УДК 531.36

Н. И. Амелькин[1], *А. В. Зыков*[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]ОАО РКК «Энергия»

О равновесиях и устойчивости спутника с системой двухстепенных силовых гироскопов в центральном гравитационном поле

Получены уравнения движения спутника, несущего произвольную систему двухстепенных силовых гироскопов, в центральном гравитационном поле. Показано, что все устойчивые в вековом смысле положения равновесия спутника, несущего коллинеарную систему двухстепенных гироскопов, могут быть получены при использовании одного двухстепенного гироскопа.

Ключевые слова: спутник, силовой гироскоп, равновесие, устойчивость, асимптотическая устойчивость.

1. Введение

Вопросам применения силовых гироскопов в системах пассивной ориентации спутников посвящены работы [1–5]. Подробное исследование свойств положений относительного равновесия спутника с одним двухстепенным силовым гироскопом в центральном гравитационном поле проведено в работах [3–5]. Получено полное аналитическое решение задачи о положениях равновесия спутника с одним двухстепенным гироскопом для случая, когда ось прецессии гироскопа параллельна одной их главных осей инерции спутника [3], и для динамически симметричного спутника при произвольном расположении оси прецессии гироскопа в несущем теле [5].

Метод исследования устойчивости по Ляпунову положений равновесия спутника при наличии диссипации в осях рамок гироскопов изложен в работе [4]. Согласно этому методу вопрос об асимптотической устойчивости или неустойчивости положений равновесия систем с частичной диссипацией решается на основе результатов анализа вековой устойчивости и усеченных уравнений линейного приближения.

Для динамически симметричного спутника получено также решение задачи об оптимальных значениях параметров, обеспечивающих максимальное быстродействие, т.е. наибольшую скорость сходимости к положениям равновесия [5].

В данной работе рассматривается задача о положениях относительного равновесия спутника, несущего систему из $N \geqslant 2$ двухстепенных силовых гироскопов. Подробное решение приводится для случая, когда гироскопы установлены в корпусе спутника по коллинеарной схеме, т.е. оси прецессии всех гироскопов взаимно параллельны.

2. О положениях равновесия спутника и их устойчивости

Рассмотрим спутник, состоящий из несущего твердого тела и N двухстепенных силовых гироскопов. Обозначим через $\boldsymbol{s}_k$ единичные векторы, указывающие фиксированные направления осей прецессии гироскопов в корпусе спутника. Текущие положения осей роторов будем задавать единичными векторами $\boldsymbol{h}_k\,(x_k)$, где x_k — углы прецессии. Предполагается, что оси роторов ортогональны осям рамок, т.е. $\boldsymbol{s}_k^T\,\boldsymbol{h}_k\ = 0$, а скорости собственного вращения роторов постоянны. Тогда кинетические моменты собственного вращения роторов будут зависеть только от углов прецессии гироскопов:

$$\tilde{\mathbf{H}}_k = \tilde{\mathbf{H}}_k\,\boldsymbol{h}_k(x_k), \quad \tilde{H}_k = \mathrm{const} > 0.$$

Предполагается, что каждый гироскоп статически уравновешен и динамически симметричен относительно оси своей рамки $\boldsymbol{s}_k$. В этом случае тензор инерции спутника $\mathbf{J}$ не будет зависеть от углов x_k, а базис главных центральных осей инерции $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ будет неподвижен относительно корпуса.

Исследуется вращательное движение спутника в центральном гравитационном поле в рамках ограниченной круговой задачи, т.е. в предположении, что центр масс спутника движется по кеплеровой круговой орбите. Орбитальный базис определяется взаимно ортогональными единичными векторами $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}$, направленными по радиусу орбиты, по нормали к плоскости орбиты и по касательной к орбите соответственно. Вектор угловой скорости орбитального базиса $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0\, \boldsymbol{n}$ постоянен в инерциальном базисе.

Положение спутника относительно орбитального базиса определяется $3+N$ независимыми переменными. Три из них задают ориентацию корпуса спутника относительно орбитального базиса, которая однозначно определяется через компоненты векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{n}$ в связанном с корпусом базисе, а остальные переменные — углы x_k поворота рамок гироскопов.

