

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С.Т. Беляев

**КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА СИСТЕМ
МНОГИХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ**

*Допущено
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению подготовки «Прикладные математика и физика»*

МОСКВА
МФТИ
2014

УДК 538.9, 539.1(075)

ББК 22.314я73

Б43

Рецензенты:

Кафедра теоретической ядерной физики

Национального исследовательского ядерного университета

«Московский инженерно-физический институт»

(зав. кафедрой, профессор *Н.Б. Нарожный*)

Доктор физико-математических наук *Э.Е. Саперштейн*

Беляев, С.Т.

Квантовая механика систем многих тождественных частиц:
учеб. пособие / С.Т. Беляев. – М.: МФТИ, 2014. – 68 с.

ISBN 978-5-7417-0539-1

Учебное пособие представляет собой введение в раздел современной квантовой теории, посвящённый методам описания систем, состоящих из многих одинаковых частиц. Эти методы широко используются в физике конденсированных сред, ядерной физике, а также в теории квантовых полей. Пособие основано на лекциях, читавшихся студентам факультета нано-, био-, информационных и когнитивных технологий МФТИ.

Предназначено для студентов III-IV курсов технических вузов, изучающих квантовую механику.

© Беляев С.Т., 2014

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2014

Оглавление

Предисловие	5
Введение	7
1 Квантовые системы	10
1.1 Основное состояние идеального ферми-газа	10
1.2 Электроны в атоме	11
1.3 Квантовое описание осциллятора	14
1.4 Квантование электромагнитного поля	16
2 Взаимодействие заряженных частиц с полем	19
2.1 Излучение и поглощение фотонов	19
2.2 Историческое отступление	20
3 Излучение в равновесии с веществом	22
3.1 Распределение Планка	22
3.2 А если равновесие излучения с веществом нарушить? Лазеры	24
3.3 Метод лазерного охлаждения	25
4 Лэмбовский сдвиг	27
4.1 Историческое отступление	27
4.2 Флуктуации электромагнитного поля в вакууме .	28
4.3 Историческое послесловие	31
5 Волновая функция системы тождественных частиц в представлении чисел заполнения	32
5.1 Представление чисел заполнения	32

5.2	Выражение физических операторов через a и a^+	33
5.3	Как работать с операторами a и a^+	34
6	Сверхтекучесть	39
6.1	Историческое отступление	39
6.2	Модель слабо неидеального бозе-газа	40
6.3	Преобразование Боголюбова	42
6.4	Историческое послесловие	44
7	Теория сверхпроводимости	46
7.1	Введение в проблему	46
7.2	Сверхпроводимость и классическая электродинамика	47
7.3	Эффект Мейснера	48
7.4	Теория Лондонов	49
7.5	Дорога к микроскопической теории сверхпроводимости	50
8	Теория сверхпроводимости БКШ	52
8.1	Основное состояние сверхпроводника. «Куперовские пары»	52
8.2	Микроструктура основного состояния	54
8.3	Свойства сверхпроводников, связанные с их спектром возбуждений	55
8.4	Гамильтониан, выраженный через операторы рождения и уничтожения квазичастиц	56
8.5	Уравнение для Δ	57
8.6	Гамильтониан для электронов в сверхпроводнике	58
9	Физические предсказания теории БКШ	60
9.1	Квантование потока	60
9.2	Туннельные эффекты в сверхпроводниках	61
9.3	SQUID — сверхпроводящий квантовый интерферометр	64
	Заключение	66
	Список литературы	67

Предисловие

Квантовая механика мучительно рождалась в первой трети двадцатого века. Необходимость новой механики была очевидна. Многие физические явления противоречили классическим законам. Так, планетарная модель атома (тяжелое центральное ядро и вращающиеся вокруг него электроны), которая следовала из опытов Резерфорда (1912 г.), по классическим законам могла существовать только 10^{-9} секунды, до того как электроны, потеряв свою энергию на излучение, падали на ядро.

Излучение атомов различных элементов к этому времени были достаточно хорошо изучены. Каждый химический элемент излучал характерные для него дискретные частоты. Для объяснения этих закономерностей Нильс Бор в 1913 году предложил свою модель атома, в которой для атома каждого элемента существуют «стационарные орбиты», на которых электроны не излучают. Лишь при переходе с одной стационарной орбиты на другую излучается разность энергий движения по этим орбитам. Эта боровская модель объясняла большой массив экспериментальных данных, и все восприняли ее как правильный рецепт для их объяснения. Но, с другой стороны, эта модель противоречила законам физики, обоснование которых имело славную историю.

В боровской модели стали определяться новые закономерности. Де Бройль устанавливает связь модели Бора с постоянной Планка h : стационарными являются орбиты, на которых укла-

дывается целое число волн с $\lambda = \frac{h}{mv}$.

В 1925 г. Гейзенберг предложил «матричную механику»: следует отказаться от непрерывного наблюдения за процессом движения электрона, а фиксировать только начальную и конечную точки, т.е. длину пути x_{fi} и разность импульсов p_{fi} . Макс Борн установил, что разности координат и импульсов связаны соотношениями

$$\sum_{nk} (x_{nk}p_{kn} - p_{nk}x_{kn}) = i\hbar \equiv i\frac{h}{2\pi}.$$

Через полгода Шредингер предложил волновую интерпретацию квантовой механики. Уравнение Шредингера дает математический фундамент квантовой механики, но не делает ее простой и понятной. На лекции Л.Ландау пришлось услышать его мнение: квантовую механику нельзя «понять», к ней надо «привыкнуть». Обычно «понять» означает объяснить, свести к уже накопленным опыту и знаниям. Но все нас окружающее функционирует по классическим законам. К этому квантовые закономерности не сводятся. К ним надо «привыкать», изучая квантовую механику.

Здесь предполагается, что читатель уже прошел процесс «привыкания» к квантовой механике, т.к. речь пойдет о довольно продвинутом ее разделе — системах из многих тождественных частиц, своеобразных методах их описания и физических процессах в них происходящих, где особое внимание будет уделено уникальным макроскопическим явлениям сверхтекучести и сверхпроводимости.

Введение

Системы из многих тождественных частиц принципиально по-разному описываются в классической физике и квантовой механике. Это связано с тем, что из общих законов квантовой физики следует

Принцип неразличимости тождественных частиц

В отличие от классической физики в квантовой механике две одинаковые частицы принципиально неразличимы. Это легко понять при рассмотрении системы двух одинаковых частиц. В классической механике, зная их положения и импульсы в начальный момент времени, мы можем следить за движением каждой частицы. Квантовое соотношение неопределенности исключает одновременное знание координаты и импульса в каждый момент времени. Поэтому, зная координаты двух частиц в разные моменты времени, нельзя указать начальную и конечную точку каждой частицы. Принципиальная неразличимость одинаковых частиц приводит к особенностям их описания.

Рассмотрим простую квантовую систему из двух тождественных частиц (1, 2), которые могут занимать состояния (a, b) . Волновую функцию можно представить в виде

$$\Psi(x_1, x_2) = \Psi_a(x_1)\Psi_b(x_2), \quad (1)$$

но так как частицы неразличимы, то их перестановка не должна менять квантовое состояние, и может изменить только фазу

волновой функции. Возможны два случая,

$$\Psi(x_1, x_2) = \pm \Psi(x_2, x_1), \quad (2)$$

и правильную Ψ -функцию для нашего примера двух частиц, занимающих два квантовых состояния, вместо (1) следует записать в виде

$$\Psi(x_1, x_2) = \Psi_a(x_1)\Psi_b(x_2) \pm \Psi_a(x_2)\Psi_b(x_1). \quad (3)$$

Знак « \pm » в (3) имеет принципиальное значение. Оказалось, что в природе существуют два типа частиц. Их называют

Бозоны и фермионы

Для них в (3) следует выбирать разные знаки. Выбор определяется спином частиц. При целом спине $(0, 1, \dots)$ следует выбирать знак «+», при полуцелом спине $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$ — знак «-». Эти правила строго доказываются в квантовой теории поля, но мы примем их без доказательства.

Частицы с целым спином принято называть бозе-частицами или бозонами, частицы с полуцелыми спинами называют ферми-частицами или фермионами.

Для фермионов правая часть (3) при одинаковых состояниях a и b обращается в нуль. Это означает, что две ферми-частицы не могут находиться в одном квантовом состоянии («принцип Паули»).

