УДК 517.982.252

Г. Е. Иванов, М. С. Лопушански

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Исчисление параметров выпуклости суммы Минковского сильно и слабо выпуклых множеств относительно неограниченного квазишара

Рассматриваются сильно и слабо выпуклые множества относительно неограниченного и несимметричного квазишара. Получены теоремы об исчислении параметров выпуклости и о замкнутости суммы Минковского сильно выпуклого и слабо выпуклого множеств.

Ключевые слова: сильная и слабая выпуклость, метрическая проекция.

1. Введение

Впервые понятие *слабо выпуклого множества* появилось в работах Н. В. Ефимова и С. Б. Стечкина, где такие множества назывались a-выпуклыми, а в дальнейшем они стали называться множествами, слабо выпуклыми по Ефимову–Стечкину. При некоторых условиях слабо выпуклое множество по Ефимову–Стечкину является слабо выпуклым с такой же константой. Простые примеры показывают, что сумма (по Минковскому) множества, слабо выпуклого по Ефимову–Стечкину, и сильно выпуклого множества может не быть слабо выпуклым множеством по Ефимову–Стечкину. Поскольку одной из основных целей нашей работы является разработка исчисления параметров выпуклости в связи с операциями Минковского, для наших задач определение Ефимова–Стечкина не подходит.

Другой подход к исследованию слабо выпуклых множеств представлен в работе [1], где в гильбертовом пространстве рассматривается условие, эквивалентное слабой выпуклости, – проксимальная гладкость. Множество A является r-проксимально гладким в гильбертовом пространстве H, если функция $x \mapsto \varrho(x, A)$ (расстояние от точки x до множества A) непрерывно дифференцируема на множестве $U^r(A) = \{x \in H \,|\, 0 < \varrho(x, A) < r\}$. В работе [2] результаты для проксимально гладких множеств обобщены на банаховы пространства.

В работе [3] доказано, что при некотором соотношении параметров выпуклости сумма сильно выпуклого и слабо выпуклого множеств является замкнутым, слабо выпуклым множеством. В работе [3] вместо термина *слабо выпуклое множество* используется термин *множество, удовлетворяющее опорному условию слабой выпуклости*, а вместо термина *сильно выпуклое множество* – термин *слагаемое шара*. В настоящей работе мы развиваем методы, представленные в [3], заменяя шар неограниченным и несимметричным квазишаром. Это позволяет применить полученные результаты к надграфикам функций и доказать существование, единственность и непрерывную зависимость от параметра точки минимума в инфимальной конволюции этих функций.

2. Определения и обозначения

Пусть E – вещественное линейное нормированное пространство. Через $\operatorname{int} A$, ∂A и $\overline{A}$ будем обозначать соответственно внутренность, границу и замыкание множества $A \subset E$. Значение функционала $p \in E^*$ на векторе $x \in E$ будем обозначать $\langle p, x \rangle$. *Шаром* радиуса $d \geqslant 0$ с центром в точке a называется множество $B_d(a) = \{x \in E : \|x - a\| \leq d\}$.

Квазишаром M в банаховом пространстве E называется выпуклое замкнутое множество $M \subset E$, для которого $0 \in \operatorname{int} M$.

Заметим, что квазишар M является шаром относительно некоторой нормы, эквивалентной исходной норме пространства E, тогда и только тогда, когда он ограничен относительно исходной нормы E и симметричен, т.е. $-M = M$.

Функцией Минковского квазишара M называется функция $\mu_M : E \to [0;+\infty)$ такая, что

$$\mu_M(x) = \inf\left\{t > 0 \middle| \ x \in tM\right\} \qquad \forall\ x \in E.$$

Функция $\mu : E \to \mathbb{R}$ называется *несимметричной полунормой*, если она *положительно однородна*:

$$\mu(\lambda x) = \lambda\mu(x) \qquad \forall\ x \in E, \quad \forall\ \lambda \geqslant 0$$

и *субаддитивна*:

$$\mu(x+y) \leqslant \mu(x) + \mu(y) \qquad \forall\ x, y \in E.$$

Замечание 2.1. *Функция $\mu : E \to [0;+\infty)$ является несимметричной полунормой тогда и только тогда, когда она является функцией Минковского некоторого квазишара.*

Пусть $M \subset E$ – квазишар. *M-расстоянием* от множества $D \subset E$ до множества $A \subset E$ называется величина

$$\varrho_M(D, A) = \inf_{d\in D,\ a\in A} \mu_M(d-a).$$

В частности, M-расстояние от точки $x \in E$ до множества $A \subset E$ определяется формулой

$$\varrho_M(x, A) = \inf_{a\in A} \mu_M(x-a).$$

Если $M = B_1(0)$, то M-расстояние совпадает с обычным расстоянием

$$\varrho(x, A) = \inf_{a\in A} \|x-a\|.$$

Напомним [4], что *суммой* и *разностью Минковского* множеств $A \subset E$ и $B \subset E$ называются соответственно множества

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}, \quad A \stackrel{*}{-} B = \{x \in E \mid x + B \subset A\}.$$

Замечание 2.2. *Непосредственно из определений следует, что*

$$\varrho_M(x, A) = \inf\left\{t > 0 \middle| \ x \in A + tM\right\} = \inf\left\{t > 0 \middle| \ A \bigcap (x - tM) \neq \emptyset\right\}.$$

Пусть $M \subset E$ – квазишар. *M-проекцией* точки $x \in E$ на множество $A \subset E$ называется множество

$$P_M(x, A) = A \bigcap (x - \varrho_M(x, A)M).$$

Также при $\varepsilon > 0$ определим ε-M-проекцию точки $x \in E$ на множество $A \subset E$:

$$P_M^{\varepsilon}(x, A) = A \bigcap \Big(x - (\varrho_M(x, A) + \varepsilon)M\Big).$$

Множеством единичных *проксимальных нормалей* ко множеству $A \subset E$ в точке $a \in A$ относительно квазишара $M \subset E$ называется

$$N_M^1(a, A) = \{z \in E \mid \mu_M(z) = 1, \quad \exists t > 0 :\ a \in P_M(a + tz, A)\}.$$

Множество $C \subset E$ называется *сильно выпуклым относительно квазишара* $M \subset E$, если C выпукло, замкнуто и

$$C - c \subset M - z \qquad \forall\ c \in C, \quad \forall\ z \in N_M^1(c, C).$$

Множество $A \subset E$ называется *слабо выпуклым относительно квазишара* $M \subset E$, если

$$a \in P_M(a + z, A) \qquad \forall\ a \in A, \quad \forall\ z \in N_M^1(a, A).$$

Множество $M \subset E$ называется *параболичным*, если для любого вектора $b \in E$ множество $\left(b + \frac{1}{2}M\right) \setminus M$ ограничено. Множество $M \subset E$ называется *параболичным в усиленном смысле*, если для любого ограниченного множества $B \subset E$ множество $\left(B + \frac{1}{2}M\right) \setminus M$ ограничено. Заметим, что в работе [5] под параболичным множеством понималось множество, параболичное в усиленном смысле.

