

УДК 535.3

В. А. Астапенко, С. В. Сахно, Е. В. Сахно

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Обобщение принципа спектроскопического соответствия на временную зависимость квантовых переходов

Обобщается общеизвестный принцип спектроскопического соответствия для временной зависимости квантовых переходов путем сравнения зависимости энергии электромагнитного импульса от времени, поглощаемого двухуровневой системой и классическим линейным осциллятором. Формулы для зависимостей, упомянутых выше, получены для двух случаев: систем с релаксацией и без нее. Показано, что в первом случае результаты для квантовых и классических систем в точности совпадают. Если релаксация достаточно велика, заметна разница между двумя временными зависимостями поглощенной энергии.

Ключевые слова: принцип спектроскопического соответствия, квантовый переход, двухуровневая система, классический линейный осциллятор.

V. A. Astapenko, S. V. Sakhno, E. V. Sakhno

Moscow Institute of Physics and Technology

Generalization of the spectroscopic correspondence principle on time dependence of quantum transitions

In this work, we generalize the well-known spectroscopic correspondence principle on time dependence of quantum transitions by comparing the time dependence of the energy of an electromagnetic pulse absorbed by the two-level system and classical linear oscillator. Formulas for the above-mentioned dependences are derived for two cases, viz. systems with and without relaxation. It is shown that in the first case the results for quantum and classical systems coincide exactly. If the relaxation is sufficiently large, there is a noticeable difference between two time dependences of absorbed energy.

Key words: spectroscopic correspondence principle, quantum transition, two-level system, classical linear oscillator

1. Введение

Спектроскопический принцип соответствия между классическим и квантовым подходом в описании взаимодействия между электромагнитным полем и атомом заключается в следующем [1]: атом представляется в виде набора классических осцилляторов (т.н. осцилляторов перехода), отвечающих дипольно-разрешенным переходам между состояниями дискретного спектра. Собственные частоты этих осцилляторов равны боровской частоте перехода между заданными состояниями, а отклик на электромагнитное воздействие пропорционален безразмерной величине – силе осциллятора перехода. С помощью принципа соответствия можно количественно описать ряд важных радиационных процессов и атомных характеристик, не прибегая к формализму квантовой механики. Так, например, выводится выражение для динамической поляризуемости атома [2], а также формулы для

© Астапенко В. А., Сахно С. В., Сахно Е. В., 2021

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

сечения рассеяния света [3] и для сечения фотопоглощения излучения в дискретном атомном спектре.

Более общий принцип соответствия между классической и квантовой механикой состоит в следующем: квантово-механические формулы получаются из классических, если в последних фурье-образы физических величин заменить на матричные элементы операторов, отвечающих данным величинам, вычисленных на частотах, равных частотам переходов между квантовыми состояниями [4].

Оба вышеуказанные принципа не рассматривают временной зависимости квантового перехода, которая в настоящее время становится физически измеримой величиной в связи с развитием экспериментальных методов аттосекундной физики, таких как: self-referenced attosecond photoelectron interferometry [5], an interferometric technique combining high temporal and spectral resolution [6], the combination of transient absorption and ion mass spectroscopy with attosecond resolution [7].

Экспериментально и теоретически исследуются следующие фотопроцессы с аттосекундным временным разрешением: фотоионизация хиральных молекул [5], атомов гелия [8], неона [6] и криптона [7], динамика электронов в многоэлектронных атомах [9], динамика фотовозбуждения атома водорода [10], динамика формирования резонанса Фано [11–13].

Вследствие этого обобщение принципа соответствия между классической и квантовой физикой на временную зависимость квантового перехода становится актуальным вопросом, которому и посвящена данная работа.

2. Обобщение принципа спектроскопического соответствия для временной зависимости квантовых переходов

Рассмотрим принцип соответствия путем сравнения временной зависимости энергии ЭМИ, поглощенной классическим осциллятором — $\varepsilon_{clas}(t)$, и осциллятором перехода в квантовой двухуровневой системе — $\varepsilon_{quant}(t)$ к заданному моменту времени t . Полагаем, что классический осциллятор имеет элементарный заряд и массу, равную массе электрона. Для простоты считаем, что сила осциллятора ДС равна единице: $f_0 = 1$.