Число слагаемых в волновой функции, построенной по типу (3), быстро увеличивается с ростом числа состояний и размещаемых на них частиц (для ферми-частиц — как $n!$). Очевидно, что для систем многих частиц (нуклонов в ядрах или электронов в металле) требуются другие способы описания квантовых состояний. И это возможно, так как частицы тождественны и нет необходимости их нумеровать, как это сделано в нашей задаче о двух частицах в двух состояниях. Достаточно задать число частиц в каждом состоянии.

Так, основное состояние для идеального бозе-газа (системы любого числа тождественных, невзаимодействующих бозе-частиц) очевидно: все частицы будут находиться в самом нижнем

энергетическом состоянии, а все возбуждения связаны с переходом частиц на верхние энергетические уровни.

Аналогичную задачу для ферми-частиц полезно рассмотреть более подробно. Мы начнём с неё Главу 1, посвящённую основным свойствам некоторых квантовых систем, важных для нашего дальнейшего изложения.

Глава 1

Квантовые системы

1.1 Основное состояние идеального ферми-газа

Эта, казалось бы, абстрактная задача имеет важные практические применения. Одно из них связано с описанием электронов в металле. Электроны — отрицательно заряженные ферми-частицы, но в металле их заряд скомпенсирован ионами кристаллической решетки, поэтому с точностью, достаточной для многих приложений, их можно рассматривать как идеальный ферми-газ, равномерно распределенный по объему металла.

Выделим внутри металла некоторый объем V . Состояния электронов внутри этого объема будем различать их импульсами. При температуре $T = 0$ электроны будут занимать нижние уровни, от $p = 0$ до некоторого максимального p_F («импульса Ферми»). Число различных квантовых состояний N (и электронов, которые можно на них расположить) определяется количеством ячеек размером $(2\pi\hbar)^3$ в полном фазовом объеме, т.е. величиной

$$N = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} V(2s + 1) \frac{4\pi}{3} p_F^3, \quad (1.1)$$

где $(2s + 1)$ — число различных спиновых состояний (для электронов — 2). Формула (1.1) определяет зависимость импульса Ферми p_F от плотности $n = N/V$.

В основном состоянии электроны будут занимать все уровни энергии от нулевой до максимальной, называемой «энергией Ферми», $\varepsilon_F = p_F^2/2m$. Плотность электронов при этом ограничена числом квантовых состояний: в каждой ячейке фазового пространства объемом $(2\pi\hbar)^3$ могут разместиться только два электрона с противоположными спинами. Это условие дает связь между импульсом Ферми и плотностью электронов n ,

$$p_F = \hbar(3\pi^2 n)^{1/3}. \quad (1.2)$$

1.2 Электроны в атоме

От идеального ферми-газа перейдем к рассмотрению реальной ферми-системы заряженных электронов в атоме.

Для одного электрона в кулоновском потенциале ядра с зарядом Ze известно точное решение уравнения Шредингера. Все состояния дискретного спектра характеризуются тремя квантовыми числами: главным квантовым числом n , орбитальным моментом l и его проекцией m . Энергии уровней зависят только от $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$E_n = -\frac{m(Ze^2)^2}{2\hbar^2 n^2}, \quad (1.3)$$

а для каждого n возможны значения моментов $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$, так что каждый энергетический уровень E_n вырожден с кратностью

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2. \quad (1.4)$$

Принято атомные состояния обозначать числом n и латинской буквой для момента l : s, p, d, f, g, h, \dots (вместо $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$). Так $2s$ и $3d$ означают состояния $n = 2, l = 0$ и $n = 3, l = 2$.

Итак, мы имеем точное решение уравнения Шредингера для водородоподобного атома, т.е. одного электрона в поле ядра с зарядом Ze . Когда электрон занимает самое нижнее состояние, то из (1.3) при $n = 1, Z = 1$ найдем энергию основного состояния атома водорода.

Вопрос: последовательно заполняя электронами самые нижние свободные состояния и суммируя их энергии из (1.3) (увеличивая каждый раз Z на единицу), будем ли мы получать правильные энергии основных состояний все более тяжелых атомов? Ответ отрицательный, так как не учитывается энергия взаимодействия между электронами. Причем ошибка не мала, так как суммарный заряд электронов равен заряду ядра. Поле электронов является самосогласованным, так как оно определяется плотностью электронов, которая сама зависит от волновых функций электронов при движении в этом поле. Точного решения уравнений с самосогласованным полем не существует, но легко можно аппроксимировать это решение последовательными приближениями одноэлектронного уравнения Шредингера с меняющимся центральносимметричным потенциалом. При учете только поля ядра для всех занятых электронами состояний известны волновые функции, т.е. распределение электронов в пространстве. Распределение заряда определяет электрическое поле. Решение уравнения Шредингера с новым полем дает поправленные волновые функции. Повторяя эту операцию мы будем со все большей точностью определять самосогласованное поле. Но и без детального вычисления самосогласованного поля легко установить его влияние на энергетический спектр, заполняемых электронами уровней.

В отсутствие выделенного направления самосогласованное поле естественно считать центрально симметричным. Известно, что в таком поле волновые функции при приближении к центру убывают как r^l . Поэтому с увеличением l притяжение ядра уменьшается и все более чувствуется заряд электронов. Это приводит к расщеплению уровней водородоподобного атома по моменту, и чем больше l , тем больше уровень сдвигается вверх. Группировки уровней уже не определяются главным квантовым числом $n = 2, 3, 4, \dots$ т.к. уровни с большими моментами, d ($l = 2$) и особенно f ($l = 3$), сдвигаясь вверх, догоняют s - и p -состояния с большими n . Качественно группировки электронных состояний (с учетом двух проекций спина) представлены в следующей таблице:

Таблица

n	электронные состояния	число мест для электронов
1	$1s$	2
2	$2s, 2p$	8
3	$3s, 3p$	8
4	$4s, 3d$ (от Sc до Zn), $4p$	18
5	$5s, 4d$ (от Y до Cd), $5p$	18
6	$6s, 4f$ (лантаноиды), $5d$ (от Lu до Hg), $6p$	32
7	$7s, 5f$ (актиноиды), $6d$ (трансактиноиды) ...	

Видно, что эти группировки электронных уровней точно соответствуют периодам таблицы Менделеева (ТМ).

По электронным спектрам легко понять и другие свойства элементов ТМ.

Химическая активность атомов связана с энергией связи верхнего электрона, которую естественно сравнивать с известной энергией для атома водорода. Для гелия заряд ядра удваивается, поэтому почти вдвое возрастает энергия связи. Следующий электрон (в литии, Li) занимает более высокую орбиту $2s$ и его энергия связи резко падает. По мере дальнейшего заполнения электронных орбит график изменения энергии связи приобретает пилообразный вид с вершинами для инертных газов (Ne, Ar, Kr, Xe) и провалами для наиболее активных химических элементов (Li, Na, K, Rb, Cs). Это полностью соответствует таблице Менделеева.

Валентность в квантовой механике связана с числом «неспаренных» электронных спинов в атоме, что тоже полностью соответствует ТМ.

Волновые функции электронных d -состояний ($l = 2$) и особенно f -состояний ($l = 3$) из-за центробежного потенциала расположены в глубине атома и слабо влияют на химическую связь, определяемую в основном внешними электронами. Поэтому элементы, отличающиеся только заполнением d - или f -состояний

имеют близкие химические свойства, что соответствует «группам» в ТМ.

Атомы все же являются системами с не очень большим числом электронов. А наша главная задача — рассмотрение систем из большого (макроскопического) числа частиц. Одна из таких задач — идеальный ферми-газ — была рассмотрена выше. Но эта система довольно простая, а нашей задачей является сформулировать общий метод рассмотрения систем многих тождественных частиц.

Но прежде чем сформулировать такой метод, полезно опробовать его на простой задаче.

1.3 Квантовое описание осциллятора

Решение этой задачи известно. Гамильтониан одномерного осциллятора имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}. \quad (1.5)$$

Решение соответствующего уравнения Шредингера определяет как волновые функции (через полиномы Эрмита), так и энергетический спектр — эквидистантные уровни с энергиями

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Мы получим решение другим способом, не рассматривая уравнение Шредингера. Гамильтониан (1.5) можно записать как произведение двух множителей

$$\hat{H} = \left(\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} + i\sqrt{\frac{m}{2}} \omega \hat{x} \right) \left(\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} - i\sqrt{\frac{m}{2}} \omega \hat{x} \right) + \frac{\hbar\omega}{2}, \quad (1.7)$$

где дополнительный член возник из-за некоммутативности операторов \hat{x} и \hat{p} .