Множество $M \subset E$ называется *ограниченно равномерно выпуклым*, если

$$\delta_M^d(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, d > 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0,$$

где

$$\delta_M^d(\varepsilon) = \sup\left\{\delta \in \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right] \,\Big|\, B_\delta\left(\frac{x+y}{2}\right) \subset M \quad \forall\, x, y \in M \cap B_d(0): \quad \|x - y\| \geqslant \varepsilon\right\}.$$

Функция $f : E \to \mathbb{R}$ *коэрцитивна*, если $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$.

Надграфиком и *подграфиком* функции $f : E \to \mathbb{R}$ называются соответственно множества

$$\text{epi } f = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} :\, y \geqslant f(x)\}$$

и

$$\text{hypo } f = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} :\, y \leq f(x)\}. \tag{1}$$

Будем считать, что в пространстве $E \times \mathbb{R}$ норма задана следующей формулой: $\|(p, q)\| = \|p\| + |q|$, где $p \in E, \quad q \in \mathbb{R}$.

Множество $A \subset E$ называется *замкнутым* относительно квазишара $M \subset E$ (M-замкнутым), если для любой точки $x \in E \setminus A$ справедливо неравенство $\varrho_M(x, A) > 0$.

Для произвольного множества $A \subset E$ будем рассматривать условие

$$\sup\left\{\frac{\|x - a\|}{\mu_M(x - a)} :\; x \in E \setminus A,\; a \in P_M(x, A),\; \|a\| \leqslant d\right\} < +\infty \qquad \forall d > 0. \tag{a1}$$

В частности, если $P_M(x, A) = \emptyset$ для любого $x \in E \setminus A$, то считаем, что условие (a1) выполнено.

Замечание 2.3. *Если множество $A \subset E$ является замкнутым относительно некоторого квазишара $M \subset E$, то A замкнуто и $M \overset{*}{-} M \subset A \overset{*}{-} A$.*

Доказательство. Так как M – квазишар, то существует число $\sigma > 0$ такое, что $B_\sigma(0) \subset M$. Тогда для любого $x \in E$ справедливо неравенство $\mu_M(x) \leq \frac{\|x\|}{\sigma}$, а значит, $\varrho_M(x, A) \leq \frac{\varrho(x,A)}{\sigma}$. Тогда если $\varrho(x, A) = 0$, то $\varrho_M(x, A) = 0$, а значит, $x \in A$. Следовательно, A замкнуто. Теперь предположим, что $M \overset{*}{-} M \not\subset A \overset{*}{-} A$. Тогда существуют $a \in A, \quad m \in M \overset{*}{-} M$ такие, что $a + m \notin A$. Так как $m \in M \overset{*}{-} M$, $0 \in M$, то $m \in tM$ для любого $t > 0$. Следовательно, $\varrho_M(a + m, A) = 0$. С другой стороны, так как $a + m \notin A$ и A является замкнутым относительно квазишара M, то $\varrho_M(a + m, A) > 0$. Противоречие. □

Замечание 2.4. *Замкнутое множество $A \subset E$, удовлетворяющее включению $M \overset{*}{-} M \subset A \overset{*}{-} A$, может не быть замкнутым относительно квазишара M.*

Доказательство. Возьмем $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant x^2 - 1, x \in \mathbb{R}\}$ – надграфик параболы, а множество $A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$ – прямая. Тогда $M \overset{*}{-} M = \{(0, \lambda), \quad \lambda \geqslant 0\} = A \overset{*}{-} A$. Очевидно, что A – замкнутое множество и $M \overset{*}{-} M \subset A \overset{*}{-} A$, но для любого $z \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ выполнено равенство $\varrho_M(z, A) = 0$. □

Замечание 2.5. *Множество $A \subset E$, замкнутое относительно квазишара $M \subset E$, может не удовлетворять условию* (a1).

Доказательство. Возьмем $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant x^2 - 1, \ x \in \mathbb{R}\}$, $A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$. Проекцией любой точки $z \in E \setminus A$ является точка $0 = (0, 0)$. Рассмотрим последовательность точек вида $z_k = (\frac{1}{k}, 1)$, где $k \in \mathbb{N}$, и точку $z_0 = (0, 1)$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_M(z_k) = \mu_M(z_0) = 0, \quad \|z_k\| > 1$. Следовательно, $\frac{\|z_k - 0\|}{\mu_M(z_k - 0)} \to \infty$ при $k \to \infty$. □

3. Вспомогательные результаты

Лемма 3.1. *Пусть $M \subset E$ – квазишар, $A \subset E$. Тогда*

(i) $\varrho_M(x_1, A) - \varrho_M(x_2, A) \leqslant \mu_M(x_1 - x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in E$;

(ii) для любого вектора $x \in E$ такого, что $\varrho_M(x, A) > 0$, справедливо соотношение

$$x \notin A + \varrho_M(x, A) \operatorname{int} M,$$

если дополнительно для числа $\sigma > 0$ выполнено включение $B_\sigma(0) \subset M$ (такое σ существует, т.к. $0 \in \operatorname{int} M$), то

(iii) функция $\varrho_M(\cdot, A)$ удовлетворяет условию Липшица на E с константой $\frac{1}{\sigma}$ и

(iv) для любых положительных чисел ε_1, ε_2 и векторов $x_1, x_2 \in E$ таких, что $\|x_1 - x_2\| \leqslant \sigma\varepsilon_2$, справедливо включение $P_M^{\varepsilon_1}(x_1, A) \subset P_M^{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}(x_2, A)$.

Доказательство. Утверждение (i) следует из определения M-расстояния и субаддитивности функции Минковского. Если $B_\sigma(0) \subset M$, то $\mu_M(x) \leqslant \frac{\|x\|}{\sigma}$ для любого вектора $x \in E$.

