УДК 517.444

А. Д. Агальцов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Теоремы характеризации и обращения для обобщённого преобразования Радона

Рассматриваются вопросы, связанные с обобщённым преобразованием Радона мер по гиперповерхностям уровня CES-функций. Найдена теорема характеризации для обобщённого преобразования Радона неотрицательных мер с носителями в положительном ортанте $\mathbb{R}^n_+$. Получена явная формула обращения для этого преобразования в случае абсолютно непрерывных мер.

Ключевые слова: обобщённое преобразование Радона, теорема характеризации, формула обращения, эффект замещения производственных факторов на микроуровне.

1. Введение

При обработке экономической статистики возникает проблема учёта взаимного замещения производственных факторов. При производстве некоторых товаров могут использоваться ресурсы, способные заменять друг друга в производственном процессе. В работе А. А. Шананина [1] была предложена модель производства (обобщённая модель чистой отрасли), в которой учитывается указанный эффект. Функция прибыли отрасли в этой модели тесно связана с обобщённым преобразованием Радона мер. Важность изучения свойств функции прибыли заключается в том, что наряду с производственной функцией она является одним из основных инструментов макроописания производственных систем.

Определим на множестве неотрицательных вещественных чисел операцию

$$a \oplus_\alpha b = (a^\alpha + b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \ 0 < \alpha \leqslant 1.$$

При $\alpha = 1$ это обычное сложение. На основании операции $\oplus_\alpha$ определим аналог скалярного произведения для двух неотрицательных векторов $p, x \in \mathbb{R}^n_+$ правилом

$$p \odot_\alpha x = p_1 x_1 \oplus_\alpha p_2 x_2 \oplus_\alpha \ldots \oplus_\alpha p_n x_n.$$

В экономике отображение $x \mapsto p \odot_\alpha x$ называется CES-функцией. В настоящей работе исследуется обобщённое преобразование Радона борелевских мер μ со знаком с носителем в положительном ортанте $\mathbb{R}^n_+$, которое по определению есть

$$\mathcal{R}_\alpha[\mu](p, p_0) = \frac{\partial}{\partial p_0} \int\limits_{p \odot_\alpha x \leqslant p_0} \mu(dx), \tag{1}$$

где $p \in \mathbb{R}^n_+$, $p \neq 0$, $p_0 > 0$ и производная понимается в смысле теории распределений. Наряду с преобразованием мер (1) в работе исследуется преобразование

$$\Pi_\alpha[\mu](p, p_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (p_0 - p \odot_\alpha x)_+ \mu(dx), \tag{2}$$

где обозначено $a_+ = \max(0, a)$. Это преобразование представляет собой функцию прибыли в обобщённой модели чистой отрасли [1]. Преобразования (1) и (2) тесно связаны. Результаты, относящиеся к одному из этих преобразований, легко переносятся на другое.

Для преобразований (1), (2) в работе получены теоремы обращения и характеризации. Перед тем как переходить к этим вопросам, покажем, что в случае абсолютно непрерывных мер с непрерывными плотностями обобщённое преобразование Радона $\mathcal{R}_\alpha[\mu](p,p_0)$ есть не что иное, как интеграл от плотности по гиперповерхности уровня CES-функции.

Предложение 1.1. *Пусть знакопеременная мера μ на $\mathbb{R}^n_+$ абсолютно непрерывна с непрерывной плотностью $a(x)$. Пусть $\Omega_\alpha(p)$ — дифференциальная форма на $\mathbb{R}^n_+$, удовлетворяющая равенству*

$$d_x(p \odot_\alpha x) \wedge \Omega_\alpha(p) = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \quad p \neq 0.$$

Тогда для обобщённого преобразования Радона справедлива формула

$$\mathcal{R}_\alpha[\mu](p,p_0) = \int\limits_{p\odot_\alpha x = p_0} a(x)\,\Omega_\alpha(p), \quad p \neq 0,\ p_0 > 0.$$

Доказательство. Пользуясь формулой коплощади [2], запишем

$$\int\limits_{p\odot_\alpha x\leqslant p_0} a(x)\,dx = \int\limits_0^{p_0} \int\limits_{p\odot_\alpha x = s} a(x)\,\Omega_\alpha(p)\,ds.$$

Вспоминая определение обобщённого преобразования Радона, получим

$$\mathcal{R}_\alpha[\mu](p,p_0) = \frac{\partial}{\partial p_0} \int\limits_{p\odot_\alpha x\leqslant p_0} a(x)\,dx = \int\limits_{p\odot_\alpha x = s} a(x)\,\Omega_\alpha(p).$$

Предложение доказано.

2. Характеризация

Перед тем как формулировать теоремы характеризации, дадим несколько определений, которые будут фигурировать в формулировках теорем и в их доказательствах.

Определение 2.1 [3]. Распределение $T \in \mathcal{D}'(0,\infty)$ называется неотрицательным ($T \geqslant 0$), если для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty)$, $\varphi \geqslant 0$ следует, что $\langle T, \varphi\rangle \geqslant 0$.

Определение 2.2 [4]. Пусть $X_1 = (\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ и $X_2 = (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ — два измеримых пространства, $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ — измеримое отображение, μ — мера на X_1. Тогда мера ν на X_2, определяемая для всех $F_2 \in \mathcal{F}_2$ соотношением $\nu(F_2) = \mu(f^{-1}(F_2))$, называется прямым образом меры μ при отображении f. При этом мера μ называется обратным образом меры ν при отображении f.

Определение 2.3 [5]. Функция $F \in C^\infty(\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R})$ называется вполне монотонной, если для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ имеет место неравенство

$$(-1)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}F(p)}{\partial^\alpha p} \geqslant 0$$

для всех $p \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$.

Приведём здесь также две теоремы, на которых базируется доказательство теорем характеризации.