Две скобки в (1.7) эрмитово сопряжены друг другу. Обозначим их как $\sqrt{\hbar\omega} \hat{a}^+$, $\sqrt{\hbar\omega} \hat{a}$. Легко проверить, что эрмитово сопряженные операторы \hat{a}^+ и \hat{a} коммутируют как $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$. Введем также оператор $\hat{n} = \hat{a}^+ \hat{a}$. Тогда гамильтониан (1.7) можно

записать в виде

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.8)$$

Рассмотрим уравнения, определяющие собственные состояния и собственные значения эрмитового оператора \hat{n}

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (1.9)$$

Используя следствия из коммутационных соотношений операторов \hat{a} , \hat{a}^+ и \hat{n}

$$\hat{n}\hat{a}^+ = \hat{a}^+(\hat{n} + 1), \quad \hat{n}\hat{a} = \hat{a}(\hat{n} - 1), \quad (1.10)$$

найдем, что состояния $\hat{a}^+|n\rangle$ и $\hat{a}|n\rangle$ также являются собственными состояниями оператора \hat{n} с собственными значениями $n + 1$ и $n - 1$.

В основном состоянии $n = 0$, а каждое возрастание n на единицу добавляет энергию $\hbar\omega$. Это можно трактовать иначе.

Будем представлять наш осциллятор как некоторую ячейку, которая может заполняться тождественными частицами с энергиями $\hbar\omega$. Все изменения происходят путем изменения числа частиц действием операторов \hat{a} или \hat{a}^+ , которые естественно назвать операторами уничтожения и рождения частиц, а \hat{n} — оператором числа частиц. Из сравнения гамильтониана (1.8) с его энергетическим спектром (1.6) видно, что собственные состояния оператора \hat{n} равны неотрицательным целым числам.

Итак, наш осциллятор можно описывать как ячейку (характеризуемую параметром — частотой), а ее заполнение — целым неотрицательным числом n . Естественное обобщение — система многих осцилляторов, которая описывается набором из многих ячеек с индивидуальными операторами рождения и уничтожения частиц в каждой из них. В следующем разделе этот метод будет использован при рассмотрении важной физической задачи.

1.4 Квантование электромагнитного поля

Рассмотрим некоторый замкнутый макроскопический объем V , в котором возбуждены и поддерживаются электромагнитные колебания всех возможных частот и направлений. На языке уравнений Максвелла это стационарное электромагнитное поле без источников (зарядов и токов). Для его описания можно выбрать электромагнитные потенциалы с дополнительными условиями

$$\varphi = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (1.11)$$

Тогда уравнения Максвелла сводятся к

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (1.12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.13)$$

Разложим векторный потенциал \mathbf{A} в ряд Фурье по собственным колебаниям в объеме V :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\mathbf{e}_\lambda b_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{e}_\lambda^* b_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right), \quad (1.14)$$

где каждое собственное колебание, характеризуемое волновым вектором \mathbf{k} и частотой $\omega = kc$, может иметь две поляризации λ .

Разные колебания ортогональны, т.е. выполняются условия

$$\frac{1}{V} \int dV e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{r}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_{\lambda'}^* = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (1.15)$$

Для нашего большого (макроскопического) объема суммы по \mathbf{k} можно заменять интегралами,

$$\sum_{\mathbf{k}} \implies \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k. \quad (1.16)$$

Из (1.14) и (1.12) найдем для электрического поля

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} ik \left(\mathbf{e}_\lambda b_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} - \mathbf{e}_\lambda^* b_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right). \quad (1.17)$$

Как известно из курса электродинамики, в электромагнитной волне квадраты электрических и магнитных полей равны, поэтому полная энергия поля во всем объеме определяется интегрированием \mathbf{E}^2 по объему. При интегрировании квадрата суммы (1.17) интегралы от различных компонент исчезают в силу условий ортогональности (1.15). В результате для полной энергии поля в объеме получим

$$W = \frac{1}{4\pi} \int dV \mathbf{E}^2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} k^2 (b_{\mathbf{k}\lambda}^* b_{\mathbf{k}\lambda} + b_{\mathbf{k}\lambda} b_{\mathbf{k}\lambda}^*). \quad (1.18)$$

До сих пор наше описание было чисто классическим. Теперь попробуем сформулировать ограничения, которые накладываются на полученные результаты квантовыми законами.

Каждую гармонику электромагнитных колебаний (с определенным волновым вектором и поляризацией) можно сопоставить осциллятору. В отличие от классического описания, квантовая механика допускает только дискретные значения для амплитуд и энергий осциллятора. Для полного квантового описания состояния электромагнитного поля в объеме следует для каждого осциллятора (характеризуемого квантовыми числами $\mathbf{k}\lambda$) указать его энергетический уровень $n_{\mathbf{k}\lambda}$. Поэтому полная энергия всех колебаний (1.18) в квантовой механике имела бы вид суммы энергий всех осцилляторов

$$W = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar\omega \left(n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{\hbar\omega}{2} (a_{\mathbf{k}\lambda}^+ a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda}^+), \quad (1.19)$$

где операторы $a_{\mathbf{k}\lambda}$, $a_{\mathbf{k}\lambda}^+$, $n_{\mathbf{k}\lambda}$ связаны соотношениями

$$[a_{\mathbf{k}\lambda}, a_{\mathbf{k}'\lambda'}^+] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad n_{\mathbf{k}\lambda} = a_{\mathbf{k}\lambda}^+ a_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (1.20)$$

Выражение (1.18) перейдет в (1.19) при формальной замене

$$b_{\mathbf{k}\lambda} \Rightarrow \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega}} a_{\mathbf{k}\lambda}, \quad b_{\mathbf{k}\lambda}^* \Rightarrow \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega}} a_{\mathbf{k}\lambda}^+. \quad (1.21)$$

При этом векторный потенциал (1.14) примет вид

$$\mathbf{A} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega}} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\mathbf{e}_{\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{e}_{\lambda}^* a_{\mathbf{k}\lambda}^+ e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right). \quad (1.22)$$

Введение «квантовых осцилляторов» (различающихся значениями $\mathbf{k}\lambda$) позволило сделать заключение о том, что состояние всей системы определяется уровнями, на которых находится каждый из осцилляторов, т.е. параметрами $n_{\mathbf{k}\lambda}$, а энергия поля меняется дискретными порциями, равными расстояниям между уровнями для каждого осциллятора $\hbar\omega \equiv \hbar\omega_{\mathbf{k}\lambda}$.

Состояние такой системы в представлении чисел заполнения описывается перечислением возможных «одночастичных» состояний (разные $\mathbf{k}\lambda$) и чисел их заполнения ($n_{\mathbf{k}\lambda}$), изменение которых производится действием операторов $a_{\mathbf{k}\lambda}$, $a_{\mathbf{k}\lambda}^+$.

Будем трактовать полученные результаты иначе. Забудем об осцилляторах и будем считать, что порции энергий $\hbar\omega$ принадлежат реальным физическим объектам, «квантам» или «фотонам». Так, если осциллятор с частотой $\omega_{\mathbf{k}\lambda}$ находился на уровне $n_{\mathbf{k}\lambda}$, то это означает, что в системе есть $n_{\mathbf{k}\lambda}$ квантов этого типа. Переход осциллятора вниз или вверх соответствует рождению или уничтожению такого кванта. Другими словами, состояние электромагнитного поля описывается как «газ» квантов-фотонов.

Очевидно, что наши кванты являются бозе-объектами, т.к. в одном и том же состоянии $\mathbf{k}\lambda$ может находиться любое количество «квантов». Своеобразие такого «бозе-газа» квантов — несохранение их числа.

Надо сознавать, что понятие «кванта» или «фотона» было введено чисто умозрительно для альтернативной трактовки спектра возбуждений электромагнитного поля. Реальность этих понятий требует, конечно, экспериментального подтверждения, например, наблюдением их излучения или поглощения. Этот вопрос рассматривается ниже.