В атомных единицах $\hbar = e = m_e = 1$ для энергии ЭМИ, поглощенной классическим осциллятором к моменту времени t , имеем (см. Приложение 1):

$$\varepsilon_{clas}(t) = \int_{-\infty}^t dt' E(t') v(t') = \int_{-\infty}^t dt' E(t') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} E(\omega') \frac{i\omega' \exp(-i\omega't')}{\omega'^2 - \omega_0^2 + 2i\omega'\gamma}. \quad (1)$$

Здесь $E(t')$ — напряженность электрического поля в ЭМИ, $E(\omega')$ — его фурье-образ, ω_0 — собственная частота классического осциллятора, равная частоте перехода в ДС, γ — константа релаксации классического осциллятора, равная спектральной ширине линии в ДС, $v(t')$ — скорость осциллятора в заданный момент времени. Предполагается, что $E(t \rightarrow -\infty) = 0$ и $\varepsilon(t \rightarrow -\infty) = 0$ для классического осциллятора и ДС. Отметим, что интеграл по частоте в правой части равенства (1) представляет собой скорость классического осциллятора в момент времени t' .

Для энергии, поглощенной квантовой ДС к заданному моменту времени, можно получить в рамках первого порядка теории возмущений следующее выражение:

$$\varepsilon_{quant}(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\omega' G(\omega') \left| \int_{-\infty}^t E(t') \exp(i\omega't') dt' \right|^2, \quad (2)$$

где $G(\omega')$ — спектральная форма линии дипольно-разрешенного перехода в ДС. Формула (2) выводится аналогично тому, как это было сделано в статье [10] при выводе вероятности возбуждения радиационного перехода между состояниями дискретного спектра (см. Приложение 2).

3. Предел больших времен

Получим сначала выражения для поглощенной энергии за все время действия импульса при $t \rightarrow \infty$. Физически данное условие соответствует временам, много большим длительности ЭМИ. В квантовом случае возбуждения ДС результат непосредственно вытекает из формулы (2):

$$\varepsilon_{quant}(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\omega' G(\omega') |E(\omega')|^2. \quad (3)$$

Выражение для энергии, поглощенной классическим осциллятором за все время действия импульса, следует из (1). После ряда алгебраических преобразований имеем

$$\varepsilon_{clas}(t \rightarrow \infty) = \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} |E(\omega')|^2 \frac{4\omega'^2\gamma}{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega'^2\gamma^2}. \quad (4)$$

Заметим, что формулы (3) и (4) совпадают, если форма линии в выражении (3) равна

$$\tilde{G}_{osc}(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{4\omega^2\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}. \quad (5)$$

Функцию $\tilde{G}_{osc}(\omega)$ назовем *осцилляторной* формой линии. В пределе

$$\gamma \ll \omega_0 \quad (6)$$

$\tilde{G}_{osc}(\omega)$ совпадает с лоренцевской формой линии

$$G_L(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}. \quad (7)$$

Как известно, форма линии (7) отвечает однородному уширению спектральной линии, вызванному, например, спонтанным излучением. Таким образом, имеется соответствие между энергией, поглощенной классическим осциллятором за все время действия ЭМИ, с энергией, поглощенной квантовой ДС, а именно: эти энергии совпадают, если выполняется условие (6). Заметим, что в случае возбуждения переходов в дискретном атомном спектре неравенство (6) выполняется с большим запасом. Так, например, для перехода 1s–2p в атоме водорода, когда ширина линии обусловлена спонтанным излучением, отношение $\omega_0/\gamma \approx 10^7$.

4. Случай отсутствия релаксации/нулевой ширины спектральной линии ($\gamma = 0$)

Получим из (1) формулу для поглощенной классическим осциллятором энергии в случае $\gamma = 0$. Выражая согласно определению фурье-образ напряженности электрического поля через функцию $E(t)$, имеем

$$\varepsilon_{clas}(t) = \int_{-\infty}^t dt' E(t') \int_{-\infty}^{\infty} dt'' E(t'') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{i\omega' \exp(-i\omega'(t' - t''))}{\omega'^2 - \omega_0^2 - 2i\omega'\gamma}. \quad (8)$$

Интеграл по частоте в правой части равенства (8) можно вычислить с помощью теоремы о вычетах. В пределе $\gamma \rightarrow 0$ этот интеграл равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{i\omega' \exp(-i\omega'(t' - t''))}{\omega'^2 - \omega_0^2 - 2i\omega'\gamma} = \theta(t' - t'') \cos[\omega_0(t' - t'')], \quad (9)$$

где $\theta(\tau)$ — тета-функция Хэвисайда.