Теорема 2.1 (о неотрицательных распределениях [3]). *Пусть распределение $T \in \mathcal{D}'(0,\infty)$ неотрицательно: $T \geqslant 0$. Тогда существует и единственна неотрицательная регулярная борелевская мера ν на $(0,\infty)$, конечная на компактах и такая, что для всех $\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty)$ имеет место равенство*

$$\langle T, \varphi\rangle = \int\limits_0^\infty \varphi(\tau)\,\nu(d\tau).$$

Теорема 2.2 (Бернштейн С. Н., Gilbert V. [5]). *Пусть функция* $F(p)\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *ограничена на* $\mathbb{R}^n_+$ *и вполне монотонна на* $\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$*. Тогда найдётся такая неотрицательная конечная борелевская мера* μ *с носителем в* $\mathbb{R}^n_+$*, что для всех* $p \in \mathbb{R}^n_+$ *справедливо равенство*

$$F(p) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{-p_1x_1-\ldots-p_nx_n}\mu(dx).$$

Наконец, перейдём к теоремам характеризации. Следующая теорема характеризует обобщённые преобразования Радона конечных неотрицательных мер с носителями в $\mathbb{R}^n_+$.

Теорема 2.3. *Распределение* $æ(p,\cdot) \in \mathcal{D}'(0,\infty)$*,* $p \in \mathbb{R}^n_+$*,* $p \neq 0$ *представимо в виде*

$$æ(p,p_0) = \mathcal{R}_\alpha[\mu](p,p_0),$$

где μ *— неотрицательная конечная борелевская мера с носителем в* $\mathbb{R}^n_+$*, абсолютно непрерывная в нуле* (т.е. $\mu\{0\} = 0$), тогда и только тогда, когда

1) $æ(p,\cdot) \geqslant 0$,

2) $\lambda æ(\lambda p, \lambda p_0) = æ(p,p_0)$ *для всех* $\lambda > 0$,

3) *функция*

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-\tau^\alpha} æ(p_1^{\frac{1}{\alpha}},\ldots,p_n^{\frac{1}{\alpha}};\tau)d\tau$$

ограничена на $\mathbb{R}^n_+$*, вполне монотонна на* $\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ *и* $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} F(\lambda p) = 0$ *для всех* $p \neq 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Сначала получим формулу для действия распределения $æ(p,p_0)$ на основные функции $\varphi \in \mathcal{D}(0,+\infty)$ Покажем, что

$$\langle æ(p,\tau), \varphi(\tau)\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \varphi(p \odot_\alpha x)\mu(dx). \tag{3}$$

В самом деле, с учётом определения производной в смысле теории распределений имеем

$$\langle æ(p,\tau),\varphi(\tau)\rangle = -\left\langle \int\limits_{p\odot_\alpha x\leqslant\tau} \mu(dx), \frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial\tau}\right\rangle = -\left\langle \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \theta(\tau - p\odot_\alpha x)\,\mu(dx), \frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial\tau}\right\rangle =$$
$$= -\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \theta(\tau - p\odot_\alpha x)\,\mu(dx)\frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial\tau}\,d\tau = -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_0^\infty \theta(\tau - p\odot_\alpha x)\frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial\tau}\,d\tau\,\mu(dx) =$$
$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{p\odot_\alpha x}^\infty \frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial\tau}\,d\tau\,\mu(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \varphi(p\odot_\alpha x)\,\mu(dx),$$

где $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда. Свойство $æ(p,\cdot) \geqslant 0$ немедленно следует из формулы (3). Заметим, что распределение $æ(p,p_0)$ можно доопределить по непрерывности на функциях $\psi \in C^\infty(0,\infty) \cap C[0,\infty)$ с компактным носителем на $[0,\infty)$. Отправляясь от случая, когда $æ(p,p_0)$ является непрерывной функцией p_0, подкорректируем формулу (3):

$$\langle æ(p,\tau),\psi(\tau)\rangle = \mu\{0\}\psi(0) + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \psi(p\odot_\alpha x)\,\mu(dx). \tag{4}$$

С учётом требования абсолютной непрерывности меры μ в нуле добавочное слагаемое исчезает. Поэтому формула (3) верна и для функций класса $C^\infty(0,\infty)\cap C[0,\infty)$ с компактным носителем на $[0,\infty)$.

Для любого $\lambda > 0$ имеет место очевидное равенство

$$\int\limits_{(\lambda p)\odot_\alpha x\leqslant\lambda p_0} \mu(dx) = \int\limits_{p\odot_\alpha x\leqslant p_0} \mu(dx).$$

Поэтому æ(p,p_0) является положительно однородным распределением степени -1 как производная от функции, положительно однородной степени нуль. В самом деле, для любой функции $\varphi\in\mathcal{D}(0,\infty)$ имеем

$$\langle æ(\lambda p,\lambda\tau),\varphi(\tau)\rangle = \frac{1}{\lambda}\left\langle æ(\lambda p,\tau),\varphi\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)\right\rangle =$$
$$= -\frac{1}{\lambda^2}\left\langle \int\limits_{(\lambda p)\odot_\alpha x\leqslant\tau}\mu(dx),\varphi'\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)\right\rangle = -\frac{1}{\lambda^2}\left\langle \int\limits_{p\odot_\alpha x\leqslant\frac{\tau}{\lambda}}\mu(dx),\varphi'\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)\right\rangle =$$
$$= -\frac{1}{\lambda}\left\langle \int\limits_{p\odot_\alpha x\leqslant\tau}\mu(dx),\varphi'(\tau)\right\rangle = \left\langle\frac{1}{\lambda}æ(p,\tau),\varphi(\tau)\right\rangle.$$

Свойство λæ$(\lambda p,\lambda p_0) =$ æ(p,p_0) доказано.

Наконец, пользуясь формулой (3) и конечностью меры μ, получаем, что

$$F(p) = \left\langle æ(p_1^{\frac{1}{\alpha}},\ldots,p_n^{\frac{1}{\alpha}};\tau),e^{-\tau^\alpha}\right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{-p_1x_1^\alpha-\ldots-p_nx_n^\alpha}\,\mu(dx).$$

Отсюда следует ограниченность, вполне монотонность функции $F(p)$ и свойство $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}F(\lambda p) = \mu\{0\} = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Доказательство достаточности проведём в три шага.