Уравнения движения спутника, несущего систему двухстепенных гироскопов, выводятся по аналогии с уравнениями движения спутника с одним двухстепенным гироскопом [4] и имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\mathbf{J}\,(\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}) + \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{s}_k\, I_k\, \ddot{x}_k + \boldsymbol{s}_k \times \tilde{\mathbf{H}}_k\, \dot{x}_k) + \\ +(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}) \times (\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_0) + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{s}_k\, I_k\, \dot{x}_k + \tilde{\mathbf{H}}_k) = 3\,\omega_0^2\, \boldsymbol{r} \times \mathbf{J}\boldsymbol{r},\end{gathered} \tag{1}$$

$$I_k\,(\ddot{x}_k + \boldsymbol{s}_k^T(\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega})) - (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_0)^T(\boldsymbol{s}_k\, \times \tilde{\mathbf{H}}_k) = \tilde{M}_k, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость корпуса спутника относительно орбитального базиса, $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0\, \boldsymbol{n}$ — угловая скорость орбитального базиса, правая часть уравнений (1) представляет собой момент действующих на спутник гравитационных сил, $\tilde{M}_k$ – моменты *внутренних* диссипативных и потенциальных сил в осях рамок гироскопов, I_k – моменты инерции гироскопов относительно осей $\boldsymbol{s}_k$.

В записанных уравнениях все векторы задаются в базисе, связанном с корпусом спутника. Для получения замкнутой системы уравнения (1), (2) должны быть дополнены кинематическими уравнениями Пуассона, описывающими движение векторов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{n}$ орбитального базиса относительно корпуса спутника:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \quad \dot{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n}. \tag{3}$$

Положения равновесия спутника относительно орбитального базиса находятся из решений системы (1), (2) при $\dot{x}_k \equiv 0$, $\omega \equiv 0$ и соответствуют стационарным точкам функции [3]

$$W = -\boldsymbol{n}^T \mathbf{J}\, \boldsymbol{n}/2 - \boldsymbol{n}^T \mathbf{H} + 3\, \boldsymbol{r}^T \mathbf{J}\, \boldsymbol{r}/2 + \Pi(x), \tag{4}$$

представляющей собой измененную потенциальную энергию, поделенную на величину ω_0^2. Здесь

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{H}_k; \quad \mathbf{H}_k(x_k) = H_k\, \boldsymbol{h}_k(x_k)\,; \quad H_k = \tilde{H}_k \big/ \omega_0 \tag{5}$$

— «приведенный» суммарный кинетический момент роторов с размерностью момента инерции, $\Pi(x) = \tilde{\Pi}(x)/\omega_0^2$ — «приведенная» энергия действующих в осях рамок внутренних потенциальных сил.

Поскольку векторы $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{r}$ связаны равенствами

$$\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{n} = 1, \quad \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{r} = 1, \quad \boldsymbol{n}^T\boldsymbol{r} = 0, \tag{6}$$

то, используя функцию Лагранжа с множителями

$$L = W + \lambda_1 \boldsymbol{n}^T \boldsymbol{n}/2 + \lambda_2 \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{r}/2 + \lambda_3 \boldsymbol{n}^T \boldsymbol{r}, \tag{7}$$

получим для положений равновесия систему уравнений

$$\partial L/\partial \boldsymbol{n} = -\mathbf{J}\,\boldsymbol{n} - \mathbf{H} + \lambda_1 \boldsymbol{n} + \lambda_3 \boldsymbol{r} = 0, \tag{8}$$

$$\partial L/\partial \boldsymbol{r} = 3\mathbf{J}\,\boldsymbol{r} + \lambda_2 \boldsymbol{r} + \lambda_3 \boldsymbol{n} = 0, \tag{9}$$

$$\partial L/\partial x_k = -H_k \boldsymbol{n}^T(\boldsymbol{s}_k \times \boldsymbol{h}_k) + \partial \Pi/\partial x_k = 0\,, \quad k = 1,\, 2\,,\dots,\, N. \tag{10}$$

Уравнение (10) описывает условия равновесия гироскопов относительно корпуса спутника, а уравнения (8), (9) сводятся к одному векторному уравнению, не содержащему множителей Лагранжа:

$$\boldsymbol{n} \times (\mathbf{J}\,\boldsymbol{n} + \mathbf{H}) = 3\,\boldsymbol{r} \times \mathbf{J}\boldsymbol{r}. \tag{11}$$