Докажем утверждение (ii). Предположим противное: существует точка $a \in (x - \varrho_M(x, A) \operatorname{int} M) \cap A$. Тогда $\frac{x-a}{\varrho_M(x,A)} \in \operatorname{int} M$. Следовательно, существует число $t \in (0, \varrho_M(x, A))$ такое, что $\frac{x-a}{t} \in M$. Поэтому $x \in A + tM$ и $\varrho_M(x, A) \leqslant t < \varrho_M(x, A)$. Противоречие.

Применяя утверждение (i), получаем утверждение (iii).

Докажем утверждение (iv). Так как $\pm(x_2 - x_1) \in \varepsilon_2 B_\sigma(0) \subset \varepsilon_2 M$, то справедливо неравенство $\max\{\mu_M(x_2 - x_1), \mu_M(x_1 - x_2)\} \leqslant \varepsilon_2$. Отсюда и из утверждения (i) следует, что $\varrho_M(x_1, A) \leqslant \varrho_M(x_2, A) + \varepsilon_2$. Поэтому для любого вектора $a \in P_M^{\varepsilon_1}(x_1, A)$ справедливы неравенства $\mu_M(x_2 - a) \leqslant \varepsilon_2 + \mu_M(x_1 - a) \leqslant \varepsilon_2 + \varrho_M(x_1, A) + \varepsilon_1 \leqslant \varrho_M(x_2, A) + \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$. Следовательно, $a \in P_M^{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}(x_2, A)$.

□

Лемма 3.2. *Если квазишар M является надграфиком выпуклой коэрцитивной функции $f : E \to \mathbb{R}$, то для любой бесконечно малой последовательности положительных чисел ε_k и любой ограниченной последовательности векторов $x_k \in E$ таких, что $x_k \in \varepsilon_k M$ для любого $k \in \mathbb{N}$, справедливо соотношение $\lim\limits_{k\to\infty} \inf\limits_{y \in M \overset{*}{-} M} \|x_k - y\| = 0$.*

Доказательство. Обозначим $M = \operatorname{epi} f$. Предположим противное: пусть существуют $\varepsilon > 0$, бесконечно малая последовательность положительных чисел ε_k и ограниченная последовательность векторов $x_k \in E \times \mathbb{R}$ такие, что $x_k \in \varepsilon_k M$ и $\|x_k - y\| > \varepsilon$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и для любого $y \in M \overset{*}{-} M$. Векторы x_k представим в виде $x_k = (p_k, q_k)$, где $p_k \in E, \quad q_k \in \mathbb{R}$. Так как последовательность $\{x_k\}$ ограничена и $|q_k| \leq \|x_k\|$, то существует некоторая константа C такая, что $q_k \leqslant C$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Так как функция f коэрцитивна, то $M \overset{*}{-} M = \{(0, \lambda), \quad \lambda \geqslant 0\}$. Получаем, что $\|(p_k, q_k) - (0, \lambda)\| > \varepsilon$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, в частности для $\lambda = q_k$. Следовательно, $\|p_k\| > \varepsilon$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Без ограничения общности считаем последовательность $\{\varepsilon_k\}$ монотонной.

Так как $\frac{x_k}{\varepsilon_k} \in \operatorname{epi} f$, то $f\left(\frac{p_k}{\varepsilon_k}\right) \leq \frac{q_k}{\varepsilon_k}$. Из того, что f коэрцитивна, следует, что $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{\varepsilon_k}{\|p_k\|} f\left(\frac{p_k}{\varepsilon_k}\right) = +\infty$. С другой стороны, при всех $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{\varepsilon_k}{\|p_k\|} f\left(\frac{p_k}{\varepsilon_k}\right) \leq \frac{\varepsilon_k}{\|p_k\|} \frac{q_k}{\varepsilon_k} = \frac{q_k}{\|p_k\|} \leq \frac{C}{\varepsilon}.$$

Противоречие. □

Лемма 3.3. *Пусть функция $\alpha : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ полунепрерывна снизу, функция $\mu : E \to \mathbb{R}$ выпукла, непрерывна, коэрцитивна, $\mu(0) < 0$, $M = \operatorname{epi} \mu$ и существует точка $w \in E \times \mathbb{R}$ такая, что $\varrho_M(w, \operatorname{epi} \alpha) > 0$. Тогда множество* epi α *является замкнутым относительно квазишара M.*

Доказательство. Обозначим $A = \mathrm{epi}\ \alpha$, $\varepsilon = \varrho_M(w, A)$. Предположим противное. Тогда существует точка $x \in E \setminus A$ такая, что $\varrho_M(x, A) = 0$. Зафиксируем число $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$ и произвольную бесконечно малую последовательность чисел $\varepsilon_k \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ множество $X_k = (x - \varepsilon_k M) \bigcap A$ не пусто, а значит, содержит некоторую точку x_k. Из параболичности множества M и неравенства $\varepsilon_0 < \varepsilon$ следует, что множество $X_0 = (x - \varepsilon_0 M) \setminus (w - \varepsilon\,\mathrm{int}\ M)$ ограничено. Так как $\varepsilon_k \in (0, \varepsilon_0)$, то $x - \varepsilon_k M \subset x - \varepsilon_0 M$. Поскольку $\varepsilon = \varrho_M(w, A) > 0$, то $A \subset E \setminus (w - \varepsilon\,\mathrm{int}\ M)$. Поэтому $x_k \in X_k \subset X_0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, последовательность $\{x_k\}$ ограничена.

Так как $x - x_k \in \varepsilon_k M$, то из леммы 3.2 следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \inf\limits_{y \in M \overset{*}{-} M} \|x - x_k - y\| = 0$. Векторы x_k и x представим в виде $x_k = (p_k, q_k)$, $x = (p, q)$, где $p_k, p \in E$ и $q_k, q \in \mathbb{R}$. Так как множество M является надграфиком коэрцитивной функции, то $M \overset{*}{-} M = \{(0, \lambda) : 0 \in E, \lambda \geqslant 0\}$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{y \in M \overset{*}{-} M} \|x - x_k - y\| = \lim_{k\to\infty} \left(\|p - p_k\| + \inf_{\lambda \geqslant 0} |q - q_k - \lambda| \right) = 0.$$

Отсюда получаем, что $p_k \to p$ при $k \to \infty$ и $\limsup\limits_{k\to\infty} q_k \leqslant q$. Из ограниченности последовательности $\{x_k\}$ следует ограниченность последовательности $\{q_k\}$. По теореме Больцано–Вейерштрасса из последовательности $\{q_k\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а значит, без ограничения общности можно считать, что $q_k \to q'$ при $k \to \infty$. Так как $x_k = (p_k, q_k) \in A$, $x = (p, q) \notin A$, то $\alpha(p_k) \leqslant q_k$, $\alpha(p) > q$. Используя полунепрерывность снизу функции α и соотношения $p_k \to p$, $q_k \to q'$ при $k \to \infty$, получаем неравенство $\alpha(p) \leqslant q'$. Следовательно, $q' > q$. Это неравенство противоречит равенству $\limsup\limits_{k\to\infty} q_k \leqslant q$.
□