Подставляя правую часть равенства (9) в формулу (8), находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{clas}(t) &= \int_{-\infty}^t dt' E(t') \int_{-\infty}^{t'} dt'' E(t'') \cos[\omega_0(t' - t'')] = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t dt' E(t') \int_{-\infty}^{t'} dt'' E(t'') \cos[\omega_0(t' - t'')] = \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^t dt' E(t') \exp(i\omega_0 t') \right|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

При переходе ко 2-му равенству в (10) было использовано то обстоятельство, что подынтегральная функция симметрична относительно перестановки переменных интегрирования: $t' \leftrightarrow t''$.

В квантовом случае, в пределе $\gamma \rightarrow 0$, спектральная форма линии становится равной дельта-функции Дирака:

$$G_L(\gamma \rightarrow 0) \rightarrow \delta(\omega_0 - \omega). \quad (11)$$

Подставляя (11) в (2), получаем

$$\varepsilon_{quant}(t) = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^t E(t') \exp(i\omega_0 t') dt' \right|^2. \quad (12)$$

Из сравнения формул (10) и (12) следует, что в пределе нулевой ширины линии (для ДС) или в отсутствие релаксации (для классического осциллятора) выражения для временной зависимости поглощенной энергии ЭМИ в классическом и квантовом случаях совпадают.

5. Временная зависимость поглощенной энергии в общем случае ($\gamma \neq 0$)

Проведем в общем случае ($\gamma \neq 0$) численное сравнение временной зависимости энергии, поглощенной классическим осциллятором (по формуле (1)) и квантовой ДС (по формуле (2)) для ЭМИ с гауссовской огибающей:

$$E(t) = E_0 \exp(-t^2/2\tau^2) \cos(\omega t). \quad (13)$$

Здесь E_0 , τ и ω — амплитуда, длительность и несущая частота ЭМИ.

Рассмотрим возбуждение ДС с двумя формами спектральной линии (5) и (7). В расчетах полагаем, что $E_0 = 0.03$, $\omega_0 = 0.375$. Данное значение собственной частоты отвечает переходу 1s-2p в атоме водорода (в атомных единицах).

Результаты вычислений приведены на рис. 1–4 для различных констант релаксации γ и параметров ЭМИ.

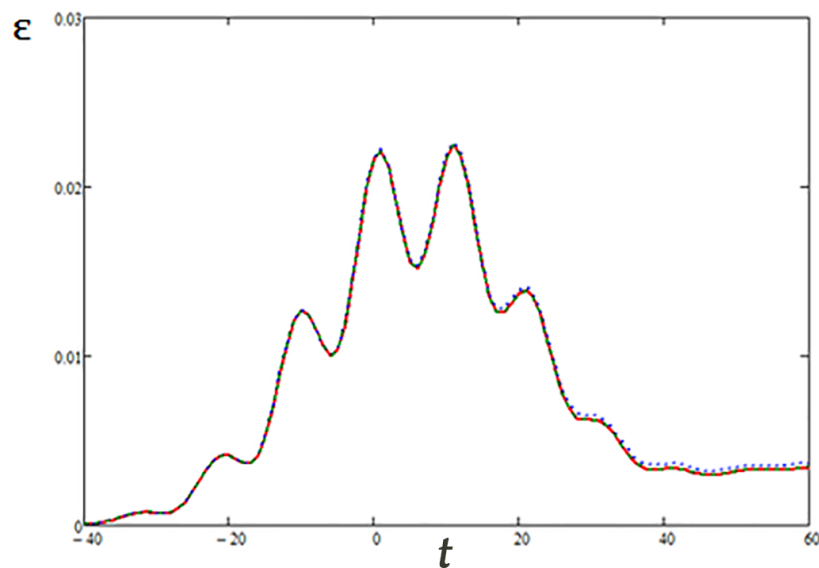


Рис. 1. Временная зависимость поглощенной энергии ЭМИ: сплошная кривая – для классического осциллятора, пунктир – для ДС с лоренцевской формой спектральной линии, штриховая кривая – для ДС с «осцилляторным» профилем спектральной линии; $\gamma = 10^{-3}$, $\omega = 0.25$, $\tau = 20$