Шаг 1. Из условия æ$(p,\cdot)\geqslant 0$ по теореме 2.1 получаем, что для всех $p\in\mathbb{R}^n_+$, $p\neq 0$ существует и единственна неотрицательная борелевская мера $\hat\mu_p$ с носителем в $(0,\infty)$, конечная на компактах в $(0,\infty)$ и такая, что для любой функции $\varphi\in\mathcal{D}(0,\infty)$ имеет место равенство

$$\langle æ(p,\tau),\varphi(\tau)\rangle = \int\limits_0^\infty \varphi(\tau)\,\hat\mu_p(d\tau).$$

Воспользуемся положительной однородностью распределения æ(p,p_0) и вычислим при $\lambda>0$ значение

$$\langle æ(\lambda p,\tau),\varphi(\tau)\rangle = \left\langle\frac{\lambda}{\lambda}æ\left(\lambda p,\frac{\lambda}{\lambda}\tau\right),\varphi\left(\frac{\lambda}{\lambda}\tau\right)\right\rangle =$$
$$= \left\langle\frac{1}{\lambda}æ\left(p,\frac{1}{\lambda}\tau\right),\varphi\left(\frac{\lambda}{\lambda}\tau\right)\right\rangle = \langle æ(p,\tau),\varphi(\lambda\tau)\rangle.$$

Пусть теперь $\chi_n(\tau)\in\mathcal{D}(0,\infty)$ — неубывающая последовательность основных функций такая, что $\chi_n(\tau)=1$ при $\tau\in[\frac{1}{n},n]$ и носитель χ_n содержится в $[\frac{1}{2n},2n]$. Определим $\varphi_n(\tau)=e^{-\tau^\alpha}\chi_n(\tau)$. Тогда по теореме Лебега о монотонной сходимости функция $\tau\mapsto e^{-\tau^\alpha}$ интегрируема по мере $\hat\mu_p$ и

$$\langle æ(p,\tau),\varphi_n(\tau)\rangle = \int\limits_0^\infty\varphi_n(\tau)\,\hat\mu_p(d\tau)\to\int\limits_0^\infty e^{-\tau^\alpha}\,\hat\mu_p(d\tau) = F(\lambda p_1^\alpha,\ldots,\lambda p_n^\alpha).$$

Сделаем в интеграле замену переменных $s = \tau^\alpha$. Тогда

$$F(\lambda p_1^\alpha, \ldots, \lambda p_n^\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}\,(\hat{\mu}_p)_*(ds),$$

где $(\hat{\mu}_p)_*$ есть прямой образ меры $\hat{\mu}_p$ при отображении $\tau \mapsto \tau^\alpha$.

Шаг 2. Из ограниченности функции $F(p)$ на $\mathbb{R}_+^n$ и вполне монотонности на $\operatorname{int}\mathbb{R}_+^n$ по теореме 2.2 существует неотрицательная, конечная борелевская мера μ с носителем в $\mathbb{R}_+^n$, для которой

$$F(p) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-p_1x_1-\ldots-p_nx_n}\,\mu(dx).$$

Определим борелевскую меру ν на $\mathbb{R}_+^n$ как обратный образ меры μ при отображении $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$. Мера ν конечна, так как конечна мера μ. По формуле замены переменных в интеграле Лебега получим

$$F(p) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-p_1x_1^\alpha-\ldots-p_nx_n^\alpha}\,\nu(dx). \tag{5}$$

Распишем это как

$$F(p) = \nu\{0\} + \int\limits_{\mathbb{R}_+^n\setminus\{0\}} e^{-p_1x_1^\alpha-\ldots-p_nx_n^\alpha}\,\nu(dx).$$

Выберем $p = \lambda q$, $q \neq 0$ и устремим $\lambda \to +\infty$. Пользуясь теоремой Лебега о монотонной сходимости и условием $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} F(\lambda q) = 0$, получаем, что $\nu\{0\} = 0$, то есть мера ν абсолютно непрерывна в нуле.

Функция

$$p_0 \mapsto \int\limits_{p\odot_\alpha x\leqslant p_0} \nu(dx)$$

монотонно неубывает и ограничена. Обозначим через $\hat{\nu}_p$ меру Лебега–Стилтьеса, порождаемую этой функцией на $[0, \infty)$, и определим распределение $æ_0(p, p_0) = \mathcal{R}_\alpha[\nu](p, p_0)$. Тогда для любой непрерывной и ограниченной функции φ на $[0, \infty)$ имеет место равенство

$$\langle æ_0(p, \tau), \varphi(\tau)\rangle = \int\limits_0^\infty \varphi(\tau)\,\hat{\nu}_p(d\tau).$$

Возьмём $\varphi(\tau) = e^{-\tau^\alpha}$. Из формул (3), (5) следует, что

$$\langle æ_0(p, \tau), e^{-\tau^\alpha}\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-(p_1x_1)^\alpha-\ldots-(p_nx_n)^\alpha}\,\nu(dx) = F(p_1^\alpha, \ldots, p_n^\alpha).$$

Из необходимости следует, что $æ_0(p, p_0)$ есть положительно однородное распределение степени -1. Действуя, как в шаге 1 доказательства достаточности, получаем, что

$$F(\lambda p_1^\alpha, \ldots, \lambda p_n^\alpha) = \langle æ_0(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}p, \tau), e^{-\tau^\alpha}\rangle =$$
$$= \langle æ_0(p, \tau), e^{-\lambda\tau^\alpha}\rangle = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau^\alpha}\,\hat{\nu}_p(d\tau).$$

Делая замену переменных $s = \tau^\alpha$ и обозначая через $(\hat{\nu}_p)_*$ прямой образ меры $\hat{\nu}_p$ при таком отображении, получим, что

$$F(\lambda p_1^\alpha, \ldots, \lambda p_n^\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}\,(\hat{\nu}_p)_*(ds).$$

Из конечности меры $\hat{\nu}_p$ следует конечность меры $(\hat{\nu}_p)_*$.

Шаг 3. На шагах 1 и 2 было получено, что при $\lambda > 0$

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}\,(\hat{\mu}_p)_*(ds) = F(\lambda p_1^\alpha, \ldots, \lambda p_n^\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}\,(\hat{\nu}_p)_*(ds).$$

Перейдём к пределу при $\lambda \to +0$. Используя теорему Лебега о монотонной сходимости, получим, что мера $(\hat{\mu}_p)_*$ конечна и равенство

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}\,(\hat{\mu}_p)_*(ds) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}\,(\hat{\nu}_p)_*(ds)$$

справедливо при $\lambda \geqslant 0$. Отсюда следует совпадение мер $(\hat{\mu}_p)_*$ и $(\hat{\nu}_p)_*$. Поэтому и меры $\hat{\mu}_p$ и $\hat{\nu}_p$, задающие распределения $æ(p, p_0)$ и $æ_0(p, p_0)$, равны. Таким образом,

$$æ(p, p_0) = æ_0(p, p_0) = \mathcal{R}_\alpha[\nu](p, p_0).$$

Теорема полностью доказана.