Замечание 3.1. *Условие существования точки $w \in E \times \mathbb{R}$ такой, что $\varrho_M(w, \mathrm{epi}\ \alpha) > 0$, существенно в лемме 3.3.*

Доказательство. Пусть, например, $E = \mathbb{R}$, $\mu(x) = x^2 - 1$, $\alpha(x) = -x^4$ для любого $x \in \mathbb{R}$, $M = \mathrm{epi}\ \mu$. Тогда для любой точки $w \in E \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ выполнено равенство $\varrho_M(w, \mathrm{epi}\ \alpha) = 0$ и множество $\mathrm{epi}\ \alpha$ не является замкнутым относительно квазишара M. □

Лемма 3.4. *Пусть функция $\alpha : E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица на любом ограниченном подмножестве пространства E, функция $\mu : E \to \mathbb{R}$ выпукла, непрерывна, коэрцитивна, $\mu(0) < 0$, $M = \mathrm{epi}\,\mu$ и существует точка $w \in E \times \mathbb{R}$ такая, что $\varrho_M(w, \mathrm{epi}\ \alpha) > 0$. Тогда множество $\mathrm{epi}\ \alpha$ удовлетворяет условию (a1).*

Доказательство. Предположим, что множество A не удовлетворяет условию (a1). Тогда существуют число $d > 0$, а также последовательности $\{x_k\} \subset (E \times \mathbb{R}) \setminus A$ и $\{a_k\} \subset A$ такие, что $\|a_k\| \leq d$ и $a_k \in P_M(x_k, A)$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_k - a_k\|}{\mu_M(x_k - a_k)} = +\infty. \tag{2}$$

Покажем, что последовательность $\{x_k\}$ можно считать ограниченной. Если это не так, то заменим $\{x_k\}$ последовательностью $\{x'_k\}$, где $x'_k = x_k$ при $\|x_k - a_k\| \leq 1$ и $x'_k = a_k + \frac{x_k - a_k}{\|x_k - a_k\|}$ при $\|x_k - a_k\| > 1$. Тогда $a_k \in P_M(x'_k, A)$, $\|x'_k - a_k\| \leq 1$ и $\frac{\|x'_k - a_k\|}{\mu_M(x'_k - a_k)} = \frac{\|x_k - a_k\|}{\mu_M(x_k - a_k)}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Используя ограниченность последовательности $\{a_k\}$, получаем ограниченность последовательности $\{x'_k\}$.

Векторы x_k и a_k представим в виде $x_k = (p_k, q_k)$, $a_k = (r_k, s_k)$, где $p_k, r_k \in E$ и $q_k, s_k \in \mathbb{R}$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ обозначим $\varepsilon_k = \mu_M(x_k - a_k)$. В силу леммы 3.3 множество $A = \mathrm{epi}\ \alpha$ замкнуто относительно квазишара M, следовательно, $\varepsilon_k > 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Из того, что $a_k \in P_M(x_k, A)$, следует, что $a_k \in \partial A$, а значит, $\alpha(r_k) = s_k$. По определению множества M для любого $\sigma > 0$ и для любого $\delta \in [0, 1)$

выполнено включение $\left(\frac{p_k-r_k}{\varepsilon_k}(1-\delta), \mu\left(\frac{p_k-r_k}{\varepsilon_k}(1-\delta)\right)+\sigma\right) \in \operatorname{int} M$. Следовательно, $\left((p_k-r_k)(1-\delta), \varepsilon_k\mu\left(\frac{p_k-r_k}{\varepsilon_k}(1-\delta)\right)+\sigma\varepsilon_k\right) \in \varepsilon_k M$. Так как $(x_k - \varepsilon_k \operatorname{int} M) \cap A = \emptyset$, то $\left((1-\delta)r_k+\delta p_k, q_k-\varepsilon_k\mu\left((1-\delta)\frac{p_k-r_k}{\varepsilon_k}\right)-\sigma\varepsilon_k\right) \notin A$. Переходя к пределу при $\sigma \to 0$, получаем неравенство

$$\alpha((1-\delta)r_k+\delta p_k) \geqslant q_k - \varepsilon_k\mu\left((1-\delta)\frac{p_k-r_k}{\varepsilon_k}\right). \tag{3}$$

Из выпуклости функции μ следует неравенство $\mu\left((1-\delta)\frac{p_k-r_k}{\varepsilon_k}\right) \leq (1-\delta)\mu\left(\frac{p_k-r_k}{\varepsilon_k}\right)+\delta\mu(0)$. Подставляя это в неравенство (3), получаем

$$q_k - \alpha((1-\delta)r_k+\delta p_k) \leq \varepsilon_k(1-\delta)\mu\left(\frac{p_k-r_k}{\varepsilon_k}\right)+\varepsilon_k\delta\mu(0) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Из того, что $\frac{x_k-a_k}{\varepsilon_k} \in \partial M$, следует, что $\mu\left(\frac{p_k-r_k}{\varepsilon_k}\right) = \frac{q_k-\alpha(r_k)}{\varepsilon_k}$. Из липшицевости функции α на любом ограниченом множестве и ограниченности a_k следует, что существует некоторая константа L такая, что $|\alpha(r_k)-\alpha((1-\delta)r_k+\delta p_k)| \leq L\delta\|p_k-r_k\|$. Поэтому $-\alpha((1-\delta)r_k+\delta p_k) \geqslant -L\delta\|p_k-r_k\|-\alpha(r_k)$. Подставляя это в неравенство (4), получаем, что $\varepsilon_k(1-\delta)\mu\left(\frac{p_k-r_k}{\varepsilon_k}\right)+\varepsilon_k\delta\mu(0) \geqslant q_k-\alpha(r_k)-L\delta\|p_k-r_k\| = \varepsilon_k\mu\left(\frac{p_k-r_k}{\varepsilon_k}\right)-L\delta\|p_k-r_k\|$. Следовательно,