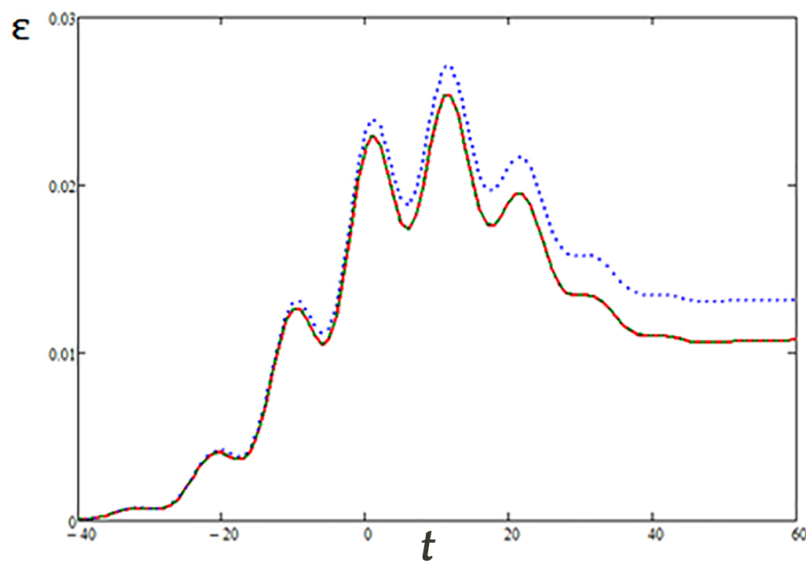


Рис. 2. Временная зависимость поглощенной энергии ЭМИ: сплошная кривая – для классического осциллятора, пунктир – для ДС с лоренцевской формой спектральной линии, штриховая кривая – для ДС с «осцилляторным» профилем спектральной линии; $\gamma = 10^{-2}$, $\omega = 0.25$, $\tau = 20$

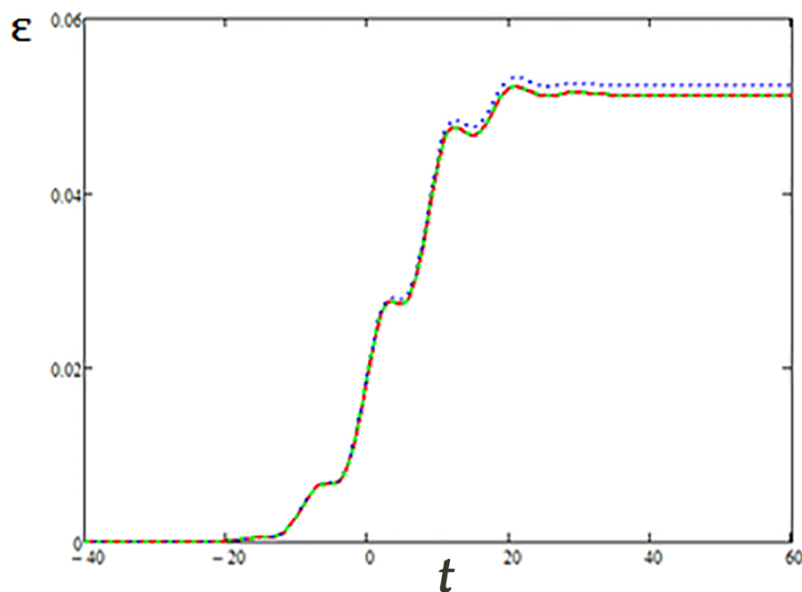


Рис. 3. Временная зависимость поглощенной энергии ЭМИ: сплошная кривая – для классического осциллятора, пунктир – для ДС с лоренцевской формой спектральной линии, штриховая кривая – для ДС с «осцилляторным» профилем спектральной линии; $\gamma = 10^{-2}$, $\omega = 0.25$, $\tau = 8$