Глава 2

Взаимодействие заряженных частиц с полем

2.1 Излучение и поглощение фотонов

Учет наличия внешнего электромагнитного поля в уравнении Шредингера (при выборе потенциалов в калибровке (1.11)) производится заменой кинетической энергии

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \Rightarrow \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2, \quad (2.1)$$

так что в первом порядке по полю взаимодействие заряженной частицы с этим полем равно

$$H_{int} = -\frac{e}{mc} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) \Rightarrow -\frac{1}{c} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}). \quad (2.2)$$

При использовании в (2.2) для \mathbf{A} значения (1.22) для квантованного поля, поправка к гамильтониану H_{int} описывает излучение и поглощение фотонов системами заряженных частиц. Для оценки этих эффектов используем общую формулу теории возмущений для переходов в непрерывный энергетический спектр с

плотностью ρ_E ,

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \left\langle f, \bar{n}_{\mathbf{k}\lambda}^f | H_{int} | i, \bar{n}_{\mathbf{k}\lambda}^i \right\rangle \right|^2 \rho_E. \quad (2.3)$$

Это выражение описывает процесс, в котором система заряженных частиц (атом, молекула, ядро, ...) излучает (при $\bar{n}_{\mathbf{k}\lambda}^f = \bar{n}_{\mathbf{k}\lambda}^i + 1$) или поглощает (при $\bar{n}_{\mathbf{k}\lambda}^f = \bar{n}_{\mathbf{k}\lambda}^i - 1$) квант $\mathbf{k}\lambda$, когда в начальном состоянии поля было $n_{\mathbf{k}\lambda}^i$ квантов. Изменение $\bar{n}_{\mathbf{k}\lambda}^f$ возникает от операторов $a_{\mathbf{k}\lambda}$ или $a_{\mathbf{k}\lambda}^+$. Их матричные элементы можно получить, используя формулы

$$\hat{n}_{\mathbf{k}\lambda} = a_{\mathbf{k}\lambda}^+ a_{\mathbf{k}\lambda}, \quad \hat{n}_{\mathbf{k}\lambda} + 1 = a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda}^+. \quad (2.4)$$

В матричном представлении

$$\begin{aligned} n_{\mathbf{k}\lambda} &= \langle n_{\mathbf{k}\lambda} | a_{\mathbf{k}\lambda}^+ | n_{\mathbf{k}\lambda} - 1 \rangle \langle n_{\mathbf{k}\lambda} - 1 | a_{\mathbf{k}\lambda} | n_{\mathbf{k}\lambda} \rangle, \\ n_{\mathbf{k}\lambda} + 1 &= \langle n_{\mathbf{k}\lambda} | a_{\mathbf{k}\lambda} | n_{\mathbf{k}\lambda} + 1 \rangle \langle n_{\mathbf{k}\lambda} + 1 | a_{\mathbf{k}\lambda}^+ | n_{\mathbf{k}\lambda} \rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Множители в правых частях (2.5) эрмитово сопряжены, поэтому

$$n_{\mathbf{k}\lambda} = |\langle n_{\mathbf{k}\lambda} - 1 | a_{\mathbf{k}\lambda} | n_{\mathbf{k}\lambda} \rangle|^2, \quad n_{\mathbf{k}\lambda} + 1 = |\langle n_{\mathbf{k}\lambda} + 1 | a_{\mathbf{k}\lambda}^+ | n_{\mathbf{k}\lambda} \rangle|^2. \quad (2.6)$$

Вероятности излучения (е) и поглощения (а) в (2.3) отличаются только матричными элементами (2.6). В итоге для отношения вероятностей излучения w_e и поглощения w_a одинаковых квантов находим

$$\frac{w_e}{w_a} = \frac{\bar{n} + 1}{\bar{n}}. \quad (2.7)$$

2.2 Историческое отступление

Исследование взаимодействия излучения с веществом имеет давнюю историю. Камни от солнца нагреваются (и температура зависит от их цвета). И наоборот нагретое железо начинает светиться и с повышением температуры меняет цвет. И когда научились измерять температуру и длину волны (частоту) излучения, то пытались установить зависимость спектра излучения от температуры.

Но оказалось, что такого общего закона не существует, он различен для каждого вещества, характера его поверхности. Возникла идея установить этот закон для определенного материального образца, так чтобы можно было сравнивать и уточнять результаты, полученные разными исследователями. Так возникла модель «абсолютно черного тела», которое полностью поглощает падающее на него излучение и ничего не излучает наружу.

Представим себе полый шар (типа футбольного мяча), но из металла, с очень маленьким отверстием. Если в это отверстие пройдет луч света (или другого излучения), то он будет многократно отражаться от стенок, но вероятность его выхода наружу очень мала, практически нулевая. При нагревании шара его внутренняя поверхность будет излучать и его спектр будет меняться в зависимости от температуры. Очень малая часть этого излучения будет выходить из отверстия, что дает возможность измерять спектр излучения.

В конце 19 века эти исследования проводились в нескольких лабораториях с возрастающей точностью и результаты активно обсуждались на научных собраниях (в основном Немецкого физического общества). В 1896 году Вин (W. Wien) установил, что интенсивность излучения быстро (экспоненциально) падает при увеличении отношения ω/T . Но довольно быстро Релей и Джинс, изучая тепловое (низкочастотное) излучение, нашли, что его интенсивность, наоборот, растет с ростом ω/T .

Наконец, в декабре 1900 года на заседании немецкого физического общества Макс Планк предложил единую формулу, которая для высоких частот переходила в «закон Вина», а для малых частот — в закон Релея-Джинса. Для этого Планку потребовалось ввести новый параметр \hbar , получивший с тех пор название «постоянной Планка». Это принято считать началом квантовой механики, хотя до ее реального создания потребовалось почти четверть века. Полезно взглянуть на место формулы Планка в сегодняшней квантовой механике. Этому посвящена следующая глава.

Глава 3

Излучение в равновесии с веществом

3.1 Распределение Планка

Рассмотрим процессы, происходящие внутри абсолютно черного тела, с точки зрения квантовой механики. При нулевой абсолютной температуре все атомы материала стенки находятся в основном состоянии. При нагревании они переходят в возбужденные состояния и начинают излучать. При фиксированной температуре устанавливается равновесие между излучением и веществом. Легко сформулировать условие равновесия.

Рассмотрим два уровня некоторого атома, верхний (u) и нижний (d) с энергиями E_u и E_d . При переходах между этими уровнями излучаются и поглощаются кванты с энергией $\hbar\omega = (E_u - E_d)$. В равновесии число переходов вверх и вниз равно, что можно записать в виде

$$w_e N_u = w_a N_d, \quad (3.1)$$

где w_e и w_a вероятности излучения и поглощения, отношение которых определено в (2.7), а N_u , N_d числа частиц в верхнем и нижнем состояниях, отношение которых в термодинамическом

равновесии определяется соотношением Гиббса,

$$\frac{N_u}{N_d} = \exp\left(\frac{E_d - E_u}{kT}\right) \Rightarrow \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right). \quad (3.2)$$

Из (3.1) с учетом (2.7) и (3.2) получаем

$$\frac{w_e}{w_a} = \frac{\bar{n} + 1}{\bar{n}} = \frac{N_d}{N_u} = \exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right), \quad (3.3)$$

откуда для распределения квантов внутри объема по их частоте находим

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}. \quad (3.4)$$

От \bar{n} , среднего числа квантов в объеме V , удобно перейти к плотности энергии излучения,

$$\begin{aligned} \rho(\omega)d\omega &= \bar{n} \times \hbar\omega \times \left(\text{число квантовых состояний в } \frac{d\omega}{V}\right) = \\ &= \bar{n} \times \hbar\omega \times \frac{4\pi\omega^2 d\omega}{(2\pi c)^3} \times (2 \text{ поляризации}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

В результате для плотности энергии излучения, находящегося в равновесии с веществом, получаем распределение Планка

$$\rho(\omega)d\omega = \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}. \quad (3.6)$$

При больших частотах, когда $\hbar\omega \gg kT$, единицей в знаменателе (3.6) можно пренебречь и формула переходит в закон Вина,

$$\rho(\omega)d\omega \approx \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \omega^3 d\omega. \quad (3.7)$$

В обратном предельном случае, оставляя два первых члена в разложении экспоненты, получаем выражение

$$\rho(\omega)d\omega \approx \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega, \quad (3.8)$$

которое не содержит \hbar , совпадает с классическим распределением энергии по степеням свободы и называется законом Рэлея – Джинса.

