УДК 517.972

А. Йаакбариех

Российский университет дружбы народов

О полугруппах, порождаемых задачей Коши для гиперболических дифференциально-разностных уравнений с отклонениями пространственных переменных

Установлены условия корректной разрешимости задачи Коши для дифференциально-разностного уравнения гиперболического типа с отклонениями пространственного аргумента неизвестной функции. Определено представление полугруппы решений задачи Коши для дифференциально-разностного уравнения гиперболического типа.

1. Введение

В настоящей работе исследуются вопросы корректной разрешимости задачи Коши для модельного гиперболического дифференциально-разностного уравнения вида

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \mathcal{L}u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in R^d \times (0,+\infty), \tag{1}$$

$$u(x,+0) = u_0(x),\ u_t'(x,+0) = u_1(x),\ x \in R^d, \tag{2}$$

где

$$\mathcal{L}u(x,t) = \Delta u(x,t) + \sum_{k=1}^{N}\{[a_k(u(x-h_k,t) + u(x+h_k,t))] + [i((b_k, \nabla u(x-h_k,t)+$$

$$+(b_k, \nabla u(x+h_k,t)))] + [c_k(\Delta u(x-h_k,t) + \Delta u(x+h_k,t))]\} - \kappa u(x,t).$$

Здесь $a_k, c_k, \kappa \in R$ и $h_k > 0$ при каждом $k \in 1,...,N$, а $b_k \in R^d$ – вектор в R^d при каждом $k \in 1,...,N$, f – числовая функция, заданная на множестве $(0,+\infty) \times R^d$, а u – неизвестная числовая функция, заданная на области $(0,+\infty) \times R^d$. Областью определения оператора $\mathcal{L}$, действующего из $D(\mathcal{L}) \subset H$ в H, является гильбертово пространство $W_2^2(R^d) = H^2(R^d)$.

В работе [6] для дифференциально-разностного оператора введен аналог понятия эллиптичности, используемый в теории дифференциальных операторов.

Оператор $-\mathcal{L}$ называется сильно эллиптическим, если существуют такие константы $C_0 > 0$ и $\gamma_0 \geq 0$, что для любого $u \in H^2$ выполняется неравенство $(-\mathcal{L}u, u) \geq C_0\|u\|^2_{H^1} - \gamma_0\|u\|^2_H$.

Свойство дифференциально-разностного оператора быть сильно эллиптическим играет ключевую роль в вопросах разрешимости задачи Коши для дифференциально-разностных уравнений параболического типа (см. [5]).

В настоящей работе мы рассмотрим свойство сильной эллиптичности дифференциально-разностного оператора как условие корректной разрешимости задачи Коши для дифференциально-разностных уравнений гиперболического типа.

Оператор $-\mathcal{L}$ называется строго положительным, если существует такая константа $\alpha_0 > 0$, что для любого $u \in H^2$ выполняется неравенство $(-\mathcal{L}u, u) \geq \alpha_0\|u\|^2_H$.

Мы предполагаем, что оператор $-\mathcal{L}$ является сильно эллиптическим и строго положительным, и полагаем $-\mathcal{L} = \mathbf{A}^2$, где $\mathbf{A}$ – строго положительный оператор в гильбертовом пространстве H с областю определения H^1. Последнее предположение приводит к тому, что оператор $\mathbf{A}$ имеет ограниченный самосопряженный обратный $\mathbf{A}^{-1}$.

2. О корректной разрешимости задачи Коши

Лемма 1. *Для сильной эллиптичности оператора $-\mathcal{L}$ достаточно выполнения неравенства $c \equiv |c_1| + ... + |c_N| < \frac{1}{2}$. Если, кроме того, выполнено неравенство $\kappa > 2a + (1-2c)^{-1}|b|^2$, то оператор $-\mathcal{L}$ является строго положительным.*

Действительно, оператор $-\mathcal{L}$ унитарно эквивалентен оператору умножения $\mathbf{M}_\varphi$ на функцию

$$\varphi(s) = s^2(1 + 2\sum_{j=1}^{N} c_j \cos(h_j s)) - 2s\sum_{j=1}^{N} b_j \cos(h_j s) - 2\sum_{j=1}^{N} a_j \cos(h_j s) + \kappa,$$

т.к. $\mathbf{M}_\varphi = \mathcal{F}(-\mathcal{L})\mathcal{F}^{-1}$. Поэтому для сильной эллиптичности оператора $-\mathcal{L}$ достаточно существования постоянной $C_0 > 0$, такой, что неравенство $s^2(1 + 2\sum\limits_{j=1}^{N} c_j \cos(h_j s)) - 2s\sum\limits_{j=1}^{N} b_j \cos(h_j s) - 2\sum\limits_{j=1}^{N} a_j \cos(h_j s) + \kappa \geq C_0 s^2$ справедливо при любом $s \in R$.