Мы применим теорему 2.3 для доказательства теоремы характеризации для преобразования $\Pi_\alpha[\mu](p, p_0)$. Следующая теорема характеризует преобразование $\Pi_\alpha[\mu](p, p_0)$ в случае конечных неотрицательных абсолютно непрерывных в нуле мер с носителем в $\mathbb{R}_+^n$. Напомним, что в обобщённой модели чистой отрасли [1] преобразование $\Pi_\alpha[\mu](p, p_0)$ имеет смысл функции прибыли. Мера μ при этом имеет смысл распределения производственных мощностей по технологиям. В контексте этой модели требование абсолютной непрерывности меры μ в нуле означает отсутствие «рога изобилия» или возможности получать прибыль, не затрачивая никаких ресурсов. Поэтому требование $\mu\{0\} = 0$ не является ограничительным с точки зрения экономических приложений. Перед тем как сформулировать теорему, докажем вспомогательную лемму, которая будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

Определение 2.4 [6]. Пусть μ — знакопеременная мера (заряд) на $\mathbb{R}_+^n$ и пусть $\mu = \mu_+ - \mu_-$ — разложение Жордана заряда μ. Тогда мера $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$ называется полной вариацией заряда μ.

Лемма 2.1. *Пусть μ — знакопеременная борелевская мера на $\mathbb{R}_+^n$, для которой полная вариация $|\mu|$ конечна на компактах. Тогда при $p_0 > 0$, $p \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ функция $\Pi[\mu](p, p_0)$ дифференцируема по p_0 и справедливо равенство*

$$\frac{\partial \Pi_\alpha[\mu](p, p_0)}{\partial p_0} = \int\limits_{p \odot_\alpha x \leqslant p_0} \mu(dx).$$

Доказательство леммы. Обозначим $G(p, p_0) = \left\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid p \odot_\alpha x \leqslant p_0\right\}$. Пусть $\Delta > 0$. Распишем приращение

$$\Pi_\alpha[\mu](p, p_0 + \Delta) - \Pi_\alpha[\mu](p, p_0) =$$
$$= \int\limits_{G(p, p_0+\Delta)} (p_0 + \Delta - p \odot_\alpha x)\,\mu(dx) - \int\limits_{G(p, p_0)} (p_0 - p \odot_\alpha x)\,\mu(dx) =$$
$$= \Delta \int\limits_{G(p, p_0+\Delta)} \mu(dx) + \int\limits_{G(p, p_0+\Delta)\setminus G(p, p_0)} (p_0 - p \odot_\alpha x)\,\mu(dx).$$

Заметим, что

$$G(p, p_0 + \Delta) \setminus G(p, p_0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ \mid 0 < p \odot_\alpha x - p_0 \leqslant \Delta \right\}.$$

Поэтому справедлива оценка

$$\left| \int\limits_{G(p,p_0+\Delta)\setminus G(p,p_0)} (p_0 - p \odot_\alpha x)\, \mu(dx) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{G(p,p_0+\Delta)\setminus G(p,p_0)} |p_0 - p \odot_\alpha x|\, |\mu|(dx) \leqslant \Delta \int\limits_{G(p,p_0+\Delta)\setminus G(p,p_0)} |\mu|(dx) = o(\Delta),\ \Delta \to +0,$$

так как $|\mu| \left\{ G(p, p_0 + \Delta) \setminus G(p, p_0) \right\} \to 0$ при $\Delta \to +0$. Поэтому можно записать:

$$\frac{1}{\Delta} \left[\Pi_\alpha[\mu](p, p_0 + \Delta) - \Pi_\alpha[\mu](p, p_0) \right] = \int\limits_{G(p,p_0+\Delta)} \mu(dx) + o(1),\ \Delta \to +0.$$

Снова пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, получаем

$$\int\limits_{G(p,p_0+\Delta)} \mu(dx) \to \int\limits_{G(p,p_0)} \mu(dx),\ \Delta \to +0.$$

Случай $\Delta < 0$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Отметим, что в работе [5] была получена теорема характеризации для преобразования $\Pi_\alpha[\mu](p, p_0)$ в случае $\alpha = 1$. При $\alpha = 1$ обобщённое преобразование Радона $\mathcal{R}_\alpha[\mu](p, p_0)$ совпадает с классическим преобразованием Радона по гиперплоскостям. С точки зрения экономических приложений функция прибыли $\Pi_\alpha[\mu](p, p_0)$ в случае $\alpha = 1$ соответствует производственным системам, в которых отсутствует эффект замещения производственных факторов на микроуровне. Следующая теорема является обобщением этого результата на случай произвольных $\alpha \in (0, 1]$.

Теорема 2.4. *Функция* $\Pi(p, p_0)\colon \mathbb{R}^n_+ \times (0, \infty) \to [0, \infty)$ *представима в виде*

$$\Pi(p, p_0) = \Pi_\alpha[\mu](p, p_0),$$

где μ *— неотрицательная конечная борелевская мера на* $\mathbb{R}^n_+$*, абсолютно непрерывная в нуле, тогда и только тогда, когда*

1) $\Pi(p, p_0)$ *выпукла,*

2) $\Pi(\lambda p, \lambda p_0) = \lambda \Pi(p, p_0)$ *для всех* $\lambda > 0$,

3) $\Pi(p, +0) = \frac{\partial \Pi}{\partial p_0}(p, +0) = 0$ *при* $p \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$,

4) *функция*

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-\tau^\alpha}\, d\frac{\partial \Pi}{\partial \tau}(p_1^{\frac{1}{\alpha}}, \ldots, p_n^{\frac{1}{\alpha}}; \tau)$$

ограничена на $\mathbb{R}^n_+$ *и вполне монотонна на* $\operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$.

Доказательство. *Необходимость.* Выпуклость функции $\Pi_\alpha[\mu](p, p_0)$ следует непосредственно из её определения с учётом того, что при $\alpha \in (0, 1]$ функция $x \mapsto p \odot_\alpha x$ вогнута (при $\alpha > 1$ она становится выпуклой).