Анализ вековой устойчивости (достаточных условий устойчивости) положений равновесия спутника сводится к исследованию второго дифференциала функции (4) на множестве вариаций, связанных уравнениями

$$\boldsymbol{n}^T d\boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{r}^T d\boldsymbol{r} = 0, \quad \boldsymbol{r}^T d\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}^T d\boldsymbol{r} = 0. \tag{12}$$

Вариации векторов орбитального базиса выражаются через независимые вариации u, v, w соотношениями

$$d\boldsymbol{n} = u\,\boldsymbol{r} + v\,\boldsymbol{\tau}\,, \quad d\boldsymbol{r} = -u\,\boldsymbol{n} + w\,\boldsymbol{\tau}, \tag{13}$$

а множители Лагранжа определяются из уравнений (8), (9) формулами

$$\lambda_1 = \boldsymbol{n}^T \mathbf{J}\,\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}^T \mathbf{H}, \quad \lambda_2 = -3\boldsymbol{r}^T \mathbf{J}\,\boldsymbol{r}, \quad \lambda_3 = -3\boldsymbol{n}^T \mathbf{J}\,\boldsymbol{r}. \tag{14}$$

При учете этих соотношений и вытекающего из (9) равенства $\boldsymbol{\tau}^T \mathbf{J}\,\boldsymbol{r} = 0$ квадратичная форма d^2L на множестве (12) сводится к следующей квадратичной форме от $N{+}3$ независимых переменных u, v, w и $z_k = dx_k$:

$$\begin{gathered}\Phi = d^2L\,\big|_{(12)} = (4\,(\boldsymbol{n}^T\mathbf{J}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{r}^T\mathbf{J}\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{n}^T\mathbf{H})\,u^2 + (\boldsymbol{n}^T\mathbf{J}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\tau}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{n}^T\mathbf{H})\,v^2 + \\ +3(\boldsymbol{\tau}^T\mathbf{J}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{r}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{r})\,w^2 - 6\,\boldsymbol{n}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{\tau}\,u\,w - 6\boldsymbol{n}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{r}\,v\,w + \\ +\sum_{k=1}^{N}\left[\boldsymbol{n}^T\mathbf{H}_k\,z_k^2 - 2(\boldsymbol{r}\,u + \boldsymbol{\tau}\,v)^T(\boldsymbol{s}_k \times \mathbf{H}_k)\,z_k + \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2\Pi}{\partial x_j\,\partial x_k} z_j\,z_k\right].\end{gathered} \tag{15}$$

Если квадратичная форма (15) является строго положительно определенной, то положение равновесия удовлетворяет достаточным условиям устойчивости, а если она принимает отрицательные значения на некотором подмножестве переменных u, v, w, z_k, то положение равновесия неустойчиво *в вековом смысле.*

3. Положения равновесия спутника с коллинеарной системой двухстепенных гироскопов

Рассмотрим случай, когда потенциальные силы в осях рамок отсутствуют ($\Pi(x) \equiv 0$), а оси прецессии всех гироскопов взаимно параллельны, т.е.

$$\boldsymbol{s}_k = \boldsymbol{s}; \quad k = 1,\, 2,\, \dots\,,\, N. \tag{16}$$

Такую схему установки гироскопов будем называть *коллинеарной.*

Положим для определенности, что модули приведенных кинетических моментов роторов удовлетворяют неравенствам

$$H_1 \geqslant H_2 \geqslant \ldots \geqslant H_N. \tag{17}$$

В рассматриваемом случае все векторы $\mathbf{H}_k(x_k)$ ортогональны оси $\boldsymbol{s}$. Поэтому область возможных значений суммарного кинетического момента роторов $\mathbf{H}$ представляет собой расположенное ортогонально к оси s кольцо с внешним радиусом R и внутренним радиусом ρ, где

$$R = \sum_{k=1}^{N} H_k, \rho = H_1 - \sum_{k=2}^{N} H_k. \tag{18}$$

При этом возможные значения модуля суммарного кинетического момента роторов будут принадлежать диапазону

$$\rho \leqslant |\mathbf{H}| \leqslant R. \tag{19}$$

Отметим, что для рассматриваемой системы $\rho > 0$ только в том случае, когда в системе есть гироскоп, для которого модуль кинетического момента ротора превышает сумму модулей кинетических моментов роторов всех остальных гироскопов. В противном случае множество всевозможных значений вектора $\mathbf{H}$ представляет собой круг радиуса R, а неравенство (19) принимает вид $|\mathbf{H}| \leqslant R$.