Следовательно, достаточным условием сильной эллиптичности оператора $-\mathcal{L}$ является строгая положительность коэффициента при квадратичном слагаемом, то есть неравенство $c \equiv |c_1| + ... + |c_N| < \frac{1}{2}$.

Если последнее неравенство выполнено, то для строгой положительности оператора $-\mathcal{L}$ достаточно выполнения неравенства $\inf \varphi(s) > 0$, которое следует из неравенства $2a + (1-2c)^{-1}|b|^2 < \kappa$.

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряженный положительный оператор в гильбертовом пространстве, действующий в пространстве $\mathcal{H} = L_2(R^d)$, имеющий компактный обратный, I – единичный оператор в пространстве $\mathcal{H}$ и $a_k, h_k, k \in \overline{1,n}$ – вещественные числа.

Превратим область определения $Dom(A^\beta)$ оператора $A^\beta(\beta > 0)$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\beta$, введя на $Dom(A^\beta)$ норму $\| \cdot \| = \| A^\beta \cdot \|$. Через α_0 обозначим нижнюю грань оператора A.

Обозначим через $L_{2,\gamma}((a,b),\mathcal{H})(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ пространство вектор-функций со значениями в $\mathcal{H}$, снабженное нормой

$$\| f \|_{L_{2,\gamma}((a,b),\mathcal{H})} = \left(\int_b^a \exp(-2\gamma t) \| f(t) \|^2 \, dt \right)^{1/2}, \gamma \geq 0.$$

Через $W^l_{2,\gamma}((a,b),A^l)$ обозначим пространство вектор-функций со значениями в $\mathcal{H}$, таких, что $A^j u^{(2-j)}(t) \in L_{2,\gamma}((a,b),\mathcal{H}), j = 0,1,2,...,l$; с нормой

$$\| u \|_{W^l_{2,\gamma}((a,b),A^l)} = (\| u^{(2)} \|^l_{L_{2,\gamma}((a,b),\mathcal{H})} + (\| A^l u \|^2_{L_{2,\gamma}((a,b),\mathcal{H})})^{1/2}, \gamma \geq 0.$$

Согласно теореме о следах (см. [4] гл. I, а также [1]), справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Если $l \in \mathbf{N}$ и $u \in W^l_{2,\gamma}((a,b),A^l)$, то существует $u(a+0) \in D(A^{l-\frac{1}{2}})$ такое, что $\lim\limits_{t \to a+0} \|u(t) - u(a+0)\|_{A^{l-\frac{1}{2}}} = 0$. Наоборот, если $u_0 \in D(A^{l-\frac{1}{2}})$ при некотором $l \in \mathbf{N}$, то существует функция $u \in W^l_{2,\gamma}((a,b),A^l)$ такая, что $\lim\limits_{t \to a+0} \|u(t) - u_0\|_{A^{l-\frac{1}{2}}} = 0$.*

Поставим задачу определить решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2) в предположении, что $f \in L_{2,\gamma}(R_+)$ и оператор является строго положительным и сильно эллиптическим. Последнее предположение приводит к тому, что оператор $\mathbf{A}$ имеет ограниченный самосопряженный обратный оператор $\mathbf{A}^{-1}$.

Определение 1. Функцию $u(t)$ будем называть *сильным решением задачи Коши* (1)–(2), если она принадлежит пространству $W^2_{2,\gamma}(R_+, A^2)$ при некотором $\gamma \in R$, удовлетворяет уравнению (1) и тождественно удовлетворяет условию (2). Из определения (1) и леммы (2) вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. *Если функция $u \in W^2_{2,\gamma}(R_+, \mathbf{A}^2)$ является решением задачи Коши* (1)–(2), *то существует предел $u(+0) \in H^{\frac{3}{2}}$ функции u при $t \to +0$ и предел $u'(+0) \in H^{\frac{1}{2}}$ ее производной u' при $t \to +0$.*