Положительная однородность следует немедленно из определения преобразования $\Pi_\alpha[\mu](p, p_0)$:

$$\Pi_\alpha[\mu](\lambda p, \lambda p_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (\lambda p_0 - (\lambda p) \odot_\alpha x)_+ \, \mu(dx) = \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (p_0 - p \odot_\alpha x)_+ \, \mu(dx) = \lambda \Pi_\alpha[\mu](p, p_0).$$

В силу неравенства $(p_0 - p \odot_\alpha x)_+ \leqslant p_0$ и конечности меры μ получаем, что

$$0 \leqslant \Pi_\alpha[\mu](p, p_0) \leqslant p_0 \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \mu(dx) \to 0, \; p_0 \to +0.$$

Отсюда следует, что $\Pi_\alpha[\mu](p, +0) = 0$.

Пользуясь леммой 2.1, запишем

$$\frac{\partial \Pi_\alpha[\mu](p, p_0)}{\partial p_0} = \mu\{0\} + \int\limits_{p \odot_\alpha x \leqslant p_0, \; x \neq 0} \mu(dx).$$

Переходя к пределу при $p_0 \to +0$ и учитывая абсолютную непрерывность интеграла Лебега и то, что по определению абсолютной непрерывности меры μ в нуле $\mu\{0\} = 0$, получаем $\frac{\partial \Pi_\alpha[\mu]}{\partial p_0}(p, +0) = 0$.

Ограниченность и вполне монотонность функции $F(p)$ доказывается, как в теореме 2.3, с учётом того, что

$$\frac{\partial^2 \Pi_\alpha[\mu]}{\partial p_0^2}(p, p_0) = \mathcal{R}_\alpha[\mu](p, p_0).$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\text{æ}(p, p_0) = \frac{\partial^2 \Pi(p, p_0)}{\partial p_0^2}$ — производная в смысле теории распределений, то есть для всех $\varphi \in \mathcal{D}(0, +\infty)$ имеет место равенство

$$\langle \text{æ}(p, \tau), \varphi(\tau) \rangle = \langle \Pi(p, \tau), \varphi''(\tau) \rangle.$$

Функция на $(0, +\infty)$ выпукла тогда и только тогда, когда её вторая производная является неотрицательным распределением [7]. Поэтому $\text{æ}(p, \cdot) \geqslant 0$.

Так как $\Pi(p, p_0)$ есть функция, положительно однородная степени 1, то её вторая производная $\text{æ}(p, p_0)$ есть распределение, положительно однородное степени -1:

$$\langle \text{æ}(\lambda p, \lambda \tau), \varphi(\tau) \rangle = \frac{1}{\lambda} \left\langle \text{æ}(\lambda p, \tau), \varphi\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) \right\rangle = \frac{1}{\lambda^3} \left\langle \Pi(\lambda p, \tau), \varphi''\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) \right\rangle =$$
$$= \frac{1}{\lambda^2} \langle \Pi(\lambda p, \lambda \tau), \varphi''(\tau) \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle \Pi(p, \tau), \varphi''(\tau) \rangle = \left\langle \frac{1}{\lambda} \text{æ}(p, \tau), \varphi(\tau) \right\rangle.$$

Наконец,

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-\tau^\alpha} \, d \frac{\partial \Pi}{\partial \tau}(p_1^{\frac{1}{\alpha}}, \ldots, p_n^{\frac{1}{\alpha}}; \tau) = \int\limits_0^\infty e^{-\tau^\alpha} \text{æ}(p_1^{\frac{1}{\alpha}}, \ldots, p_n^{\frac{1}{\alpha}}; \tau) \, d\tau.$$

Как и при доказательстве теоремы 2.3, показывается, что при всех $\lambda > 0$ имеет место равенство

$$F(\lambda p) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda \tau^\alpha} \, d \frac{\partial \Pi}{\partial \tau}(p_1^{\frac{1}{\alpha}}, \ldots, p_n^{\frac{1}{\alpha}}; \tau).$$

Перейдём к пределу при $\lambda \to +\infty$, воспользуемся теоремой Лебега о монотонной сходимости и условием $\frac{\partial \Pi}{\partial p_0}(p, +0) = 0$. Получим, что $F(\lambda p) \to 0$ при $\lambda \to +\infty$.

Воспользуемся теперь теоремой 2.3. По этой теореме существует неотрицательная борелевская конечная абсолютно непрерывная в нуле мера μ с носителем на $\mathbb{R}^n_+$ такая, что $æ(p,p_0) = \mathcal{R}_\alpha[\mu](p,p_0)$. Определим $\Pi_0(p,p_0) = \Pi_\alpha[\mu](p,p_0)$. Тогда

$$\frac{\partial^2 \Pi(p,p_0)}{\partial p_0^2} = \mathcal{R}_\alpha[\mu](p,p_0) = \frac{\partial^2 \Pi_0(p,p_0)}{\partial p_0^2}.$$

Из совпадения вторых производных следует, что функции $\Pi(p,p_0)$ и $\Pi_0(p,p_0)$ отличаются на полином не больше, чем первой степени по p_0 [7] при каждом фиксированном p. Но из равенств

$$\Pi(p,+0) = \Pi_0(p,+0) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial p_0}\Pi(p,+0) = \frac{\partial}{\partial p_0}\Pi_0(p,+0) = 0$$

следует, что этот полином нулевой. Теорема полностью доказана.

3. Обращение

В случае, когда мера μ абсолютно непрерывна с плотностью $a(x)$, будем обозначать

$$\mathcal{R}_\alpha[a](p,p_0) := \mathcal{R}_\alpha[\mu](p,p_0),$$
$$\Pi_\alpha[a](p,p_0) := \Pi_\alpha[\mu](p,p_0).$$

Кроме того, будем использовать обозначение $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n_+, \rho(x))$ для класса функций, принадлежащих $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n_+)$ с весом $\rho(x)$, то есть таких измеримых функций $f(x)$, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p \rho(x)\, dx < \infty.$$

Перед тем как сформулировать теорему обращения, докажем вспомогательную лемму.