В рассматриваемом случае уравнения (10) принимают вид

$$\boldsymbol{n}^T(\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{h}_k) = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{20}$$

а система (11), (20) имеет две группы решений. Для первой группы оси всех роторов взаимно параллельны, т.е.

$$\boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{h}_k = \sigma_k \boldsymbol{h}; \quad k = 2, \ldots, N, \quad \sigma_k = \pm 1, \tag{21}$$

а значения векторов $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{h}$ определяются из системы уравнений

$$\boldsymbol{n} \times (\mathbf{J}\,\boldsymbol{n} + H\,\boldsymbol{h}) = 3\,\boldsymbol{r} \times \mathbf{J}\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{n}^T(\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{h}) = 0, \quad \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{h} = 0, \tag{22}$$

где

$$H = H_1 + \sum_{k=2}^{N} \sigma_k H_k. \tag{23}$$

Здесь каждый из символов σ_k может принимать два значения $+1$ и -1, вследствие чего величина H может принимать 2^{N-1} фиксированных значения.

Отметим, что система (22) описывает всевозможные положения равновесия спутника с одним гироскопом, имеющим кинетический момент ротора $\mathbf{H} = H\,\boldsymbol{h}(x)$ [4]. Поэтому задача определения первой группы решений сводится к решению 2^{N-1} задач о положениях равновесия спутника с одним гироскопом. При этом каждая из этих задач характеризуется одинаковым направлением оси прецессии гироскопа s в корпусе спутника, а различаются только значения величины кинетического момента ротора H.

Вторая группа решений системы (11), (20) характеризуется условием $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{s} = 0$ (ось $\boldsymbol{s}$ направлена по нормали к плоскости орбиты) и находится из системы уравнений

$$\boldsymbol{n} = \sigma\,\boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{s} \times (\mathbf{J}\,\boldsymbol{s} + \sigma\,\mathbf{H}) = 3\,\boldsymbol{r} \times \mathbf{J}\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{s}^T\mathbf{H} = 0; \quad \sigma = \pm 1. \tag{24}$$

Все решения этой системы можно получить в аналитическом виде следующим образом. Умножив второе уравнение скалярно на вектор $\boldsymbol{s}$, а также учитывая взаимную ортогональность и единичность векторов $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{r}$, получим уравнения, содержащие только переменную $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{s}^T(\boldsymbol{r} \times \mathbf{J}\boldsymbol{r}) = 0, \quad \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{r} = 0, \quad \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{r} = 1. \tag{25}$$

Первое из этих уравнений задает в пространстве вектора $\boldsymbol{r}$ конус, одной из образующих которого является ось $\boldsymbol{s}$. В частных случаях, когда ось $\boldsymbol{s}$ параллельна какой-либо главной плоскости инерции спутника, конус вырождается в пару пересекающихся плоскостей.

Второе уравнение задает плоскость, ортогональную оси $\boldsymbol{s}$, а третье уравнение — единичную сферу.

Подробный анализ показал, что система (25) всегда имеет только четыре решения:

$$\boldsymbol{r} = \pm\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{s}), \quad \boldsymbol{r} = \pm\boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{s}), \tag{26}$$

где решения $\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{s})$ и $\boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{s})$ определяются в явном виде из квадратного уравнения. Наиболее простой вид эти решения имеют в случае, когда ось $\boldsymbol{s}$ параллельна главной плоскости инерции спутника. Например, если

$$\boldsymbol{s} = -\boldsymbol{e}_2 \sin\beta + \boldsymbol{e}_3 \cos\beta, \tag{27}$$

то

$$\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{e}_3 \sin\beta + \boldsymbol{e}_2 \cos\beta. \tag{28}$$

