

Московский Физико-Технический Институт
(Национальный Исследовательский Университет)

Физтех-школа прикладной математики и информатики

Отзыв

научного руководителя на диссертацию Хузиевой Алины Эдуардовны “Задачи о раскрасках разреженных гиперграфов”, представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

Диссертационная работа А.Э. Хузиевой посвящена одному из центральных разделов современного комбинаторного анализа — теории гиперграфов. Работа состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения и списка литературы. Во введении обсуждается актуальность исследуемых задач, в рамках общей характеристики работы приведена информация об апробации работы и сформулированы основные цели и результаты диссертации.

В первой главе работы исследуется количественная взаимосвязь между сложными характеристиками гиперграфа: хроматическим числом, обхватом и числом ребер. Существование графов и гиперграфов с произвольно большими обхватом и хроматическим числом было доказано еще в 60-70-е годы прошлого века в работах П. Эрдеша и Л. Ловаса. В одной из работ ими была предложена проблема отыскания минимального числа ребер в n -однородном гиперграфе с обхватом больше s и хроматическим числом больше r . Искомую экстремальную величину принято обозначать через $m(n, r, s)$. На сегодняшний день очень хорошо изучены случаи $s = 1$ (условие на обхват тривиально), а также $s = 2$ (простые гиперграфы). Эти случаи являются классическими, оценкам $m(n, r, s)$ при $s = 1, 2$ посвящены работы многих выдающихся специалистов по комбинаторике и теории графов: Дж. Спенсера, Н. Алона, П. Сеймура, Й. Бека, А.В. Косточки, В. Рёдля, П. Тетали и др. Случай же $s > 2$ исследовался несколько менее активно. Основным результатом первой главы является новая нижняя оценка величины $m(n, r, s)$. Полученная оценка улучшает ранее известные оценки Косточки и Кумбхата из работы 2009 года. Доказательство опирается на новую структурную теорему о количественных характеристиках гиперграфов с большим обхватом и большим хроматическим числом. Суть ее состоит в том, что в подобном гиперграфе либо есть вершина очень большой степени, либо есть большая группа вершин достаточно большой степени, находящихся на очень малом реберном расстоянии друг от друга. Используемая автором вероятностная техника крайне сложна и интересна, применяется новый подход к анализу метода случайной перекраски из предыдущей работы А.Б. Купавского и Д.А. Шабанова.

Вторая глава диссертационного исследования посвящена он-лайн раскраскам графов и гиперграфов. Данное направление теории гиперграфов появилось еще в 90-х годах прошлого века, но наиболее активно развиваться начало только в последние 10 лет. Автор диссертации получена серия результатов относительно он-лайн раскрасок графов и гиперграфов. Обобщаются ранее известные результаты М. Кривелевича, П. Хакселл, Ж. Верстрате, Д.А. Шабанова и др., найдена асимптотика он-лайн

предписанного хроматического числа полного r -дольного k -однородного гиперграфа с равными размерами долей. В основе доказательства использована связь этой задачи с экстремальными задачами типа Эрдша-Хайнала об он-лайн раскрасках гиперграфов. В данных задачах автором также получены новые оценки этих величин, в ряде случаев удалось улучшить их по сравнению с классическими задачами об обычных раскрасках.

Наконец, третья глава посвящена вопросам о сильной раскраске случайного гиперграфа в биномиальной модели. Проблема поиска асимптотического распределения хроматического числа случайных графов и гиперграфов с 70-х годов прошлого века находится в центре исследований по вероятностной комбинаторике. Этой задаче посвящены работы Дж. Гриммета, Б. Боллобаша, Т. Лучака, Н. Алона, М. Кривелевича, Д. Ахлиоптаса, А. Коджа-Оглана и многих других. В последнее десятилетие особенно активно идут исследования в разреженном случае, когда среднее число ребер является линейным по числу вершин. Основным результатом третьей главы является новая нижняя оценка пороговой вероятности сильной r -раскрашиваемости случайного 4-однородного гиперграфа $H(n, 4, p)$. Здесь автор улучшает ранее известные результаты М. Кривелевича и Б. Судакова. Стоит отметить высокую сложность изучаемой проблемы, по сути изучение такого вопроса только начинается и автор выступает в роли одного из новаторов.

Представленная работа является законченным исследованием в области дискретной математики. Она содержит ряд новых сильных математических результатов в известных проблемах экстремальной и вероятностной комбинаторики. Автор использует разнообразную технику, включая метод случайной перекраски, метод второго момента и комбинаторные инструменты. Основные результаты достаточно полно опубликованы в журналах, индексируемых Scopus и входящих в перечень ВАК. В качестве определенного недостатка можно отметить отсутствие близкой верхней оценки пороговой вероятности сильной r -раскрашиваемости. По-видимому, автору просто не хватило времени на получение данного результата.

Считаю, что диссертационная работа А.Э. Хузиевой “Задачи о раскрасках разреженных гиперграфов” полностью соответствует требованиям Положения МФТИ о присуждении ученых степеней, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор — Хузиева Алина Эдуардовна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

Научный руководитель,
ведущий научный сотрудник
лаборатории продвинутой комбинаторики
и сетевых приложений МФТИ,
доктор физико-математических наук

21 июня 2019



Д. А. Шабанов