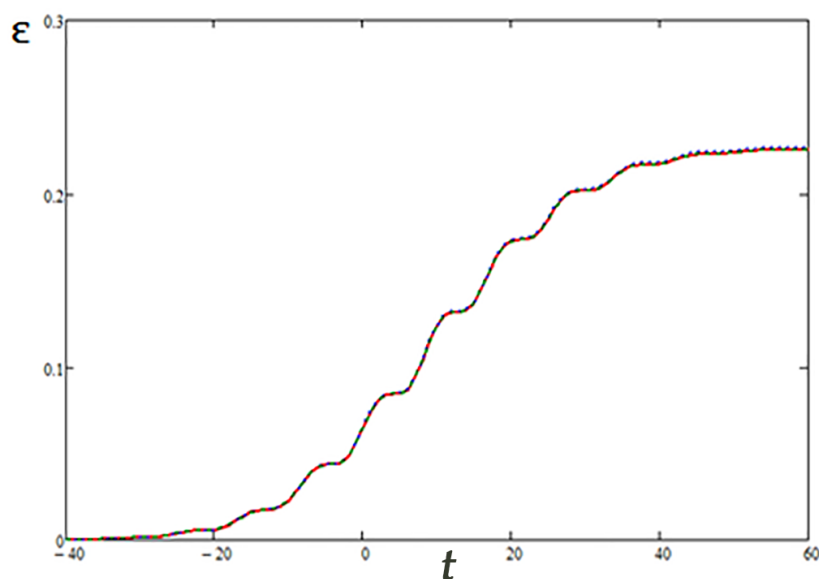


Рис. 4. Временная зависимость поглощенной энергии ЭМИ: сплошная кривая – для классического осциллятора, пунктир – для ДС с лоренцевской формой спектральной линии, штриховая кривая – для ДС с «осцилляторным» профилем спектральной линии; $\gamma = 10^{-2}$, $\omega = 0.35$, $\tau = 20$

Из приведенных рисунков видно, что для достаточно малых констант релаксации/ширин линии — $\gamma < 10^{-3}$ — все три кривые практически совпадают. Для больших значений γ возникает отличие временной зависимости поглощенной энергии ДС с лоренцевским контуром от двух других кривых. Это различие тем больше, чем больше отстройка несущей частоты ЭМИ от собственной частоты системы и уменьшается с укорочением ЭМИ. Кривая, соответствующая «осцилляторному» спектральному контуру всегда совпадает с кривой для классического осциллятора.

Приложение 1

Для энергии ЭМИ, поглощенной классическим осциллятором к моменту времени t , имеем

$$\varepsilon_{clas}(t) = \int_{-\infty}^t \dot{x}(t')E(t')dt'. \quad (1.1)$$

Решение уравнения для гармонического осциллятора имеет следующий вид (см., например, [14]):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(\omega') \exp(-i\omega't) d\omega'}{\omega_0^2 - \omega'^2 - 2i\gamma\omega'} \frac{d\omega'}{2\pi}. \quad (1.2)$$

Из формулы (1.2) вытекает выражение

$$\dot{x}(t) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' E(\omega') \exp(-i\omega't) d\omega'}{\omega_0^2 - \omega'^2 - 2i\gamma\omega'} \frac{d\omega'}{2\pi}. \quad (1.3)$$

Подставляя формулу (1.3) в (1.1), получаем

$$\varepsilon_{clas}(t) = \int_{-\infty}^t dt' E(t') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} E(\omega') \frac{i\omega' \exp(-i\omega't')}{\omega'^2 - \omega_0^2 + 2i\omega'\gamma}. \quad (1.4)$$

Приложение 2

Вероятность фотовозбуждения в заданный момент времени под действием поля $E(t)$ (предполагаем, что $E(t \rightarrow \pm\infty) = 0$ в дипольном приближении и первом порядке теории возмущения) имеет следующий вид [15]:

$$W(t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t dt'' \langle \hat{d}(t') \hat{d}(t'') \rangle E(t') E(t''). \quad (2.1)$$

Угловые скобки обозначают усреднение по начальному состоянию мишени. В формуле (2.1) используется коррелятор дипольных моментов (КДМ), который для стационарной системы может быть представлен в виде [16]:

$$\langle \hat{d}(t') \hat{d}(t'') \rangle = K(t', t'') = K(t'' - t'). \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получаем

$$W(t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t dt'' K(t'' - t') E(t') E(t''). \quad (2.3)$$

Фурье-образ КДМ имеет следующий вид [16]:

$$K(t'' - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega(t'' - t')) K(\omega). \quad (2.4)$$