3.2 А если равновесие излучения с веществом нарушить? Лазеры

Равновесное распределение атомов вещества определяется распределением Гиббса (3.2), при котором верхний уровень всегда заселен меньше нижнего. Что произойдет, если верхний уровень более заселен, чем нижний? Равновесие будет восстанавливаться с излучением квантов. И т.к. вероятность излучения пропорциональна числу уже имеющихся квантов, то если равновесие было нарушено в большом объеме вещества, мощность излучения будет нарастать лавинообразно.

Как создать неравновесную заселенность в большом объеме? Это можно сделать, если закачать в вещество энергию и перевести достаточно большое число атомов в состояния, лежащие выше двух «рабочих уровней», причем таких, переходы с которых могут происходить на верхний рабочий уровень, что и приведет к инверсной заселенности.

Созданием условий для такого излучения и его использованием занимаются специалисты в области физики лазеров — источников мощного когерентного излучения (LASER — Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation). Для неспециалиста работа лазера очевидна — превращать обычную энергию (скажем, электрическую) в луч света (разной, но фиксированной частоты). На самом деле, лазеры различаются по виду используемого вещества (твердотельные, газовые, ...), по способу и виду подводимой энергии, по мощности, характеру излучения (непрерывному, импульсному), по области излучаемых частот (инфракрасные, видимые, рентгеновские, ...), по качеству пучка (ширина излучаемой частоты, длина импульса, ...). Создаются принципиально новые типы лазеров — «лазер на свободных электронах», использующий в качестве вещества электронный пучок.

Расширяются и области применения лазеров. Иногда лазеры применяются в самых неожиданных областях. Например, для охлаждения разреженных газов до рекордно низких температур в доли микрокельвина. Этот уникальный метод «лазерного охлаждения» заслуживает более подробного рассмотрения.

3.3 Метод лазерного охлаждения

Выражение «лазерное охлаждение» кажется странным. Лазерный луч — поток энергии. Как он может что-то охладить? Однако такая возможность возникает, если кванты в пучке имеют строго одинаковую энергию, причем с очень большой точностью. Именно лазеры могут иметь требуемое качество пучка.

Лазерное охлаждение основано на трех простых законах физики.

1. При поглощении кванта передается не только энергия, но и импульс. Поэтому пучок атомов, движущийся навстречу лазерному пучку, при поглощении фотонов будет тормозиться (на импульс фотона). Конечно, при последующем излучении кванта атомы будут приобретать такой же импульс. Но так как излучение может происходить во все направления, то в среднем происходит торможение пучка.

Однако, если же атомы движутся по направлению лазерного пучка, то таким же образом они в среднем будут ускоряться. Понятно, что если создать такие условия, когда фотоны поглощают только атомы, движущиеся навстречу пучку, а движущиеся по пучку — не поглощают, то будет происходить только охлаждение. Это можно сделать, основываясь на двух физических законах:

2. «Порог поглощения фотонов атомами»: атомы в основном состоянии могут поглощать фотоны только с энергией, не меньше расстояния до первого возбужденного уровня.

3. Эффект Доплера: атомы, движущиеся навстречу лазерному пучку «видят» фотоны большей энергии, движущиеся по пучку — меньшей энергии.

Если выбрать лазер, излучающий фотоны с энергией, немного ниже порога поглощения, но так что для атомов, движущихся навстречу пучку (в некотором конусе телесных углов), фотоны будут уже выше порога поглощения. Тогда эти атомы будут охлаждаться, а межатомные столкновения будут приводить к охлаждению всего газа.

Для повышения эффективности используют несколько тождественных лазеров: по два встречных лазера по всем трем осям.

Именно таким способом были получены рекордно низкие температуры (ниже $1 \mu\text{K}$), при которых стало возможным наблюдать «бозе–эйнштейновскую конденсацию» молекулярного газа, о чем будет сказано ниже.

Глава 4

ЛЭМБОВСКИЙ СДВИГ

4.1 Историческое отступление

Как уже рассматривалось в разделе 1.2, в точном решении уравнения Шредингера для атома водорода первый возбужденный уровень ($n = 2$) четырехкратно вырожден по моментам $l = 0, 1$ (состояния $2s$ и $2p$).

В уравнении Дирака состояния водорода характеризуются также полным моментом j , суммой орбитального и спинового, поэтому можно говорить о состояниях $2s_{\frac{1}{2}}$, $2p_{\frac{1}{2}}$, $2p_{\frac{3}{2}}$. В решении уравнения Дирака уровень $n = 2$ расщепляется на два уровня с $j = \frac{1}{2}$ и $j = \frac{3}{2}$. Так что состояниях $2s_{\frac{1}{2}}$ и $2p_{\frac{1}{2}}$ остаются вырожденными.

Свойства состояний $2s_{\frac{1}{2}}$ и $2p_{\frac{1}{2}}$ качественно различны. Состояние $2p_{\frac{1}{2}}$ — обычное короткоживущее с временем жизни 10^{-9} с, переходящее в основное состояния после излучения самого «вероятного» дипольного кванта. А состояние $2s_{\frac{1}{2}}$ живет необычно долго (на 8 порядков дольше). Его переход в основное состояние с излучением любого кванта запрещен и может происходить с очень маловероятным излучением двух квантов.

Почему столь различные состояния имеют одинаковую энергию? Может быть их энергии все же различны? И существуют в природе явления, выходящие за рамки квантовой механики,

которые приводят к расщеплению этих состояний?

Еще до 2-й мировой войны разность энергий двух состояний пытались определить экспериментально, сравнивая энергии электромагнитных переходов из верхних уровней атома в каждое из этих состояний. Определенного результата получить не удалось из-за больших экспериментальных ошибок. Наиболее убедительным экспериментом было бы наблюдение прямого перехода между состояниями $2s_{\frac{1}{2}}$ и $2p_{\frac{1}{2}}$ под действием резонансного радиоизлучения. Однако до войны генераторы радиоизлучения были слишком несовершенны.

После войны, в 1947 г., произошел прорыв как в экспериментальной, так и в теоретической области.

Теоретики предположили, что если электромагнитное поле полностью подчиняется квантовым законам, то даже при отсутствии зарядов и токов, то есть в вакууме, должны существовать флуктуации электромагнитного поля, которые приведут в увеличению энергии состояния $2s$, другими словами, к расщеплению уровней.

Колоссальный прогресс радиолокации за время войны, где использовалось радиоизлучение близкого, лишь на порядок более длинноволнового диапазона, дал возможность У. Лэмбу измерить расщепление уровней, которое совпало с теоретическим предсказанием.

Так произошло открытие новой области физики — квантовой электродинамики.

4.2 Флуктуации электромагнитного поля в вакууме

В разделе 1.4, где рассматривалось квантование электромагнитного поля, для его полной энергии в объеме V было получено выражение (1.19)

$$W = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar \omega \left(n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.1)$$

где $n_{\mathbf{k}\lambda}$ оператор числа квантов с квантовыми числами $\mathbf{k}\lambda$.

Из выражения (4.1) следует, что даже если в объеме V никаких квантов нет, т.е. в вакууме, энергия поля не равна нулю. Для каждой гармонике $\mathbf{k}\lambda$ остается энергия

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{1}{2} \hbar \omega_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (4.2)$$

Как это следует понимать? Если есть электромагнитная энергия, то должны быть электрическое и магнитное поле. Куда они направлены? Ведь в вакууме нет никакого выделенного направления. Остается предположить, что поля переменные, флуктуирующие, так что их средние значения равны нулю, а отличны от нуля средние значения квадратов полей, т.е.