Лемма 3.1. 1) *Пусть Ω — дифференциальная форма на $\mathbb{R}^n_+$, удовлетворяющая соотношению*

$$(dx_1 + \ldots + dx_n) \wedge \Omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Тогда при $\operatorname{Re} z_1 > 0, \ldots, \operatorname{Re} z_n > 0$ *имеет место равенство*

$$\int\limits_{x_1+\ldots+x_n=1, x\geqslant 0} x_1^{z_1-1} \ldots x_n^{z_n-1}\, \Omega = B(z) = \frac{\Gamma(z_1)\ldots\Gamma(z_n)}{\Gamma(z_1+\ldots+z_n)},\ z = (z_1, \ldots, z_n).$$

2) При $\operatorname{Re} t_1 < 1, \ldots, \operatorname{Re} t_n < 1$ имеет место формула

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u_1^{-t_1} \ldots u_n^{-t_n} \left(1 - (u_1 + \ldots + u_n)^{\frac{1}{\alpha}}\right)_+ du = \alpha B(1-t) B\left(2, \alpha(n - t_1 - \ldots - t_n)\right),$$

где $t = (t_1, \ldots, t_n)$, $du = du_1 \ldots du_n$.

Доказательство леммы. 1) Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x_1^{z_1-1} \ldots x_n^{z_n-1} e^{-x_1-\ldots-x_n}\, dx = \int\limits_0^\infty x_1^{z_1-1} e^{-x_1}\, dx_1 \ldots \int\limits_0^\infty x_n^{z_n-1} e^{-x_n}\, dx_n = \Gamma(z_1)\ldots\Gamma(z_n).$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x_1^{z_1-1}\dots x_n^{z_n-1}e^{-x_1-\dots-x_n}\,dx = \{\text{формула коплощади}\} =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-s} \int\limits_{x_1+\dots+x_n=s,\ x\geqslant 0} x_1^{z_1-1}\dots x_n^{z_n-1}\,\Omega\,ds = \left\{x_k = y_k s,\ k=\overline{1,n}\right\} =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-s}s^{z_1+\dots+z_n-1}\,ds \int\limits_{y_1+\dots+y_n=1,\ y\geqslant 0} y_1^{z_1-1}\dots y_n^{z_n-1}\,\Omega =$$

$$= \Gamma(z_1+\dots+z_n) \int\limits_{y_1+\dots+y_n=1,\ y\geqslant 0} y_1^{z_1-1}\dots y_n^{z_n-1}\,\Omega.$$

Сопоставляя полученные выражения, получаем, что

$$\int\limits_{y_1+\dots+y_n=1,\ y\geqslant 0} y_1^{z_1-1}\dots y_n^{z_n-1}\,\Omega = \frac{\Gamma(z_1)\dots\Gamma(z_n)}{\Gamma(z_1+\dots+z_n)} = B(z).$$

2) Имеем цепочку преобразований

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u_1^{-t_1}\dots u_n^{-t_n}\left(1-(u_1+\dots+u_n)^{\frac{1}{\alpha}}\right)_+ du = \{\text{формула коплощади}\} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(1-s^{\frac{1}{\alpha}}\right) \int\limits_{u_1+\dots+u_n=s,\ u\geqslant 0} u_1^{-t_1}\dots u_n^{-t_n}\,\Omega\,ds = \left\{u_k = v_k s,\ k=\overline{1,n}\right\} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(1-s^{\frac{1}{\alpha}}\right) s^{n-1-t_1-\dots-t_n}\,ds \int\limits_{v_1+\dots+v_n=1,\ v\geqslant 0} v_1^{-t_1}\dots v_n^{-t_n}\,\Omega.$$

Из первой части леммы следует, что

$$\int\limits_{v_1+\dots+v_n=1,\ v\geqslant 0} v_1^{-t_1}\dots v_n^{-t_n}\,\Omega = B(1-t_1,\dots,1-t_n) =: B(1-t).$$

Пусть γ — некоторое действительное число. Вычислим интеграл

$$\int\limits_0^1 \left(1-s^{\frac{1}{\alpha}}\right) s^{\gamma-1}\,ds = \left\{t = s^{\frac{1}{\alpha}},\ s = t^\alpha,\ ds = \alpha t^{\alpha-1}dt\right\} =$$

$$= \alpha\int\limits_0^1 (1-t)t^{\alpha(\gamma-1)+\alpha-1}dt = \alpha\int\limits_0^1 (1-t)^{2-1}t^{\alpha\gamma-1}dt = \alpha B(2,\alpha\gamma).$$

Поэтому

$$\int\limits_0^1 \left(1-s^{\frac{1}{\alpha}}\right) s^{n-1-t_1-\dots-t_n}\,ds = \alpha B\left(2,\alpha(n-t_1-\dots-t_n)\right).$$

Вторая часть леммы доказана.

Отметим, что в работе [5] была получена формула обращения для преобразования $\Pi_\alpha[\mu](p,p_0)$ для случая $\alpha=1$. Сейчас мы докажем теорему, которая обобщает этот результат на случай $\alpha \in (0,1]$. С точки зрения экономических приложений, следующая теорема может быть использована для нахождения распределения мощностей по технологиям по известной функции прибыли в производственных системах, в которых имеет место эффект замещения производственных факторов на микроуровне в случае, когда известно, что распределение мощностей по технологиям является абсолютно непрерывным.

Теорема 3.1 (3.1.'). *Пусть*

$$a(x) \in \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^n_+, x_1^{\alpha(c_1-1)} \dots x_n^{\alpha(c_n-1)}\right) \cap \mathcal{L}^2\left(\mathbb{R}^n_+, x_1^{2\alpha(c_1-1)+1} \dots x_n^{2\alpha(c_n-1)+1}\right)$$

при некоторых действительных $c_1 < 1, \dots, c_n < 1$. *Тогда*

$$a(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} K_\alpha(p_1x_1, \dots, p_nx_n; c)\Pi_\alpha[a](p,1)\,dp,$$

$$\left(a(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \int\limits_0^1 \int\limits_0^t K_\alpha(p_1x_1, \dots, p_nx_n; c)\mathcal{R}_\alpha[a](p,s)\,ds\,dt\,dp\right),$$

где ядро K_α *есть*

$$K_\alpha(u;c) = \frac{\alpha^{2n-1}}{(2\pi i)^n} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{c+i\mathbf{B}^n(0,R)} \frac{u_1^{-\alpha(z_1-1)-1} \dots u_n^{-\alpha(z_n-1)-1}dz}{B(1-z_1,\dots,1-z_n)B\left(2,\alpha(n-z_1-\dots-z_n)\right)},$$

$$c = (c_1, \dots, c_n),$$

а $\mathbf{B}^n(0,R)$ *есть шар в* $\mathbb{R}^n$ *радиуса* R *с центром в начале координат.*