Решения $\mathbf{H}(\boldsymbol{s})$ находятся в явном виде из второго уравнения системы (24). Умножив это уравнение векторно на $\boldsymbol{s}$, получим

$$\mathbf{H} = \sigma\,[\boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{s} \times \mathbf{J}\,\boldsymbol{s} - 3\,\boldsymbol{r} \times \mathbf{J}\boldsymbol{r})] = \sigma\,[\boldsymbol{s}\,(\boldsymbol{s}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{s}) - \mathbf{J}\,\boldsymbol{s} + 3\,\boldsymbol{r}(\boldsymbol{s}^T\mathbf{J}\boldsymbol{r})].$$

Подставляя сюда решения (26), получим

$$\mathbf{H}_{(1)} = \sigma\,[\boldsymbol{s}\,(\boldsymbol{s}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{s}) - \mathbf{J}\,\boldsymbol{s} + 3\,\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{s}^T\mathbf{J}\boldsymbol{r}_1)], \quad \mathbf{H}_{(2)} = \sigma\,[\boldsymbol{s}\,(\boldsymbol{s}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{s}) - \mathbf{J}\,\boldsymbol{s} + 3\,\boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{s}^T\mathbf{J}\boldsymbol{r}_2)]. \tag{29}$$

Условия существования решений (26), (29) системы (24) определяются вытекающими из (19) неравенствами

$$\rho^2 \leqslant \mathbf{H}_1^2 \leqslant R^2, \quad \rho^2 \leqslant \mathbf{H}_2^2 \leqslant R^2. \tag{30}$$

В случае (13) решения (29) и условия (30) имеют следующий вид:

$$\mathbf{H}_{(1)} = \sigma\,\boldsymbol{r}_2\,(B - C)\sin\beta\cos\beta; \quad \rho^2 \leqslant (B - C)^2 \sin^2\beta\cos^2\beta \leqslant R^2.$$
$$\mathbf{H}_{(2)} = 4\sigma\,\boldsymbol{r}_2\,(B - C)\sin\beta\cos\beta; \quad \rho^2 \leqslant 16(B - C)^2 \sin^2\beta\cos^2\beta \leqslant R^2.$$

В зависимости от значений параметров спутника (главных центральных моментов инерции, расположения оси $\boldsymbol{s}$, модулей кинетических моментов роторов) число равновесных ориентаций спутника $\{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}\}$, определяемых системой (24), равно либо 0, либо 4, либо 8.

Отметим, что решения (29) дают значения для суммарного кинетического момента роторов $\mathbf{H}(\boldsymbol{s})$. При этом значения кинетических моментов роторов отдельных гироскопов $\mathbf{H}_k(\boldsymbol{s})$, т.е. углы прецессии $x_k(\boldsymbol{s})$, определяются неоднозначно. В случае $N = 2$ каждому значению $\mathbf{H}(\boldsymbol{s})$ из интервала $\rho < |\mathbf{H}| < R$ соответствует две комбинации углов $x_1(\boldsymbol{s})$, $x_2(\boldsymbol{s})$, а при $N \geqslant 3$ каждому значению $\mathbf{H}(\boldsymbol{s})$ соответствует $(N-2)$-мерное множество значений вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$.

Исследуем характер вековой устойчивости положений равновесия спутника. Начнем с первой группы решений, определяемых уравнениями (21), (22). Для них квадратичная форма (15) записывается в виде

$$\begin{gathered}\Phi = (4\,(\boldsymbol{n}^T\mathbf{J}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{r}^T\mathbf{J}\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{n}^T\mathbf{H})\,u^2 + (\boldsymbol{n}^T\mathbf{J}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\tau}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{n}^T\mathbf{H})\,v^2 + \\ +3\,(\boldsymbol{\tau}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{r}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{r})w^2 - 6\,\boldsymbol{n}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{\tau}\,u\,w - 6\,\boldsymbol{n}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{r}\,v\,w + \\ +\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{h}\sum_{k=1}^{N}\sigma_k H_k\,z_k^2 - 2(\boldsymbol{r}\,u + \boldsymbol{\tau}\,v)^T(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{h})\sum_{k=1}^{N}\sigma_k H_k\,z_k.\end{gathered} \tag{31}$$

Здесь $\sigma_1 = 1$, $\sigma_k = \pm 1$; $k = 2, \ldots, N$.