Далее используем связь КДМ с сечением фотовозбуждения [16]:

$$K(\omega) = \frac{c}{2\pi\omega} \sigma(\omega). \quad (2.5)$$

Применяя простые преобразования:

$$W(t) = \frac{c}{4\pi^2} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t dt'' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega(t' - t'')) \frac{\sigma(\omega)}{\omega} E(t') E(t'') \quad (2.6)$$

и

$$W(t) = \frac{c}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega \frac{\sigma(\omega)}{\omega} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t dt'' \exp(-i\omega(t'' - t')) E(t') E(t''), \quad (2.7)$$

получаем следующую формулу:

$$W(t) = \frac{c}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega \frac{\sigma(\omega)}{\omega} \left| \int_{-\infty}^t \exp(i\omega t') E(t') dt' \right|^2. \quad (2.8)$$

Из формулы (2.8) следует выражение для дифференциальной вероятности поглощения, которая обусловлена монохроматической составляющей на частоте ω :

$$\frac{dW(t)}{d\omega} = \frac{c}{4\pi^2} \frac{\sigma(\omega)}{\omega} \left| \int_{-\infty}^t \exp(i\omega t') E(t') dt' \right|^2. \quad (2.9)$$

Для дифференциальной энергии, поглощаемой на частоте ω , имеем

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} = \omega \frac{dW}{d\omega}. \quad (2.10)$$

Тогда для полной энергии получаем

$$\varepsilon = \int \frac{d\varepsilon}{d\omega} d\omega = \int \omega \frac{dW}{d\omega} d\omega. \quad (2.11)$$

Далее, в формулу (2.11) подставляем (2.9), при этом учитываем явное выражение для сечения фотовозбуждения мишени $\sigma(\omega)$ [16]:

$$\sigma(\omega) = \frac{2\pi^2}{c} G(\omega), \quad (2.12)$$

где $G(\omega)$ – спектральная форма линии.

Тогда получаем итоговую формулу:

$$\varepsilon_{quant}(t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega' G(\omega') \left| \int_{-\infty}^t E(t') \exp(i\omega' t') dt' \right|^2. \quad (2.13)$$

Заключение

Таким образом, на примере исследования временных зависимостей поглощения энергии ЭМИ классическим осциллятором и квантовой ДС показано, что с точностью до учета различия формы спектральной линии (существенной только для больших констант релаксации) эти зависимости совпадают. Тем самым принцип соответствия между классической и квантовой физикой обобщен на временную эволюцию квантового перехода.

Другой важный вывод из проведенных расчетов заключается в том, что для больших частотных отстроек и длинных импульсов временная зависимость поглощенной энергии имеет форму кривой с явно выраженным максимумом. В противоположном пределе максимум исчезает, и временная зависимость становится монотонной. Качественно наличие максимума во временной зависимости поглощенной энергии можно объяснить тем, что при больших частотных отстройках и длинных импульсах электромагнитное поле и осциллятор в течение второй половины длительности импульса колеблются в противофазе, так что поле тормозит осциллятор, и его энергия уменьшается.