Доказательство. Для сокращения обозначений положим $\Pi(p,p_0) = \Pi_\alpha[a](p,p_0)$. По определению

$$\Pi(p,p_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left(p_0 - ((p_1x_1)^\alpha + \dots + (p_nx_n)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)_+ a(x)\,dx.$$

Сделаем замену $y_k = x_k^\alpha$, $k = \overline{1,n}$. Якобиан замены равен $\frac{D(x)}{D(y)} = \alpha^{-n}(x_1 \dots x_n)^{1-\alpha}$. Обозначив $a_*(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha) = \alpha^{-n}a(x_1,\dots,x_n)(x_1\dots x_n)^{1-\alpha}$, получим

$$\Pi(p,p_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left(p_0 - (p_1^\alpha y_1 + \dots + p_n^\alpha y_n)^{\frac{1}{\alpha}}\right)_+ a_*(y)\,dy.$$

Пользуясь этой формулой и теоремой Фубини, придём к следующему выражению:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p_1^{-t_1} \dots p_n^{-t_n} \Pi(p_1^{\frac{1}{\alpha}}, \dots, p_n^{\frac{1}{\alpha}}; 1)\,dp =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} a_*(y) \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} p_1^{-t_1} \dots p_n^{-t_n} \left(1 - (p_1y_1 + \dots + p_ny_n)^{\frac{1}{\alpha}}\right)_+ dp\,dy = \left\{u_k = p_ky_k,\ k = \overline{1,n}\right\} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} y_1^{t_1-1} \dots y_n^{t_n-1} a_*(y)\,dy \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u_1^{-t_1} \dots u_n^{-t_n} \left(1 - (u_1 + \dots + u_n)^{\frac{1}{\alpha}}\right)_+ du.$$

Из последней формулы видно, что по функции $\Pi(p,p_0)$ можно получить преобразование Меллина функции $a_*(x)$. На этом и основана формула обращения.

Из леммы 3.1 следует, что при $\operatorname{Re} t_1 < 1, \dots, \operatorname{Re} t_n < 1$ имеет место формула

$$\begin{gathered}\int_{\mathbb{R}^n_+} p_1^{-t_1} \dots p_n^{-t_n} \Pi(p_1^{\frac{1}{\alpha}}, \dots, p_n^{\frac{1}{\alpha}}; 1)\,dp = \\ = \alpha B(1-t) B\left(2, \alpha\left(n - \sum_{k=1}^n t_k\right)\right) \int_{\mathbb{R}^n_+} y_1^{t_1-1} \dots y_n^{t_n-1} a_*(y)\,dy.\end{gathered} \tag{6}$$

Пусть $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$. Докажем следующую формулу для преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}\left(a_*\left(e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}\right)\exp(c \cdot x)\right)(\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} y_1^{i\tau_1 + c_1 - 1} \ldots y_n^{i\tau_n + c_n - 1} a_*(y_1, \ldots, y_n)\, dy. \tag{7}$$

Имеем следующую цепочку преобразований:

$$\mathcal{F}\left(a_*\left(e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}\right)\exp(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n)\right)(\tau) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i(x_1\tau_1 + \ldots + x_n\tau_n) + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n\right) a_*\left(e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}\right)\, dx =$$
$$= \left\{y_k = e^{x_k},\ x_k = \ln y_k,\ dx_k = y_k^{-1} dy_k\ k = \overline{1, n}\right\} =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} y_1^{i\tau_1 + c_1 - 1} \ldots y_n^{i\tau_n + c_n - 1} a_*(y_1, \ldots, y_n)\, dy.$$

Учтём при этом, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n\right) \left|a_*\left(e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}\right)\right|\, dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} y_1^{c_1 - 1} \ldots y_n^{c_n - 1} \left|a_*(y_1, \ldots, y_n)\right|\, dy = \left\{y_k = u_k^{\alpha},\ dy_k = \alpha u_k^{\alpha - 1} du_k,\ k = \overline{1, n}\right\} =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u_1^{\alpha(c_1 - 1)} \ldots u_n^{\alpha(c_n - 1)} |a(u_1, \ldots, u_n)|\, du < \infty$$

в силу условия теоремы. Аналогично

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(2(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n)\right) \left|a_*\left(e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}\right)\right|^2\, dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} y_1^{2c_1 - 1} \ldots y_n^{2c_n - 1} |a_*(y_1, \ldots, y_n)|^2\, dy =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u_1^{\alpha(2c_1 - 1)} \ldots u_n^{\alpha(2c_n - 1)} |a(u_1, \ldots, u_n)|^2 \alpha^{-2n} (u_1 \ldots u_n)^{2 - 2\alpha} \alpha^n (u_1 \ldots u_n)^{\alpha - 1}\, du =$$
$$= \alpha^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u_1^{2\alpha(c_1 - 1) + 1} \ldots u_n^{2\alpha(c_n - 1) + 1} |a(u_1, \ldots, u_n)|^2\, du < \infty.$$

Таким образом,

$$\exp\left(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n\right) a_*\left(e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}\right) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда следует, что преобразование Фурье (7) существует и по теореме Планшереля [8] принадлежит $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

Учитывая (6) и (7), получаем, что

$$\mathcal{F}\left(a_*\left(e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}\right)\exp(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n)\right)(\tau) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{p_1^{-i\tau_1 - c_1} \ldots p_n^{-i\tau_n - c_n}\, \Pi(p_1^{\frac{1}{\alpha}}, \ldots, p_n^{\frac{1}{\alpha}}; 1)\, dp}{\alpha B(1 - c - i\tau) B\left(2, \alpha n - \alpha(c_1 + i\tau_1 + \ldots + c_n + i\tau_n)\right)}.$$

Возьмём обратное преобразование Фурье от левой и правой частей. Из принадлежности функции классу $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ следует, что обратное преобразование Фурье может быть вычислено по формуле [8]:

$$a_*\left(e^{x_1},\ldots,e^{x_n}\right)\exp(c_1x_1+\ldots+c_nx_n)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\mathbf{B}(0,R)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{\exp(-ix\cdot\tau)p_1^{-i\tau_1-c_1}\ldots p_n^{-i\tau_n-c_n}\,\Pi(p_1^{\frac{1}{\alpha}},\ldots,p_n^{\frac{1}{\alpha}};1)\,dp}{\alpha B(1-c-i\tau)B\left(2,\alpha n-\alpha(c_1+i\tau_1+\ldots+c_n+i\tau_n)\right)}d\tau.$$

