretical literature, 1973. P. 212. (in Russian).
6. Sous la direction de *Kampé de Fériet J.* Fonctions de la Physique Mathématique. Moscow : state publishing house of physical and mathematical literature, 1963. 102 p. (in Russian).
7. *Bulygin V.S., Drozbin Yu.A., Stepanov B.M.* Slipping and quick entry into water. Instruments and Experimental Techniques. Instruments and Experimental Techniques. 1980. V. 296, N 6. P. 194–195. (in Russian).
8. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Electrodynamics of continuous mediums. Series: «Theoretical physics». V. 8. Moscow : Nauka. Main redaction of technical and theoretical literature, 1982. (in Russian).

Поступила в редакцию 28.06.2019