$$\mu_M\left(\frac{p_k-r_k}{\varepsilon_k}\right) \leq \mu(0)+L\frac{\|p_k-r_k\|}{\varepsilon_k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда и из коэрцитивности функции μ следует существование числа $C \in \mathbb{R}$ такого, что $\frac{\|p_k-r_k\|}{\varepsilon_k} \leq C$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\frac{q_k-\alpha(r_k)}{\varepsilon_k} = \mu\left(\frac{p_k-r_k}{\varepsilon_k}\right) \leq CL+\mu(0)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. С другой стороны, выпуклая, непрерывная, коэрцитивная функция μ ограничена снизу. Поэтому существует число $C_1 > 0$ такое, что $\mu\left(\frac{p_k-r_k}{\varepsilon_k}\right) \geqslant -C_1$. Тогда по определению нормы в пространстве $E \times \mathbb{R}$ для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем $\frac{\|x_k-a_k\|}{\mu_M(x_k-a_k)} = \frac{\|p_k-r_k\|}{\varepsilon_k}+\frac{|q_k-\alpha(r_k)|}{\varepsilon_k} \leq C+C_1+CL+\mu(0)$, что противоречит (2). □

Лемма 3.5. *Пусть в банаховом пространстве E квазишар M параболичен и ограниченно равномерно выпукл. Пусть множество $D \subset E$ выпукло, замкнуто и $rM \overset{*}{-} (-D) \neq \emptyset$. Пусть множество $A \subset E$ замкнуто и $A + R\operatorname{int} M \neq E$, где $0 < r < R$ и $\varrho_M(D,A) < R-r$. Пусть даны последовательности $\{d_k\} \subset D$ и $\{a_k\} \subset A$ такие, что $\mu_M(d_k-a_k) \to \varrho_M(D,A)$ при $k \to \infty$. Тогда последовательности $\{d_k\}$ и $\{a_k\}$ ограничены.*

Доказательство. Обозначим $\varrho_0 = \varrho_M(D,A)$, $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(R-r-\varrho_0)$ и $\varepsilon_k = \mu_M(d_k-a_k)-\varrho_0$. Поскольку $\varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, то без ограничения общности считаем $\varepsilon_k \leq \varepsilon_0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Так как $A + R\operatorname{int} M \neq E$, то существует вектор $b \in E$ такой, что $A \bigcap (-R\operatorname{int} M + b) = \emptyset$, а значит, $-a_k \in E \setminus (R\operatorname{int} M - b)$. Так как $rM \overset{*}{-} (-D) \neq \emptyset$, то существует вектор $c \in E$ такой, что $-D \subset rM - c$, а значит, $-d_k \in rM - c$. Поскольку $\mu_M(d_k-a_k) = \varrho_0+\varepsilon_k \leq \varrho_0+\varepsilon_0$, то $d_k-a_k \in (\varrho_0+\varepsilon_0)M$. Следовательно, $-d_k \in \Big(E \setminus (R\operatorname{int} M - b)\Big) - (\varrho_0+\varepsilon_0)M$, а $-a_k \in rM - c + (\varrho_0+\varepsilon_0)M$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнены включения

$$-d_k \in (rM-c) \setminus \Big((R-\varrho_0-\varepsilon_0)\operatorname{int} M - b\Big),$$

$$-a_k \in \Big((r+\varrho_0+\varepsilon_0)M - c\Big) \setminus (R\operatorname{int} M - b).$$

Учитывая, что $R > r+\varrho_0+\varepsilon_0$, из параболичности M получаем, что последовательности $\{d_k\}$ и $\{a_k\}$ ограничены. □

Лемма 3.6. *Для любых множеств $A, B, C \subset E$ выполнено неравенство*

$$\varrho_M(A,B) \leq \sup_{c\in C}\inf_{a\in A}\mu_M(a-c)+\varrho_M(C,B).$$

Доказательство. Из определения M-расстояния между множествами, свойств инфимума и субаддитивности функции Минковского получаем

$$\varrho_M(A,B) = \inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}} \mu_M(a-b) \le \inf_{\substack{a\in A\\ b\in B\\ c_0\in C}} \Big(\mu_M(a-c_0)+\mu_M(c_0-b)\Big) \le$$

$$\le \sup_{c\in C} \inf_{\substack{a\in A\\ b\in B\\ c_0\in C}} \Big(\mu_M(a-c)+\mu_M(c_0-b)\Big) = \sup_{c\in C}\inf_{a\in A}\mu_M(a-c)+\varrho_M(C,B).$$

□

Теорема 3.1. (О чебышевском слое, [6]). *Пусть в банаховом пространстве E квазишар M параболичен и ограниченно равномерно выпукл. Пусть множество $A\subset E$ замкнуто и слабо выпукло относительно квазишара RM. Пусть задана точка $x\in E$ такая, что $0<\varrho_M(x,A)<R$. Тогда множество $P_M(x,A)$ одноэлементно.*

Теорема 3.2. (О ближайших точках, [6]). *Пусть в банаховом пространстве E квазишар M параболичен и ограниченно равномерно выпукл. Пусть множество $D\subset E$ сильно выпукло относительно квазишара $-rM$, а множество $A\subset E$ замкнуто и слабо выпукло относительно квазишара RM, где $0<r<R$. Пусть $0<\varrho_M(D,A)<R-r$. Тогда $\min\limits_{d\in D,\ a\in A}\mu_M(d-a)$ достигается в единственной паре точек.*

Лемма 3.7. [6]. *Пусть в банаховом пространстве E заданы ограниченно равномерно выпуклый квазишар M и ограниченные последовательности $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ такие, что*

$$\limsup_{k\to\infty}\mu_M(x_k)\leqslant\mu_1, \qquad \limsup_{k\to\infty}\mu_M(y_k)\leqslant\mu_2, \qquad \liminf_{k\to\infty}\mu_M(x_k+y_k)\geqslant\mu_1+\mu_2,$$

где $\mu_1>0$ и $\mu_2>0$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{x_k}{\mu_1}-\frac{y_k}{\mu_2}\right\|=0.$$

Лемма 3.8. *Пусть в банаховом пространстве E квазишар M параболичен и ограниченно равномерно выпукл. Пусть множество $D\subset E$ сильно выпукло относительно квазишара $-rM$ и $rM \overset{*}{-} (-D)\neq\emptyset$. Пусть множество $A\subset E$ является M-замкнутым, удовлетворяет условию* (a1)*, слабо выпукло относительно квазишара RM и $A+R\,\mathrm{int}\,M\neq E$, где $0<r<R$. Пусть*

$$\inf_{\substack{a\in A\\ d\in D}}\|a-d\|>0. \tag{5}$$

Тогда $\varrho_M(D,A)>0$.