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{1}{2} \hbar \omega_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{1}{8\pi} \left(\overline{E_\omega^2} + \overline{H_\omega^2} \right) V = \frac{1}{4\pi} \overline{E_\omega^2} V. \quad (4.3)$$

Из (4.3) находим для квадрата электрического поля гармоники $\mathbf{k}\lambda$

$$\overline{E_\omega^2} = \frac{2\pi}{V} \hbar \omega_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (4.4)$$

Под действием этого поля электрон в атоме водорода колеблется с амплитудой ξ , которую можно оценить из уравнения Ньютона,

$$m \ddot{\xi}_\omega = e E_\omega, \quad \xi_\omega = -\frac{e}{m\omega^2} E_\omega. \quad (4.5)$$

Для среднего квадрата амплитуды колебаний (дрожания) найдем

$$\overline{\xi_\omega^2} = \left(\frac{e}{m\omega^2} \right)^2 \overline{E_\omega^2} = \frac{2\pi}{V} \frac{\hbar e^2}{m^2 \omega^3}. \quad (4.6)$$

Если учесть все колебания, с разными частотами и поляризациями, то суммируя (4.6), найдем

$$\overline{\xi^2} = \frac{2\pi}{V} \frac{\hbar e^2}{m^2} \int \frac{N(\omega)}{\omega^3} d\omega = \frac{2\hbar e^2}{\pi m^2 c^3} \int \frac{d\omega}{\omega}, \quad (4.7)$$

где в последнем равенстве использована часть выражения (3.5) для числа состояний

$$N(\omega) d\omega = V \frac{4\pi\omega^2 d\omega}{(2\pi c)^3} \cdot 2 = \frac{V\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}. \quad (4.8)$$

Интеграл по ω в (4.7) логарифмически расходится и его следует обрезать на нижнем и верхнем пределах. В исходных уравнениях рассматривалось классическое уравнение Ньютона для свободного электрона, поэтому естественно брать значения ω , не выводящие из этих предположений: в качестве нижней границы — энергию связи электрона в атоме, а для верхней границы — mc^2 , т.е.

$$mc^2 \geq \hbar\omega \geq mc^2 \left(\frac{Ze^2}{\hbar c} \right)^2 \equiv \frac{Ze^2}{\hbar^2/(Zme^2)}. \quad (4.9)$$

В результате квадрат амплитуды «дрожания» электрона в атоме выражается через атомный размер a_0 и постоянную тонкой структуры α ,

$$\bar{\xi}^2 = \frac{2\hbar e^2}{\pi m^2 c^3} \ln \left(\frac{f}{(Z\alpha)^2} \right) = \frac{2}{\pi} a_0^2 \cdot \alpha^3 \cdot \ln \left(\frac{f}{(Z\alpha)^2} \right), \quad (4.10)$$

где f — число порядка единицы.

Рассмотрим теперь электрон в атоме, где его взаимодействие с ядром определяется потенциалом $U(\mathbf{r})$. При смещении электрона ξ действующий на него потенциал будет $U(\mathbf{r} + \xi)$ и его усредненное по дрожанию значение приводит к изменению среднего потенциала,

$$\overline{U(\mathbf{r} + \xi)} - U(\mathbf{r}) \approx \bar{\xi} \cdot \nabla U(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \overline{\xi_\alpha \xi_\beta} \frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} U. \quad (4.11)$$

Учитывая, что отличны от нуля только средние от квадратов компонент ξ_α , найдем для поправки к потенциалу электрона в атоме ,

$$\delta U = \overline{U(\mathbf{r} + \xi)} - U(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{6} \bar{\xi}^2 \nabla^2 U(\mathbf{r}). \quad (4.12)$$

Для водородоподобного атома

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{Ze^2}{r}, \quad \nabla^2 U(\mathbf{r}) = 4\pi Ze^2 \delta(\mathbf{r}). \quad (4.13)$$

В первом порядке теории возмущений поправка к энергии определяется средним значением потенциала возмущения. Для

возмущения δU (4.12), с учетом (4.10) и (4.13), находим поправку к энергии для водородоподобного атома в состоянии nl ,

$$\mathcal{E}_{nl} = \frac{4}{3} \frac{Ze^4 \hbar}{m^2 c^3} \ln \left(\frac{f}{(Z\alpha)^2} \right) |\Psi_{nl}(0)|^2, \quad (4.14)$$

где

$$|\Psi_{nl}(0)|^2 = \frac{Z^3}{\pi a^3 n^3}, \quad a = \frac{\hbar^2}{me^2}. \quad (4.15)$$

Волновая функция электрона в атоме при $\mathbf{r} = 0$ отлична от нуля только для $l = 0$ и быстро уменьшается с увеличением n . Поэтому основной эффект — смещение вверх состояния $2s_{\frac{1}{2}}$, величина которого хорошо совпадает с результатом измерения (1057.91 ± 0.01 МГц — теория, 1057.90 ± 0.06 МГц — эксперимент).

4.3 Историческое послесловие

Частный вопрос о наличии расщепления уровней атома водорода оказался лишь истоком более глубоких и принципиальных проблем — привел к осознанию связи электромагнитного поля с квантовыми законами. Это послужило началом бурного развития новой науки — квантовой электродинамики, а затем и более общей теории квантованных полей.

Глава 5

Волновая функция системы тождественных частиц в представлении чисел заполнения

5.1 Представление чисел заполнения

Волновая функция многих тождественных частиц полностью определяется указанием возможных одночастичных состояний («ячеек»), в которых могут находиться частицы, и указанием числа частиц в каждой ячейке. Такое определение волновой функции (исторически получившее название «вторичного квантования») естественно называть представлением чисел заполнения.

Мы уже использовали такое описание при рассмотрении электромагнитного поля, где для квантов с квантовыми числами $\mathbf{k}\lambda$ вводили операторы их числа $n_{\mathbf{k}\lambda}$, рождения $a_{\mathbf{k}\lambda}^+$ и уничтожения $a_{\mathbf{k}\lambda}$. Этим способом можно описывать другие системы многих бозе-частиц.

Для ферми-частиц также можно ввести операторы рождения, уничтожения и числа частиц — a , a^+ , n , но их свойства

должны быть другими, так как числа заполнения ячеек (состояний) $|n\rangle$ могут быть только 0 или 1. Очевидно, что для ферми-частиц должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} a|1\rangle &= |0\rangle, & a|0\rangle &= 0, \\ a^+|0\rangle &= |1\rangle, & a^+|1\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Легко убедиться, что для этого ферми-операторы должны удовлетворять условиям

$$aa^+ + a^+a = 1. \quad (5.2)$$

5.2 Выражение физических операторов через a и a^+

Уравнение Шредингера обычно рассматривается в координатном или импульсном представлениях. Поэтому одночастичные состояния удобно также характеризовать координатой или импульсом частиц, то есть непрерывными параметрами. До сих пор мы рассматривали только дискретные одночастичные ячейки, поэтому для «ячеек» с непрерывным параметром \mathbf{x} или \mathbf{p} надо подправить определения свойств операторов рождения и уничтожения, приняв для бозе-частиц

$$a_{\mathbf{x}}a_{\mathbf{x}'}^+ - a_{\mathbf{x}'}^+a_{\mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}, \quad a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}'}^+ - a_{\mathbf{p}'}^+a_{\mathbf{p}} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \quad (5.3)$$

а для ферми-частиц

$$a_{\mathbf{x}}a_{\mathbf{x}'}^+ + a_{\mathbf{x}'}^+a_{\mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}, \quad a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}'}^+ + a_{\mathbf{p}'}^+a_{\mathbf{p}} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}. \quad (5.4)$$

Состояния предпочтительнее характеризовать импульсом \mathbf{p} . Если частицы обладают спином, то проекцию спина на ось z также следует включить в индекс \mathbf{p} .

Все физические операторы, используемые в квантовых уравнениях, можно разделить на одночастичные и двухчастичные. К одночастичным операторам относятся такие, которые характеризуют одну частицу, например, оператор кинетической энергии $\hat{\epsilon}$. Они допускают описание матричными элементами вида

$$\langle \mathbf{p}_1 | \hat{\epsilon} | \mathbf{p}_2 \rangle, \quad (5.5)$$

которые можно трактовать как переход частицы из состояния с импульсом \mathbf{p}_2 в состояние с импульсом \mathbf{p}_1 под действием оператора кинетической энергии $\hat{\epsilon}$.

Но есть также двухчастичные операторы, связанные с изменением состояния двух частиц. Так, например, двухчастичный оператор взаимодействия \hat{U} можно характеризовать матричным элементом

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | \hat{U} | \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 \rangle, \quad (5.6)$$

описывающим переход двух частиц с импульсами $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ в состояния с импульсами $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$.