В связи с утверждением леммы (3) всюду далее мы предполагаем, что задача Коши (1), (2) исследуется при следующих предположениях $u_0 \in H^{\frac{3}{2}}$ и $u_1 \in H^{\frac{1}{2}}$. Нетрудно проверить с помощью непосредственной подстановки следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть $u_0 \in H^{\frac{3}{2}}$ и $u_1 \in H^{\frac{1}{2}}$. Функция $u \in W^2_{2,\gamma}(R_+, \mathbf{A}^2)$ является решением задачи Коши* (1)–(2) *тогда и только тогда, когда функция $v(t) = e^{-\gamma t}u(t)$, $t \in R_+$, принадлежит пространству $W^2_2(R_+, \mathbf{A}^2)$ и является решением задачи Коши:*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t) + 2\gamma\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) = \mathcal{L}_\gamma v(x,t) + f_\gamma(x,t), \quad (x,t) \in R^d \times (0, +\infty), \tag{3}$$

$$v(+0) = u_0,\ v'(+0) = u_1 - \gamma u_0, \tag{4}$$

где $f_\gamma = e^{-\gamma t}f$, а $\mathcal{L}_\gamma = \mathcal{L} - \gamma^2\mathbf{I}$. Положим $v(x,t) = w(x,t) + g(x,t)$, где $g(t,x) = e^{\frac{-t^2}{2}}[\cos(\mathbf{A}t)v_0 + \mathbf{A}^{-1}\sin(\mathbf{A}t)v_1]$.

Замечание 1. Так как в силу леммы 4 $v_0 = u_0 \in H^{\frac{3}{2}}$ и $v_1 = u_1 - \gamma u_0 \in H^{\frac{1}{2}}$, то в силу леммы 2 функция g принадлежит пространству $v \in W^2_2(R_+, \mathbf{A}^2)$.

Лемма 5. *Функция $v \in W^2_2(R_+, \mathbf{A}^2)$ является решением задачи Коши* (3)–(4) *тогда и только тогда, когда функция $w = v - g$ принадлежит пространству $W^2_2(R_+, \mathbf{A}^2)$ и является решением задачи Коши:*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}w(x,t) + 2\gamma\frac{\partial}{\partial t}w(x,t) = \mathcal{L}_\gamma w(x,t) + F_\gamma(x,t), \quad (x,t) \in (0, +\infty) \times R^d, \tag{5}$$

$$w(+0) = 0,\ w'_t(+0) = 0, \tag{6}$$

где $F_\gamma = f_\gamma + \mathcal{L}_\gamma g - \frac{\partial^2}{\partial t^2}g - 2\gamma\frac{\partial}{\partial t}g$, а предельные соотношения (6) выполняются в пространствах $u_0 \in H^{\frac{3}{2}}$ и $u_1 \in H^{\frac{1}{2}}$ соответственно.

Так как $w(+0) = 0$, $w'_t(+0) = 0$, то будем искать решение уравнения (6) в виде

$$w(x,t) = A^{-1}\int_0^t \sin(A(t-s))e^{-\gamma(t-s)}Z(x,s)ds. \tag{7}$$

Покажем, что если $w(x,t)$ определяется равенством (7), то $w(+0) = 0$, $w'_t(+0) = 0$.

Лемма 6. *Для функции* (7) *справедливы следующие равенства:*

$$1)\ \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = \int_0^t \cos(A(t-s))e^{-\gamma(t-s)}Z(x,s)ds - \gamma w(x,t),$$

$$2)\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = Z(x,t) - A^2 w(x,t) + \gamma^2 w(x,t) - 2\gamma\int_0^t \cos(A(t-s))e^{-\gamma(t-s)}Z(x,s)ds.$$

Следствие. Функция (7) удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) + (\gamma^2 + A^2)w(x,t) + 2\gamma\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = Z(x,t) \tag{8}$$

и условиям $w(x,+0) = 0$, $w'_t(x,0) = 0$.

Лемма 7. *Если $w(x,t) \in W_2^2(R_+, A^2)$, $w(+0) = 0$, $w'_t(+0) = 0$, то функция Z из равенства* (7) *удовлетворяет условию $Z \in L_2(R_+, H)$. Наоборот, если $Z \in L_2(R_+, H)$, то функция w, определяемая равенством* (7), *удовлетворяет условиям $w(x,t) \in w_2^2(R_+, A^2)$, $w(+0) = 0$, $w'_t(+0) = 0$, которые выполняются в пространствах $u_0 \in H^{\frac{3}{2}}$ и $u_1 \in H^{\frac{1}{2}}$ соответственно.*

Утверждение леммы (7) следует из леммы (2) и леммы (6).