Литература

1. Bohr N., Kramers H.A., Slater J.C. The Quantum Theory of Radiation // Phil. Mag. 1924. V. 47. P. 785–802.
2. Kramers H.A. The law of dispersion and Bohr's theory of spectra // Nature. 1924. V. 113. P. 673–676.
3. Kramers H.A., Heisenberg W. Über die Streuung von Strahlung durch Atome // Zeitschrift für Physik. 1925. V. 31. P. 681–708.
4. Rosmej F.B., Lisitsa V.S., Astapenko V.A. Plasma Atomic Physics // Springer, Springer Series on Atomic, Optical and Plasma Physics. 2020. V. 104.
5. Beaulieu S., Comby A., Clergerie A. [et al.]. Attosecond-resolved photoionization of chiral molecules // Science. 2017. V. 358. P. 1288–1294.
6. Isinger M., Squibb R.J., Busto D. [et al.]. Photoionization in the time and frequency domain // Science. 2017. V. 358. P. 893–896.
7. Hütten K., Mittermair M., Stock S. [et al.]. Ultrafast quantum control of ionization dynamics // EPJ Web of Conferences. 2019. V. 205. 06001.
8. Argenti L., Pazourek R., Feist J. [et al.]. Photoionization of helium by attosecond pulses: Extraction of spectra from correlated wave functions // Physical Review. 2013. V. 87. 053405.
9. Nicolaides C.A. Attosecond-Resolved Electron Dynamics in Many-Electron Atoms: Quantitative Theory and Comparison with Measurements // Appl. Sci. 2018. V. 8. 533.
10. Астапенко В.А. Аттосекундная динамика фотовозбуждения атома водорода ультракороткими лазерными импульсами // ЖЭТФ. 2020. Т. 157. С. 67–73.
11. Golovinski P.A., Yakovets A.V., Astapenko V.A. Linear build-up of Fano resonance spectral profiles // Applied Physics B. 2018. 124:111.
12. Kaldun A., Blüttermann A., Donsa S. [et al.]. Observing the ultrafast buildup of a Fano resonance in the time domain // Science. 2016. V. 354. P. 738–740.
13. Gruson V., Barreau L., Jiménez-Galan Á. [et al.]. Attosecond dynamics through a Fano resonance: Monitoring the birth of a photoelectron // Science. 2016. V. 354. P. 734–737.
14. Astapenko V.A. Interaction of Ultrashort Electromagnetic Pulses with matter. Springer, 2013.
15. Клышко Д.Н. Фотоны и нелинейная оптика. Москва : Наука, 1980.
16. Astapenko V.A. Simple formula for photoprocesses in ultrashort electromagnetic field // Physics Letters A. 2010.

References

1. Bohr N., Kramers H.A., Slater J.C. The Quantum Theory of Radiation. Phil. Mag. 1924. V. 47. P. 785–802.
2. Kramers H.A. The law of dispersion and Bohr's theory of spectra. Nature. 1924. V. 113. P. 673–676.
3. Kramers H.A., Heisenberg W. Über die Streuung von Strahlung durch Atome. Zeitschrift für Physik. 1925. V. 31. P. 681–708.
4. Rosmej F.B., Lisitsa V.S., Astapenko V.A. Plasma Atomic Physics. Springer, Springer Series on Atomic, Optical and Plasma Physics. 2020. V. 104.
5. Beaulieu S., Comby A., Clergerie A., et al., Attosecond-resolved photoionization of chiral molecules. Science. 2017. V. 358. P. 1288–1294.

6. *Isinger M., Squibb R.J., Busto D., et al.*, Photoionization in the time and frequency domain. *Science*. 2017. V. 358. P. 893–896.
7. *Hütten K., Mittermair M., Stock S., et al.*, Ultrafast quantum control of ionization dynamics. *EPJ Web of Conferences*. 2019. V. 205. 06001.
8. *Argenti L., Pazourek R., Feist J., et al.*, Photoionization of helium by attosecond pulses: Extraction of spectra from correlated wave functions. *Physical Review*. 2013. V. 87. 053405.
9. *Nicolaiides C.A.* Attosecond-Resolved Electron Dynamics in Many-Electron Atoms: Quantitative Theory and Comparison with Measurements. *Appl. Sci*. 2018. V. 8. 533.
10. *Astapenko V.A.* Attosecond Dynamics of Photoexcitation of the Hydrogen Atom by Ultrashort Laser Pulses. *JETP*. 2020. V. 157. P. 67–73.
11. *Golovinski P.A., Yakovets A.V., Astapenko V.A.* Linear build-up of Fano resonance spectral profiles. *Applied Physics B*. 2018. 124:111.
12. *Kaldun A., Blättermann A., Donsa S., et al.*, Observing the ultrafast buildup of a Fano resonance in the time domain. *Science*. 2016. V. 354. P. 738–740.
13. *Gruson V., Barreau L., Jiménez-Galan Á., et al.*, Attosecond dynamics through a Fano resonance: Monitoring the birth of a photoelectron. *Science*. 2016. V. 354. P. 734–737.
14. *Astapenko V.A.* Interaction of Ultrashort Electromagnetic Pulses with matter. Springer, 2013.
15. *Klyshko D.N.* Photons and Nonlinear Optics. Moscow : Nauka, 1980.
16. *Astapenko V.A.* Simple formula for photoprocesses in ultrashort electromagnetic field. *Physics Letters A*. 2010.

Поступила в редакцию 28.09.2020