Доказательство. Если $\varrho_M(D,A)\geqslant\frac{R-r}{2}$, то требуемое неравенство доказано. Пусть $\varrho_M(D,A)<\frac{R-r}{2}$. По определению M-расстояния существует последовательность $\{d_n\}\subset D$ такая, что $\varrho_M(d_n,A)\to\varrho_M(D,A)$ при $n\to\infty$. Поскольку $\varrho_M(D,A)<\frac{R-r}{2}$, то без ограничения общности считаем, что $\varrho_M(d_n,A)<\frac{R-r}{2}$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Из неравенства (5) и M-замкнутости A следует, что $\varrho_M(d_n,A)>0$. Тогда по теореме 3.1 для любого $n\in\mathbb{N}$ найдется точка $a_n\in A$ такая, что $\mu_M(d_n-a_n)=\varrho_M(d_n,A)$. Из леммы 3.5 следует ограниченность последовательности $\{a_n\}$. Поэтому в силу того, что множество A удовлетворяет условию (a1), найдется число $C>0$ такое, что $\mu_M(d_n-a_n)\geqslant\frac{\|d_n-a_n\|}{C}$. Тогда $\mu_M(d_n-a_n)\geqslant\frac{\varepsilon}{C}$, где $\varepsilon=\inf\limits_{\substack{d\in D\\ a\in A}}\|d-a\|$. В силу неравенства (5) имеем $\varepsilon>0$. Следовательно, $\varrho_M(D,A)\geqslant\frac{\varepsilon}{C}>0$. □

Лемма 3.9. *Пусть в банаховом пространстве E квазишар M параболичен и ограниченно равномерно выпукл. Пусть множество $D\subset E$ сильно выпукло относительно квазишара $-rM$ и $rM \overset{*}{-} (-D)\neq\emptyset$. Пусть множество $A\subset E$ является M-замкнутым, удовлетворяет условию* (a1)*, слабо выпукло относительно квазишара RM и $A+R\,\mathrm{int}\,M\neq E$, где $0<r<R$. Пусть $\varrho_M(D,A)=0$, $A\bigcap\mathrm{int}\,D=\emptyset$ и $\mathrm{int}\,D\neq\emptyset$. Тогда множество $A\bigcap D$ одноэлементно.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $0 \in \text{int } D$. Поэтому существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(0) \subset \text{int } D$. Рассмотрим множества $D_k = (1 - \frac{1}{k})D$.

Так как $rM \overset{*}{-} (-D) \neq \emptyset$, то существует вектор $w \in E$ такой, что $-D \subset rM - w$. Следовательно, $\mu_M(-d) \leq \mu_M(w) + r$ для любого $d \in D$. Обозначим $C_0 = \mu_M(w)$. Тогда

$$\mu_M(-d) \leq C_0 + r \qquad \forall\, d \in D. \tag{6}$$

Из выпуклости D следует, что $D_k + \frac{1}{k}D = D$. Тогда $D_k + \frac{1}{k}B_\varepsilon(0) \subset \text{int } D$. Получаем, что $(D_k + \frac{1}{k}B_\varepsilon(0)) \bigcap A = \emptyset$. Следовательно, для любых $d \in D_k$, $a \in A$ имеем $a - d \notin \frac{1}{k}B_\varepsilon(0)$. Поэтому

$$\inf_{\substack{a \in A,\\ d \in D_k}} \|a - d\| \geqslant \frac{\varepsilon}{k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Из M-замкнутости A следует, что

$$\varrho_M(d, A) > 0 \quad \forall\, d \in D_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Отсюда $\varrho_M(d, a) > 0$ для любых $a \in A$, $d \in D_k$, $k \in \mathbb{N}$. Из леммы 3.6 получаем, что

$$\varrho_M(D_k, A) \leq \sup_{d \in D} \inf_{d' \in D_k} \mu_M(d' - d) + \varrho_M(D, A) = \sup_{d \in D} \inf_{d' \in D_k} \mu_M(d' - d). \tag{9}$$

Для любого $d \in D$ выберем $d_k = (1 - \frac{1}{k})d$. Тогда, учитывая положительную однородность функции Минковского и неравенство (6), получаем, что $\mu_M(d_k - d) = \frac{1}{k}\mu_M(-d) \leq \frac{1}{k}(C_0 + r)$. Следовательно, для любого $d \in D$ выполнено неравенство $\inf\limits_{d' \in D_k} \mu_M(d' - d) \leq \frac{C_0 + r}{k}$. Отсюда следует, что $\sup\limits_{d \in D} \inf\limits_{d' \in D_k} \mu_M(d' - d) \leq \frac{C_0 + r}{k} \to 0$ при $k \to \infty$. Обозначим $\varrho_k = \varrho_M(D_k, A)$. Используя (9), получаем, что

$$\lim_{k \to \infty} \varrho_k = 0. \tag{10}$$

Поэтому без ограничения общности считаем, что

$$\varrho_k < R - r \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, в силу неравенства (7) из леммы 3.8 следует, что $\varrho_k = \varrho_M(D_k, A) > 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Поэтому по теореме 3.2 о ближайших точках для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют $a_k \in A$, $d_k \in D_k$ такие, что $\mu_M(d_k - a_k) = \varrho_M(D_k, A) = \varrho_k$. Тогда $\varrho_k = \varrho_M(d_k, A)$. Так как множество A слабо выпукло относительно квазишара RM, то $A \bigcap \left(a_k + \frac{d_k - a_k}{\varrho_k}R - R\,\text{int } M\right) = \emptyset$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$-a_n + a_k + \frac{d_k - a_k}{\varrho_k}R \notin R\,\text{int } M \quad \forall\, n, k \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Так как D сильно выпукло относительно квазишара $-rM$, то $D_k \subset d_k - \frac{a_k - d_k}{\varrho_k}r - rM$. Из определения D_k следует, что для любого $n \leqslant k$ выполнено включение $D_n \subset D_k$. Следовательно,

$$d_n \in D_n \subset D_k \subset d_k - \frac{a_k - d_k}{\varrho_k}r - rM \quad \forall\, n \leq k. \tag{12}$$

При всех $k, n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$x_{nk} = -d_n + d_k - \frac{r}{\varrho_k}(a_k - d_k), \qquad y_{nk} = d_n - a_n + \frac{R - r - \varrho_k}{\varrho_k}(d_k - a_k). \tag{13}$$