Лемма 8. *Функция $w \in W_2^2(R_+, A^2)$ является решением задачи Коши* (5)–(6) *тогда и только тогда, когда функция $Z \in L_2(R_+, H)$ удовлетворяет уравнению*

$$Z = F_\gamma. \tag{9}$$

Доказательство. Подставив (8) в (5), получим

$$Z(x,t) = F_\gamma(x,t) = f_\gamma - (A^2 + \gamma^2 I)g - \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x,t) - 2\gamma\frac{\partial g}{\partial t}(x,t). \tag{10}$$

Поэтому согласно леммы 7

$$w(x,t) = A^{-1}\int_0^t \sin(A(t-s))e^{\gamma(t-s)}F_\gamma(x,s)ds.$$

Тогда в силу леммы 4

$$v(x,t) = w(x,t) + g(x,t),$$
$$u(x,t) = e^{\gamma t}v(x,t).$$

Теорема 1. *Пусть $-\mathcal{L}$ – сильно эллиптический и строго положительный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда если $u_0 \in H^{\frac{3}{2}}$ и $u_1 \in H^{\frac{1}{2}}$, $f \in L_{2,\gamma}(R_+, H)$ и $-\mathcal{L} = A^2$, то задача Коши* (1)–(2) *имеет в пространстве $W_{2,\gamma}^2(R_+, A^2)$ единственное решение, которое допускает представление*

$$u(x,t) = e^{\gamma t}[g(x,t) + A^{-1}\int_0^t \sin(A(t-s))e^{-\gamma(t-s)}F_\gamma(x,s)ds],$$

где F_γ определено равенством (10).

Доказательство. Задача Коши (1)–(2) эквивалентна задачам Коши (3)–(4) и (5)–(6), которые, в свою очередь, эквивалентны уравнению (9), имеющему единственное решение.

Замечание 2. Теорема 1 справедлива и при $\gamma = 0$, т.е. если $f \in L_2(R_+, H)$, то задача Коши (1)–(2) имеет единственное решение $u(x,t)$ из пространства $W_2^2(R_+, A^2)$.

3. Полугруппа, порождаемся задачей Коши

Покажем, что однородная задача Коши (1)–(2) (то есть задача Коши с $f \equiv 0$), имеющая единственное решение из пространства $W_2^2(R_+, A^2)$ при произвольных начальных условиях $u_0 \in D(A^{\frac{3}{2}})$ и $u_1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$, задает полугруппу в гильбертовом пространстве начальных данных

$$\mathcal{K} = D(A^{\frac{3}{2}}) \oplus D(A^{\frac{1}{2}}).$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство преобразований $\mathbf{U}(t)$, $t \geq 0$, гильбертова пространства $\mathcal{K}$, сопоставляющее каждому начальному условию $(u_0, u_1) \in \mathcal{K}$ упорядоченную пару функций $(u(\cdot,t), u'_t(\cdot,t))$, где $u(x,t)$, $(x,t) \in R \times R_+$ – решение задачи Коши (1)–(2) с начальными условиями $(u_0,u_1) \in \mathcal{K}$.

Лемма 9. *Если* $(u_0,u_1) \in \mathcal{K}$ *и* $u(x,t)$, $u(x,t) \in R \times R_+$ *– решение задачи Коши* (1)–(2) *с начальными условиями* $(u_0,u_1) \in \mathcal{K}$, *то для любого* $t > 0$ *выполняется условие* $(u(\cdot,t), u'_t(\cdot,t)) \in \mathcal{K}$.

Утверждение этой леммы следует из леммы 2, то есть из теормы о следах [4], гл. I. Определим на пространстве $\mathcal{K}$ функционал энергии равенством

$$E(u_0,u_1) = \|\mathbf{A}u_0\|_H^2 + \|u_1\|_H^2. \tag{11}$$

Теорема 2. *Однопараметрическое семейство преобразований* $\mathbf{U}(t)$, $t \geq 0$, *является полугруппой в пространстве* $\mathcal{K}$, *сохраняющей значение функционала энергии.*

Доказательство. Пусть u – решение задачи Коши (1)–(2) для однородного уравнения с начальными условиями $(u_0,u_1) \in \mathcal{K}$, существование и единственность которого установлено теоремой 1.

Определим функцию $w(s) = s^2 + 2\sum_{k=1}^N a_k \cos(sh_k)$, отделенную, согласно лемме 1, от нуля снизу.