В представлении чисел заполнения эти операторы можно представить в виде

$$\hat{\epsilon} = \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} \langle \mathbf{p}_1 | \hat{\epsilon} | \mathbf{p}_2 \rangle a_{\mathbf{p}_1}^+ a_{\mathbf{p}_2}, \quad (5.7)$$

$$\hat{U} = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | \hat{U} | \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 \rangle a_{\mathbf{p}_1}^+ a_{\mathbf{p}_2}^+ a_{\mathbf{p}_3} a_{\mathbf{p}_4}. \quad (5.8)$$

Обоснованию формул (5.7) и (5.8), а также аналогичных соотношений для других одно- и двухчастичных операторов, посвящён следующий раздел.

5.3 Как работать с операторами a и a^+

В этом разделе будут встречаться произведения нескольких операторов a и a^+ . Их желательно выстраивать в «нормальном порядке», когда все операторы рождения стоят слева, а все операторы уничтожения — справа. Для приведения к такому виду можно использовать следствия коммутационных соотношений (5.3) и (5.4),

$$a_1 a_2^+ = \delta_{12} \pm a_2^+ a_1, \quad a_1 a_2^+ a_3^+ = \delta_{12} a_3^+ \pm \delta_{13} a_2^+ + a_2^+ a_3^+ a_1, \quad (5.9)$$

где в двойном знаке \pm верхний здесь (и ниже) относится к бозе-частицам, а нижний — к ферми-частицам.

Введём нормированное вакуумное состояние $|0\rangle$, $\langle 0|0\rangle = 1$. Для него имеется очевидное соотношение

$$a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0. \quad (5.10)$$

Для эрмитово сопряженного состояния имеем

$$\langle 0|a_{\mathbf{p}}^+ = 0. \quad (5.11)$$

При действии на $|0\rangle$ оператором рождения получим

$$a_{\mathbf{p}}^+|0\rangle = |\mathbf{p}\rangle. \quad (5.12)$$

Эрмитовое сопряжение (5.12) дает

$$\langle \mathbf{p}| = \langle 0|a_{\mathbf{p}}. \quad (5.13)$$

В состоянии $|\mathbf{p}\rangle$ (5.12) содержится одна частица с импульсом \mathbf{p} . Если на $|\mathbf{p}\rangle$ подействовать оператором уничтожения, то получим равенство

$$a_{\mathbf{p}'}|\mathbf{p}\rangle = |0\rangle\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \quad (5.14)$$

смысл которого таков: уничтожив существующую частицу, получим вакуум, а уничтожить отсутствующую частицу невозможно в силу (5.10). Эрмитовое сопряжение (5.14) имеет вид

$$\langle \mathbf{p}|a_{\mathbf{p}'}^+ = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\langle 0|. \quad (5.15)$$

Перейдем к рассмотрению рождения второй частицы,

$$a_{\mathbf{p}_1}^+ a_{\mathbf{p}_2}^+ |0\rangle = a_{\mathbf{p}_1}^+ |\mathbf{p}_2\rangle = |\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\rangle. \quad (5.16)$$

Будем считать, что порядок аргументов в $|\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\rangle$ соответствует порядку действия операторов рождения в исходной формуле. Тогда в зависимости от того, имеем ли мы дело с операторами бозе-или ферми-типа, при перестановке аргументов в $|\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\rangle$ следует считать

$$|\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\rangle = \pm |\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1\rangle. \quad (5.17)$$

Рассмотрим действие на двухчастичные состояния двух операторов уничтожения. При действии первого оператора, используя (5.9), получим

$$a_{\mathbf{p}}|\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4\rangle = a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}_3}^+a_{\mathbf{p}_4}^+|0\rangle = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}_3}|\mathbf{p}_4\rangle \pm \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}_4}|\mathbf{p}_3\rangle, \quad (5.18)$$

а при действии второго оператора $a_{\mathbf{p}'}$ найдем

$$a_{\mathbf{p}'}a_{\mathbf{p}}|\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4\rangle = (\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}_3}\delta_{\mathbf{p}'\mathbf{p}_4} \pm \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}_4}\delta_{\mathbf{p}'\mathbf{p}_3})|0\rangle. \quad (5.19)$$

Эрмитовое сопряжение (5.19) дает

$$\langle\mathbf{p}_4\mathbf{p}_3|a_{\mathbf{p}}^+a_{\mathbf{p}'}^+ = \langle 0|(\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}_3}\delta_{\mathbf{p}'\mathbf{p}_4} \pm \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}_4}\delta_{\mathbf{p}'\mathbf{p}_3}). \quad (5.20)$$

Теперь мы имеем все заготовки для доказательства формул для одночастичного оператора (5.7) и оператора взаимодействия (5.8).

В (5.7) слева стоит оператор $\hat{\epsilon}$, а в правую часть входит сумма матричных элементов от $\hat{\epsilon}$. Возьмем от обеих частей (5.7) матричный элемент $\langle\mathbf{p}'_1|\dots|\mathbf{p}'_2\rangle$,

$$\langle\mathbf{p}'_1|\hat{\epsilon}|\mathbf{p}'_2\rangle = \sum_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}\langle\mathbf{p}_1|\hat{\epsilon}|\mathbf{p}_2\rangle\langle\mathbf{p}'_1|a_{\mathbf{p}_1}^+a_{\mathbf{p}_2}|\mathbf{p}'_2\rangle. \quad (5.21)$$

Для того чтобы в (5.21) левая и правая части совпали, необходимо выполнение условия

$$\langle\mathbf{p}'_1|a_{\mathbf{p}_1}^+a_{\mathbf{p}_2}|\mathbf{p}'_2\rangle = \delta_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}'_1}\delta_{\mathbf{p}_2\mathbf{p}'_2}, \quad (5.22)$$

справедливость которого прямо следует из (5.14) и (5.15).

Перейдем к доказательству формулы (5.8) для оператора взаимодействия. Возьмем от обеих частей (5.8) матричный элемент $\langle\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2|\dots|\mathbf{p}'_3\mathbf{p}'_4\rangle$,

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2|\hat{U}|\mathbf{p}'_3\mathbf{p}'_4\rangle &= \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4} \langle\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|\hat{U}|\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4\rangle\langle\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2|a_{\mathbf{p}_1}^+a_{\mathbf{p}_2}^+a_{\mathbf{p}_3}a_{\mathbf{p}_4}|\mathbf{p}'_3\mathbf{p}'_4\rangle. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Используя (5.19) и (5.20), находим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | a_{\mathbf{p}'_1}^+ a_{\mathbf{p}'_2}^+ a_{\mathbf{p}_3} a_{\mathbf{p}_4} | \mathbf{p}'_3 \mathbf{p}'_4 \rangle &= \\ &= \left(\delta_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_2} \delta_{\mathbf{p}_2 \mathbf{p}'_1} \pm \delta_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_1} \delta_{\mathbf{p}_2 \mathbf{p}'_2} \right) \left(\delta_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}'_4} \delta_{\mathbf{p}_4 \mathbf{p}'_3} \pm \delta_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}'_3} \delta_{\mathbf{p}_4 \mathbf{p}'_4} \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

и для правой части (5.23) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | \hat{U} | \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 \rangle \times \\ \times \left(\delta_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_2} \delta_{\mathbf{p}_2 \mathbf{p}'_1} \pm \delta_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_1} \delta_{\mathbf{p}_2 \mathbf{p}'_2} \right) \left(\delta_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}'_4} \delta_{\mathbf{p}_4 \mathbf{p}'_3} \pm \delta_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}'_3} \delta_{\mathbf{p}_4 \mathbf{p}'_4} \right) = \\ = \frac{1}{4} \left(\langle \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_1 | \hat{U} | \mathbf{p}'_4 \mathbf{p}'_3 \rangle + \langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \hat{U} | \mathbf{p}'_3 \mathbf{p}'_4 \rangle \pm \right. \\ \left. \pm \langle \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_1 | \hat{U} | \mathbf{p}'_3 \mathbf{p}'_4 \rangle \pm \langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \hat{U} | \mathbf{p}'_4 \mathbf{p}'_3 \rangle \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Выражение, получившееся в правой части (5.25), равно

$$\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \hat{U} | \mathbf{p}'_3 \mathbf{p}'_4 \rangle, \quad (5.26)$$

если матричные элементы от оператора \hat{U} удовлетворяют требованиям

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | \hat{U} | \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 \rangle &= \langle \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1 | \hat{U} | \mathbf{p}_4 \mathbf{p}_3 \rangle = \\ &= \pm \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | \hat{U} | \mathbf{p}_4 \mathbf{p}_3 \rangle = \pm \langle \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_1 | \hat{U} | \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 \rangle, \end{aligned} \quad (5.27)$$

что выполняется для оператора взаимодействия (5.8).