Тогда

$$\mu_M(y_{nk}) \leq \mu_M(d_n - a_n) + \frac{R - r - \varrho_k}{\varrho_k}\mu_M(d_k - a_k) = \varrho_n + R - r - \varrho_k \quad \forall\, k \geqslant n. \tag{14}$$

Из соотношений (11) – (13) следует, что

$$\mu_M(x_{nk} + y_{nk}) \geqslant R, \qquad \mu_M(x_{nk}) \leq r \quad \forall\ k \geqslant n. \tag{15}$$

Из леммы 3.5 следует, что существует константа $C_d > 0$ такая, что $\|d_k\| \leq C_d$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Так как $\varrho_M(d_k, A) = \mu_M(d_k - a_k)$, то $a_k \in P_M(d_k, A)$. Из того, что множество A удовлетворяет условию (a1), получаем, что существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|a_k - d_k\| \leq C\varrho_k \quad \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Тогда

$$\|x_{nk}\| \leq 2C_d + rC, \quad \|y_{nk}\| \leq C\varrho_n + C(R-r) \leq 2(R-r)C \quad \forall\ k \geqslant n.$$

Применяя лемму 3.7 и используя неравенства (14), (15), получаем, что

$$\lim_{k,n\to\infty} \left\| \frac{x_{nk}}{r} - \frac{y_{nk}}{R-r} \right\| = 0,$$

то есть согласно (13) имеем

$$\lim_{k,n\to\infty} \frac{\|R(d_k - d_n) + r(a_n - a_k)\|}{r(R-r)} = 0. \tag{17}$$

Из (10) и (16) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \|a_k - d_k\| = 0. \tag{18}$$

Тогда в силу (17) имеем $\|d_k - d_n\| \to 0$ при $k, n \to \infty$, то есть последовательность $\{d_k\}$ фундаментальна, а значит, сходится к некоторому $d_0 \in E$. Из (18) следует, что $a_k \to d_0$ при $k \to \infty$. Отсюда и из замкнутости множеств A и D следует, что $d_0 \in A \cap D$. Докажем, что множество $A \cap D$ не содержит других элементов. Предположим, что $d_0' \in A \cap D$. Рассмотрим последовательность

$$d_k = \begin{cases} d_0, & k \text{ четно}, \\ d_0', & k \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Так как в силу доказанного последовательность $\{d_k\}$ сходится, то $d_0 = d_0'$. $\square$

Лемма 3.10. *Пусть пространство E банахово, квазишар M параболичен и ограниченно равномерно выпукл; множество $A \subset E$ замкнуто и слабо выпукло с константой $R > 0$ и существует точка $x_0 \in E$ такая, что $\varrho_M(x_0, A) > 0$. Тогда*

$$A + R \operatorname{int} M \neq E.$$

Доказательство. Из пункта (iii) леммы 3.1 следует, что функция $\varrho_M(\cdot, A)$ непрерывна на E. Так как $\varrho_M(x_0, A) > 0$ и $\varrho_M(a, A) = 0$, где $a \in A$, то существует точка $x \in E$ такая, что $0 < \varrho_M(x, A) < R$. Следовательно, по теореме 3.1 существует $a \in P_M(x, A)$. Полагая $y = a + \frac{R}{\mu_M(x-a)}(x-a)$, в силу слабой выпуклости множества A получаем равенство $\varrho_M(y, A) = R$. Отсюда согласно лемме 3.1(ii) имеем $y \notin A + R \operatorname{int} M$. $\square$

4. Основные результаты

Теорема 4.1. *Пусть M – квазишар в банаховом пространстве E, множество $C \subset E$ сильно выпукло относительно квазишара rM, множество $A \subset E$ слабо выпукло относительно квазишара RM и $0 < r < R$. Тогда множество $A + C$ слабо выпукло относительно квазишара $(R - r)M$.*

Доказательство. Пусть $y \in P_M(x, A+C)$. Тогда $y = a + c$, где $a \in A$, $c \in C$. При этом $a \in P_M(x-c, A)$, $c \in P_M(x-a, C)$. Используя то, что множество A слабо выпукло относительно квазишара RM, а множество C сильно выпукло относительно квазишара rM, получаем включения

$$C - c \subset rM - r\frac{x-y}{\mu_M(x-y)}, \qquad A \bigcap \left(a + R\frac{x-y}{\mu_M(x-y)} - R \operatorname{int} M\right) = \emptyset.$$

Отсюда следует, что

$$(A+C) \bigcap \left(y + (R-r)\frac{x-y}{\mu_M(x-y)} - (R-r) \operatorname{int} M\right) = \emptyset.$$

□

Теорема 4.2. *Пусть в банаховом пространстве E квазишар M параболичен и ограниченно равномерно выпукл. Пусть множество $C \subset E$ сильно выпукло относительно квазишара rM, $rM \stackrel{*}{-} C \neq \emptyset$ и $\operatorname{int} C \neq \emptyset$. Пусть множество $A \subset E$ является M-замкнутым, удовлетворяет условию* (a1) *и слабо выпукло относительно квазишара RM, где $0 < r < R$. Тогда множество $A + C$ является M-замкнутым и слабо выпуклым относительно квазишара $(R-r)M$. Если квазишар M является параболичным в усиленном смысле, то множество $A + C$ удовлетворяет условию* (a1).

Доказательство. В силу теоремы 4.1 множество $A + C$ слабо выпукло относительно квазишара $(R-r)M$. Покажем, что множество $A+C$ является M-замкнутым. Если $A = E$, то утверждение теоремы тривиально. Пусть теперь $A \neq E$. Тогда из M-замкнутости A следует, что для любой точки $x \in E \setminus A$ выполнено $\varrho_M(x, A) > 0$. Следовательно, по лемме 3.10 имеем $A + R \operatorname{int} M \neq E$. Предположим, что существует точка $x \in E \setminus (A + C)$ такая, что $\varrho_M(x, A + C) = 0$. Определим $D = x - C$. Тогда $\varrho_M(D, A) = 0$ и $D \bigcap A = \emptyset$. Это противоречит лемме 3.9. Следовательно, множество $A + C$ является M-замкнутым.