Через $L_{2,\gamma}(R_+, L_{2,w})$ обозначим гильбертово пространство отображений $u \in L_{2,\gamma}(R_+, L_2)$ таких, что $wu \in L_{2,\gamma}(R_+, L_2)$, наделенное нормой

$$\|u\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+,L_{2,w})} = \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t}\Big(\int_R w(s)|u(s,t)|^2 ds\Big)dt.$$

Напомним, что $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье по пространственным переменным – унитарное преобразование пространства H. Для дальнейшего доказательства теоремы 2 используем две леммы.

Лемма 10. *Если* $u(x,t) \in W^2_{2,\gamma}(R_+, A^2)$, *то* $\mathcal{F}(A^2u)(s,t) = w(s)U(s,t)$, *причем* $\|A^2u\|_{L_{2,\gamma}(R_+,H)} = \|U\|_{L_{2,\gamma}(R_+,L_{2,w})}$.

Утверждение следует из унитарности преобразования Фурье $\mathcal{F}$ в пространстве H и определений норм пространств $W^2_{2,\gamma}(R_+, A^2)$ и $L_{2,\gamma}(R_+, L_{2,w})$.

Положим $U(s,t) = \mathcal{F}(u(t,x))(s)$. Тогда поскольку функция $u(x,t)$ является решением задачи Коши (1)–(2), то функция $U(s,t)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(s,t) = w(s)U(s,t), \ (s,t) \in R \times R_+, \tag{12}$$

$$U(s,0) = \hat{u}_0(s), \ \frac{\partial}{\partial t}U(s,0) = \hat{u}_1(s). \tag{13}$$

Решение задачи Коши (12)–(13) существует, единственно и определяется равенством

$$U(t,s) = \hat{u}_0(s)\cos(w(s)t) + \hat{u}_1(s)(w(s))^{-1}\sin(w(s)t). \tag{14}$$

Лемма 11. *Если* $(u_0,u_1) \in \mathcal{K}$ *и* u *– решение задачи Коши* (1)–(2), *то для любого* $t > 0$ *выполняется равенство* $E(u(t), u'_t(t)) = E(u_0,u_1)$.

Доказательство. Согласно (14) справедливо равенство

$$U'_t(s,t) = -\hat{u}_0(s)w(s)\sin w(s)t + \hat{u}_1(s)\cos(w(s)t),$$

поэтому

$$|U'_t(s,t)|^2 + |w(s)U(s,t)|^2 = |U_1(s)|^2 + |w(s)U_0(s)|^2,$$

откуда в силу унитарности преобразования Фурье и леммы 10 следует сохранение значений функционала энергии 11 на решении $u(x,t)$ и утверждении леммы (11).

Однопараметрическое семейство преобразований $\mathbf{U}(t)$, $t \geq 0$, сопоставляющее начальным условиям $(u_0(x), u_1(x)) \in \mathcal{K}$ значения $(u(x,t), u'_t(x,t))$ решения задачи Коши (1)–(2), является полугруппой преобразований пространства $\mathcal{K}$ в силу теоремы 1 о существовании и единственности решений задачи Коши, причем в силу леммы 11 операторы полугруппы являются изометрическими преобразованиями пространства $\mathcal{K}$. Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Преобразования полугруппы $\mathbf{U}(t)$, $t \geq 0$, являются обратимыми, поэтому она однозначно продолжаема до группы.

Замечание 4. Преобразования полугруппы могут быть продолжены по непрерывности с пространства $\mathcal{K}$ на гильбертово пространство $H \oplus H^1$.

Литература

1. *Власов В.В., Сакбаев В.Ж.* О корректной разрешимости некоторых дифференциально-разностных уравнений в пространствах Соболева // Математические заметки. — 2000. — Т. 8. — № 6. — С. 939–942.

2. *Власов В.В., Шматов К.И.* Корректная разрешимость уравнений гиперболического типа с последействием в гильбертовом пространстве // Труды математического института им. В.А.Стеклова. — 2003. — Т. 243. — С. 127–137.

3. *Йаакбариех А., Сакбаев В.Ж.* Представление формулами Фейнмана полугрупп, порожденных параболическими, дифференциально-разностными операторами // Труды МФТИ. — 2012. — Т. 4, № 4(16).

4. *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / пер. с фр. — М. : Мир, 1971.

5. *Муравник А.Б.* О задаче Коши для некоторых неоднородных дифференциально-разностных параболических уравнений // Математические заметки. — Т. 74, № 4. — С. 538–548.

6. *Скубачевский А.Л.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с вырождением // Труды ММО. — 1997. — Т. 59. — С. 240–285.

Поступила в редакцию 01.08.2013.