Определим сначала необходимые условия вековой устойчивости рассматриваемых решений. Покажем, во-первых, что для вековой устойчивости необходимо выполнение неравенства

$$\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{h} \neq 0. \tag{32}$$

Действительно, из второго уравнения системы (22) следует, что вектор $\boldsymbol{n}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{h}$. Поэтому выполняется одно из неравенств $\boldsymbol{r}^T(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{h})\neq 0$ либо $\boldsymbol{\tau}^T(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{h})\neq 0$. Пусть для определенности выполняется первое из указанных неравенств. Тогда получаем, что при $\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{h}=0$ на множестве $v=w=z_s=0$, $s\neq k$, квадратичная форма (31) принимает вид

$$\Phi(u,\,z_k)=(4\,(\boldsymbol{n}^T\mathbf{J}\boldsymbol{n}\,-\boldsymbol{r}^T\mathbf{J}\boldsymbol{r}\,)+\boldsymbol{n}^T\mathbf{H})\,u^2-2\boldsymbol{r}^T(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{h})\,\sigma_k\,H_k\,u\,z_k.$$

Поскольку эта форма является, очевидно, неопределенной, то положение равновесия будет неустойчивым в вековом смысле.

Для вековой устойчивости положений равновесия необходимо также, чтобы среди диагональных коэффициентов квадратичной формы (31) не было отрицательных. Отсюда при учете (32) следует, что для вековой устойчивости рассматриваемых решений необходимо выполнение условий

$$\sigma_k=1;\quad k=1,\ldots,N,\quad \boldsymbol{h}_k=\boldsymbol{h};\quad k=1,...,N,\quad \boldsymbol{n}^T\boldsymbol{h}>0, \tag{33}$$

т.е. кинетические моменты всех роторов, будучи взаимно параллельными, должны быть направлены в одну сторону и иметь положительную проекцию на нормаль к плоскости орбиты. Для таких конфигураций гиросистемы суммарный кинетический момент роторов равен

$$\mathbf{H}=R\boldsymbol{h},\quad R=\sum_{k=1}^{N}H_k, \tag{34}$$

а квадратичная форма (31) принимает вид

$$\begin{gathered}\Phi=(4\,(\boldsymbol{n}^T\mathbf{J}\boldsymbol{n}\,-\boldsymbol{r}^T\mathbf{J}\boldsymbol{r}\,)+\boldsymbol{n}^T\mathbf{H})\,u^2+(\,\boldsymbol{n}^T\mathbf{J}\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\tau}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{n}^T\mathbf{H})\,v^2+3\,(\boldsymbol{\tau}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{r}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{r})\,w^2-\\ -6\,\boldsymbol{n}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{\tau}\,u\,w-6\,\boldsymbol{n}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{r}\,v\,w+\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{h}\sum_{k=1}^{N}H_k\,z_k^2-2(\boldsymbol{r}\,u+\boldsymbol{\tau}\,v)^T(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{h})\sum_{k=1}^{N}H_k\,z_k.\end{gathered} \tag{35}$$

Введем переменную z соотношением

$$R\,z=\sum_{k=1}^{N}H_k\,z_k. \tag{36}$$

Из неравенства (32) и неравенства Коши–Буняковского

$$\sum_{k=1}^{N}H_k\,z_k^2\geqslant\left(\sum_{k=1}^{N}H_k\,z_k\right)^2\Bigg/\left(\sum_{k=1}^{N}H_k\right)=R\,z^2 \tag{37}$$

получим

$$\begin{gathered}\Phi\geqslant(4\,(\boldsymbol{n}^T\mathbf{J}\boldsymbol{n}\,-\boldsymbol{r}^T\mathbf{J}\boldsymbol{r})+\boldsymbol{n}^T\mathbf{H})\,u^2+(\,\boldsymbol{n}^T\mathbf{J}\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\tau}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{n}^T\mathbf{H})\,v^2+\\ +3\,(\boldsymbol{\tau}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{r}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{r})\,w^2-6\,\boldsymbol{n}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{\tau}\,u\,w-6\,\boldsymbol{n}^T\mathbf{J}\,\boldsymbol{r}\,v\,w+\\ +\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{h}\,R\,z^2-2(\boldsymbol{r}\,u+\boldsymbol{\tau}\,v)^T(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{h})R\,z=\Phi_1.\end{gathered} \tag{38}$$