Пусть теперь квазишар M является параболичным в усиленном смысле. Предположим, что множество $A+C$ не удовлетворяет условию (a1). Тогда существуют последовательность $\{x_n\} \subset E \setminus (A+C)$ и ограниченная последовательность $\{f_n\}$, где $f_n \in P_M(x_n, A+C) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n - f_n\|}{\mu_M(x_n - f_n)} = +\infty. \tag{19}$$

Так как $f_n \in A + C$, то существуют последовательности $\{a_n\} \subset A$, $\{c_n\} \subset C$ такие, что $f_n = a_n + c_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Из ограниченности последовательности $\{f_n\}$ следует, что существует константа $\varrho_0 > 0$ такая, что

$$a_n + c_n \in \varrho_0 B_1(0) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Поскольку $\{c_n\} \subset C$ и $rM \stackrel{*}{-} C \neq \emptyset$, то существует вектор $c \in E$ такой, что $c_n \in c + rM$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда и из включения (20) получаем, что

$$a_n \in \varrho_0 B_1(0) - c - rM \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Так как $\{a_n\} \subset A$ и $A + R \operatorname{int} M \neq E$, то существует вектор $a \in E$ такой, что $a_n \in E \setminus (a - R \operatorname{int} M)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда согласно (21) имеем $a_n \in (\varrho_0 B_1(0) - c - rM) \setminus (a - R \operatorname{int} M)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как множество M параболично в усиленном смысле, то последовательность $\{a_n\}$ ограничена.

Поскольку

$$\mu_M(x_n - a_n - c_n) = \varrho_M(x_n, A+C) = \inf_{a \in A, c \in C} \mu_M(x_n - c - a) = \inf_{a \in A} \mu_M(x_n - c_n - a) = \varrho_M(x_n - c_n, A),$$

то $a_n \in P_M(x_n - c_n, A)$. Из того, что множество A удовлетворяет условию (a1), получаем, что существует константа $L > 0$ такая, что

$$\frac{\|x_n - c_n - a_n\|}{\mu_M(x_n - c_n - a_n)} \leq L \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

что противоречит соотношению (19). $\square$

Замечание 4.1. *В теореме 4.2 условие M-замкнутости множества A существенно.*

Доказательство. Пусть функция $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определена формулой $m(x) = x^2 - 1$, а множество $M = \operatorname{epi} m$. Пусть задана функция $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\alpha(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x > 0 \\ -\infty, & x \leq 0. \end{cases}$$

Множество $A = \operatorname{hypo} \alpha$ (см. (1)), а множество $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in [-1, 1]\,, y \geqslant x^2\right\}$. Тогда множество A выпукло, а значит, согласно лемме 3.2 из работы [6], слабо выпукло относительно квазишара $2M$. Множество A тривиально удовлетворяет условию (a1). Множество C сильно выпукло относительно квазишара M, $M \overset{*}{-} C \neq \emptyset$ и $\operatorname{int} C \neq \emptyset$. Однако $(-1, 0) \in \overline{A + C}$, но $(-1, 0) \notin A + C$. Поэтому множество $A + C$ не замкнуто и тем более не является M-замкнутым. $\square$

Следующая лемма показывает, что если в теореме 4.2 множества A, C, M являются надграфиками функций, заданных в конечномерном пространстве, то для замкнутости суммы $A + C$ условие (a1) не является существенным. Является ли это условие существенным в случае, когда множества A, C, M являются надграфиками функций, заданных в бесконечномерном банаховом (или гильбертовом) пространстве – открытый вопрос.

Лемма 4.1. *Пусть в пространстве $E = \mathbb{R}^n$ квазишар M является надграфиком коэрцитивной функции $m : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$. Пусть множество $C \subset E$ является надграфиком выпуклой полунепрерывной снизу функции $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ и сильно выпукло относительно квазишара rM, $rM \overset{*}{-} C \neq \emptyset$ и $\operatorname{int} C \neq \emptyset$. Пусть множество $A \subset E$ является надграфиком полунепрерывной снизу функции $\alpha : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, слабо выпукло относительно квазишара RM, где $0 < r < R$ и $A + R \operatorname{int} M \neq E$. Тогда множество $A + C$ замкнуто.*

Доказательство. Предположим, что множество $A+C$ не замкнуто. Тогда существует точка $x_0 \notin A + C$ такая, что $x_0 \in \overline{A + C}$. Определим $D = x_0 - C$. Тогда $\varrho_M(D, A) = 0$ и

$$A \bigcap D = \emptyset. \tag{22}$$

По определению M-расстояния между множествами существуют последовательности $\{a_k\} \subset A$ и $\{d_k\} \subset D$ такие, что $\mu_M(d_k - a_k) \to \varrho_M(D, A)$ при $k \to \infty$. Из леммы 3.5 следует, что эти последовательности ограничены. Тогда по теореме Больцано–Вейерштрасса из них можно выделить сходящиеся подпоследовательности. Поэтому без ограничения общности считаем, что существуют $a = (x, y), d = (x', y')$ такие, что $x, x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y, y' \in \mathbb{R}$ и $a_k \to a$, $d_k \to d$ при $k \to \infty$.

Так как A и C – замкнуты, то $a \in A$, $d \in D$ и $\mu_M(d - a) = 0$. Следовательно, $d - a \in M \overset{*}{-} M$. Так как M – надграфик коэрцитивной функции, то $M \overset{*}{-} M = \{(0, \lambda) |\, 0 \in \mathbb{R}^{n-1}, \lambda \geqslant 0\}$. Отсюда получаем, что $x = x'$ и $y' \geqslant y$. Следовательно, $d \in A$, что противоречит (22). $\square$

Работа поддержана РФФИ, проект 13-01-00295-а.

Литература

1. *Clarke F. H., Stern R. J., Wolenski P. R.* Proximal Smoothness and Lower–C^2 Propoerty // Journal of Convex Analysis. — 1995. — V. 2, N 1, 2. — P. 117–144.
2. *Bernard F., Thibault L., Zlateva N.* Characterization of proximal regular sets in super reflexive Banach spaces // Journal of Convex Analysis. — 2006. — V. 13, N 3, 4. — P. 525–559.
3. *Иванов Г.Е.* Перестановочность операций суммы и разности Минковского для множеств в равномерно выпуклом банаховом пространстве // Современные проблемы фундаментальной и прикладной математики: сб. науч. тр. — М. : МФТИ, 2008. — С. 32–55.
4. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М. : Физматлит, 2007.
5. *Иванов Г. Е.* Аппроксимативные свойства множеств относительно функции Минковского // Проблемы фундаментальной и прикладной математики. — М. : МФТИ, 2009. — С. 76–105.
6. *Иванов Г. Е., Лопушански М. С.* Аппроксимативные свойства слабо выпуклых множеств в пространствах с несимметричной полунормой // Труды МФТИ. — 2012. — Т. 4, N 4. — С. 94–104.

Поступила в редакцию 24.05.2013.