Обозначим $y_k=e^{x_k}$, $k=\overline{1,n}$. Формула перепишется в виде

$$a_*(y_1,\ldots,y_n)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\mathbf{B}(0,R)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{(p_1y_1)^{-i\tau_1-c_1}\ldots(p_ny_n)^{-i\tau_n-c_n}\,\Pi(p_1^{\frac{1}{\alpha}},\ldots,p_n^{\frac{1}{\alpha}};1)\,dp}{\alpha B(1-c-i\tau)B\left(2,\alpha n-\alpha(c_1+i\tau_1+\ldots+c_n+i\tau_n)\right)}d\tau.$$

Теперь обозначим $y_k=x_k^\alpha$ и сделаем замену переменных $p_k=q_k^\alpha$, $k=\overline{1,n}$. Возвращаясь от функции $a_*(\cdot)$ к функции $a(\cdot)$, получим

$$a(x)=\frac{\alpha^{2n-1}}{(2\pi)^n}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\mathbf{B}(0,R)}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{(q_1x_1)^{-\alpha(i\tau_1+c_1-1)-1}\ldots(q_nx_n)^{-\alpha(i\tau_n+c_n-1)-1}\,\Pi(q_1,\ldots,q_n;1)\,dq}{\alpha B(1-c-i\tau)B\left(2,\alpha n-\alpha(c_1+i\tau_1+\ldots+c_n+i\tau_n)\right)}d\tau.$$

Делая замену переменных $z_k=c_k+i\tau_k$, $k=\overline{1,n}$ и пользуясь определением ядра $K_\alpha(u;c)$ в условии теоремы, получаем требуемую формулу обращения для преобразования $\Pi_\alpha[a](p,p_0)$. Формула обращения для преобразования $\mathcal{R}_\alpha[a](p,p_0)$ непосредственно следует из равенств

$$\frac{\partial^2\Pi_\alpha[a](p,p_0)}{\partial p_0^2}=\mathcal{R}_\alpha[a](p,p_0),\tag{8}$$

$$\Pi_\alpha[a](p,+0)=\frac{\partial\Pi_\alpha[a]}{\partial p_0}(p,+0)=0,\quad p\in\operatorname{int}\mathbb{R}^n,\tag{9}$$

которые влекут $\Pi_\alpha[a](p,p_0)=\int_0^{p_0}\int_0^t\mathcal{R}_\alpha[a](p,s)\,ds\,dt$. Покажем, что равенства (8) – (9) действительно имеют место.

Равенство (8) следует из леммы 2.1 и определения преобразования $\mathcal{R}_\alpha[a](p,p_0)$.

Далее для любого $p\in\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ найдутся такие $R(p)>0$ и $p_0^*(p)$, что

$$\Pi_\alpha[a](p,p_0)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+\cap\mathbf{B}^n(0,R(p))}(p_0-p\odot_\alpha x)_+a(x)\,dx$$

при $0<p_0<p_0^*(p)$. Запишем

$$0\leqslant|\Pi_\alpha[a](p,p_0)|\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n_+\cap\mathbf{B}^n(0,R(p))}(p_0-p\odot_\alpha x)_+|a(x)|\,dx\leqslant$$
$$\leqslant p_0\int\limits_{\mathbb{R}^n_+\cap\mathbf{B}^n(0,R(p))}|a(x)|\,dx\leqslant Cp_0\int\limits_{\mathbb{R}^n_+\cap\mathbf{B}^n(0,R(p))}x_1^{\alpha(c_1-1)}\ldots x_n^{\alpha(c_n-1)}|a(x)|\,dx\leqslant$$
$$\leqslant Cp_0\|a(x)\|_{\mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}^n_+,x_1^{\alpha(c_1-1)}\ldots x_n^{\alpha(c_n-1)}\right)},$$

где $C>0$ — некоторая постоянная. Переходя к пределу при $p_0\to+0$, получаем, что $\Pi_\alpha[a](p,+0)=0$.

Теперь воспользуемся леммой 2.1 и запишем:

$$0 \leqslant \left| \frac{\partial \Pi_\alpha[a](p, p_0)}{\partial p_0} \right| \leqslant \int\limits_{p \odot_\alpha x \leqslant p_0} |a(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \cap \mathbf{B}^n(0, C_1 p_0)} |a(x)|\, dx \leqslant C_2 \int\limits_{\mathbb{R}_+^n \cap \mathbf{B}^n(0, C_1 p_0)} x_1^{\alpha(c_1 - 1)} \ldots x_n^{\alpha(c_n - 1)} |a(x)|\, dx,$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ — некоторые константы. Из принадлежности

$$x_1^{\alpha(c_1-1)} \ldots x_n^{\alpha(c_n-1)} a(x) \in \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}_+^n\right)$$

следует, что имеет место стремление

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n \cap \mathbf{B}^n(0, C_2 p_0)} x_1^{\alpha(c_1-1)} \ldots x_n^{\alpha(c_n-1)} |a(x)|\, dx \to 0, \quad p_0 \to +0.$$

Это доказывает, что $\frac{\partial \Pi_\alpha[a]}{\partial p_0}(p, +0) = 0$. Таким образом, доказаны равенства (9), а вместе с ними и теорема.

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации, соглашение №14.A18.21.0866.

Литература

1. *Шананин А. А* Исследование обобщённой модели чистой отрасли // Математическое моделирование. — 1997. — Т. 9, № 10. — С. 73–82.
2. *Krantz S. G., Parks H. R.* Geometric integration theory. — Boston: Birkhäuser, 2008.
3. *Lieb E. H., Loss M.* Analysis. — Providence: American Mathematical Society, 2001.
4. *Богачев В. И.* Основы теории меры. Т. 1. — М.–Ижевск: РХД, 2003.
5. *Henkin G. M., Shananin A. A.* Bernstein theorems and Radon transform. Application to the theory of production functions // Translations of Mathematical Monographs. — 1990. — V. 81. — P. 189–223.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
7. *Schwartz L.* Théorie de Distributions. — Paris: Hermann, 1966.
8. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.

Поступила в редакцию 09.12.2012.