При этом на множестве переменных $z_k=z$ квадратичная форма Φ (35) совпадает с квадратичной формой Φ_1 (38). Отсюда следует, что вековой устойчивостью обладают только те из рассматриваемых решений, для которых положительно определена квадратичная форма (37). Эта форма зависит от четырех переменных u, v, w, z и определяет характер вековой устойчивости положений равновесия спутника с одним гироскопом, имеющим кинетический момент ротора $\mathbf{H}=R\boldsymbol{h}$.

Исследуем характер вековой устойчивости второй группы решений, определяемых уравнениями (24). Поскольку для этих решений $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}=0$, то $\boldsymbol{n}^T\mathbf{H}_k=0\;\forall\,k$, и, кроме того, вектор $\boldsymbol{n}$ ортогонален каждому вектору $\boldsymbol{s}\times\mathbf{H}_k$. Выше было показано, что при этих условиях квадратичная форма (15) принимает отрицательные значения на некотором подмножестве переменных u, v, w, z_k, т.е. положения равновесия неустойчивы в вековом смысле.

Таким образом, все устойчивые в вековом смысле положения равновесия спутника, несущего коллинеарную систему двухстепенных гироскопов, могут быть получены при использовании одного гироскопа с кинетическим моментом ротора $R = \sum\limits_{k=1}^{N} H_k$ и осью прецессии $\boldsymbol{s}$.

Следует отметить, что практический интерес представляют только устойчивые *в вековом смысле* положения равновесия спутника. При наличии диссипации в осях рамок гироскопов такие положения становятся во многих случаях асимптотически устойчивыми, в то время как устойчивость, обусловленная гироскопической стабилизацией, в подавляющем большинстве случаев разрушается диссипативными силами [4, 5].

На примере динамически симметричного спутника проведен также сравнительный анализ максимальных значений степени устойчивости, достигаемых при использовании одного гироскопа и двух гироскопов, установленных в корпусе спутника по коллинеарной схеме. Установлено, что для спутника с двумя гироскопами максимально достижимое значение степени устойчивости совпадает с максимально достижимым значением степени устойчивости спутника с одним гироскопом. Полученный результат свидетельствует о том, что увеличение числа гироскопов при коллинеарной схеме их установки не дает никаких преимуществ и с точки зрения быстродействия, т.е. не позволяет увеличить скорость стремления спутника к устойчивым положениям равновесия.

4. Заключение

В работе показано, что для спутника с коллинеарной системой двухстепенных силовых гироскопов, не имеющих пружин в осях прецессии, задача определения положений равновесия и характера их вековой устойчивости сводится в основной части к аналогичной задаче для спутника с одним гироскопом. Установлено также, что все устойчивые в вековом смысле положения равновесия спутника, несущего коллинеарную систему двухстепенных гироскопов, могут быть получены при использовании одного двухстепенного гироскопа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации в рамках выполнения базовой части государственного задания в сфере научной деятельности за № 2014/120. НИР № 2583.

Литература

1. *Сарычев В.А., Луканин К.В., Мирер С.А.* Оптимальные параметры гравитационно-гироскопических систем ориентации спутников // Космич. исслед. — 1975. — Т. 13, № 3. — С. 311–321.

2. *Сарычев В.А.* Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. Т. 11. — М.: ВИНИТИ, 1978. — 223 с.

3. *Амелькин Н.И.* О стационарных движениях спутника с двухстепенным силовым гироскопом в центральном гравитационном поле и их устойчивости // ПММ. — 2009. — № 2. — С. 236–249.

4. *Амелькин Н.И.* Анализ устойчивости равновесий спутника, несущего двухстепенной силовой гироскоп с диссипацией в оси рамки // ПММ. — 2010. — Т. 74, № 4. — С. 567–581.

5. *Амелькин Н.И.* О равновесиях и устойчивости динамически симметричного спутника с двухстепенным силовым гироскопом // ПММ. — 2010. — Т. 74, № 5. — С. 718–733.

Поступила в редакцию 29.11.2012.