Подведём итоги. Формулы (5.7) и (5.8) доказаны, т.е. установлен вид гамильтониана для системы многих тождественных частиц в представлении чисел заполнения:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} \langle \mathbf{p}_1 | \hat{\epsilon} | \mathbf{p}_2 \rangle a_{\mathbf{p}_1}^+ a_{\mathbf{p}_2} + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | \hat{U} | \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 \rangle a_{\mathbf{p}_1}^+ a_{\mathbf{p}_2}^+ a_{\mathbf{p}_3} a_{\mathbf{p}_4}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Квантовая задача многих частиц с гамильтонианом (5.28) не может быть решена точно и требует определенных приближений. К тому же обращение с гамильтонианом в форме (5.28) требует определенного опыта. Мы начнем с относительно простой задачи (после некоторого введения).

Глава 6

Сверхтекучесть

6.1 Историческое отступление

Гелий при температуре $T \simeq 4^0$ К переходит в жидкое состояние (He I), а при дальнейшем охлаждении при $T \simeq 2.2^0$ К происходит еще один фазовый переход в новое состояние (He II), в котором гелий обладает удивительным свойством «сверхтекучести»: способностью без трения протекать через узкие капилляры. Это явление было открыто П.Л. Капицей в 1938 году и подробно им исследовано.

Л.Д. Ландау нашел общее и довольно простое условие, при котором жидкость может протекать (при достаточно малых скоростях) через капилляр без трения.

Рассмотрим капилляр и протекающую через него жидкость с постоянной скоростью \mathbf{v} . Перейдем в систему координат, связанную с жидкостью. В этой системе жидкость покоится, т.е. находится в своем самом нижнем энергетическом состоянии а стенки капилляра движутся со скоростью $-\mathbf{v}$. Трение означает, что некоторая энергия ϵ (и импульс \mathbf{p}) передаются от капилляра к жидкости и в жидкости возникает возбуждение с энергией $\epsilon(\mathbf{p})$. В лабораторной системе (связанной с капилляром) энергия возбуждения преобразуется к $\epsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$. Но в замкнутой системе «капилляр – жидкость» энергия не может возрасти, т.е. $(\epsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}) < 0$. Величина $\epsilon(\mathbf{p})$ положительна, и для выпол-

нение неравенства необходимо, чтобы \mathbf{p} и \mathbf{v} были направлены в противоположные стороны и при этом $v > \min \frac{\epsilon(p)}{p}$.

Таким образом, величина $\min \frac{\epsilon(p)}{p}$ определяет границу скоростей. Течение со скоростью больше этой величины сопровождается трением, а сверхтекучее течение возможно только со скоростями, меньше этой величины. Если же минимальное значение $\frac{\epsilon(p)}{p}$ равно нулю, то сверхтекучести вообще нет. (Скажем для обычного случая $\epsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$ минимальное значение $\frac{\epsilon(p)}{p}$ равно нулю и достигается при $p = 0$).

Мы рассмотрим решение с гамильтонианом (5.9) для относительно простой системы многих частиц, в которой возможна «сверхтекучесть».

6.2 Модель слабо неидеального бозе-газа

Рассмотрим газ одинаковых бозе-частиц в большом объеме V при нулевой температуре. Если взаимодействия между частицами нет, то в основном состоянии все частицы находятся в самом нижнем энергетическом состоянии — покое. Но это состояние будет неустойчивым, если между частицами есть взаимодействие (отталкивание). Часть частиц будет выталкиваться на верхние уровни. Требуется найти сколько частиц вытолкнется наверх, как они распределятся по уровням в основном, самом нижнем по энергии состоянии, и какая структура возбуждений в этой системе, т.е. вид $\epsilon(p)$.

Гамильтониан системы в представлении чисел заполнения запишем в виде

$$\begin{aligned}
 H = & \sum \frac{p^2}{2m} (a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^+ a_{-\mathbf{p}}) + \\
 & + \frac{1}{2V} \sum_{(\mathbf{p})} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | U | \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 \rangle a_{\mathbf{p}_1}^+ a_{\mathbf{p}_2}^+ a_{\mathbf{p}_3} a_{\mathbf{p}_4}.
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

Для решения задачи нужны определенные приближения. Для простоты, будем считать матричный элемент взаимодей-

ствия константой g , а само взаимодействие малым, так что только малая доля частиц выталкивается на верхние уровни с $\mathbf{p} \neq 0$, а основная их часть (N_0) остается в состоянии с $\mathbf{p} = 0$ (в «конденсате»). Это означает, что числа заполнения $n_{\mathbf{p}} \ll N_0 = a_0^+ a_0$, и поэтому можно считать a_0^+ и a_0 большими числами $a_0 \approx a_0^+ \approx \sqrt{N_0}$, пренебрегая их малой некоммутативностью.

В нулевом приближении, оставляя в (6.1) только a_0 и a_0^+ , находим для взаимодействия $gN_0^2/2V$. В следующем приближении два из операторов a_0 или a_0^+ нужно заменить на $\sqrt{N_0}$. То, какие операторы остаются, определяется сохранением импульса при взаимодействии (входящий импульс должен равняться выходящему). Удобно различать импульсы по знаку (как это уже сделано для кинетической энергии в (6.1)). Сумма всех возможных комбинаций при выборе двух операторов с ненулевыми импульсами (с учетом числа возможностей выбора двух операторов данного типа) равна

$$4a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} + 4a_{-\mathbf{p}}^+ a_{-\mathbf{p}} + 2a_{\mathbf{p}}^+ a_{-\mathbf{p}}^+ + 2a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}. \quad (6.2)$$

В этом приближении взаимодействие принимает вид

$$U = \frac{gN_0^2}{2V} + \frac{gN_0}{V} \sum (2a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} + 2a_{-\mathbf{p}}^+ a_{-\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}^+ a_{-\mathbf{p}}^+ + a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}). \quad (6.3)$$

Введем оператор полного числа частиц

$$N = N_0 + \sum (a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^+ a_{-\mathbf{p}}), \quad (6.4)$$

используя который, можно в (6.3) заменить N_0 на N и ввести плотность частиц $n = N/V$. В результате весь гамильтониан в нашем приближении можно представить в виде

$$H = \frac{gN^2}{2V} + \sum (\varepsilon_{\mathbf{p}} + gn) (a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^+ a_{-\mathbf{p}}) + \sum gn (a_{\mathbf{p}}^+ a_{-\mathbf{p}}^+ + a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}). \quad (6.5)$$

Обсудим этот промежуточный результат.

Если бы последней суммы не было, то задача была бы уже решена: операторы $a_{\mathbf{p}}^+$, $a_{-\mathbf{p}}^+$, $a_{\mathbf{p}}$, $a_{-\mathbf{p}}$ можно было бы считать операторами рождения и уничтожения некоторых «квантов» (для

систем частиц их принято называть «квазичастицами») с энергиями $\varepsilon_p + gn$, а основное состояние считать вакуумом относительно этих квазичастиц. Но последняя сумма в (6.5) портит эту картину, т.к. приводит к спонтанному рождению квазичастиц из вакуума (и уничтожению частиц).

6.3 Преобразование Боголюбова

Идея следующего этапа решения: представить гамильтониан (6.5) в «хорошем» виде

$$H = H_0 + \sum E_{\mathbf{p}}(b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}} + b_{-\mathbf{p}}^+ b_{-\mathbf{p}}), \quad (6.6)$$

где $b_{\mathbf{p}}^+$, $b_{\mathbf{p}}$ — операторы новых квазичастиц, относительно которых основное состояние является вакуумом. Из сравнения (6.6) и (6.5) очевидно, что преобразование к новым квазичастицам должно быть линейным. Ищем его в виде линейных уравнений с действительными коэффициентами u_p и v_p

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}} &= u_p b_{\mathbf{p}} + v_p b_{-\mathbf{p}}^+, \\ a_{-\mathbf{p}} &= u_p b_{-\mathbf{p}} + v_p b_{\mathbf{p}}^+, \\ a_{\mathbf{p}}^+ &= u_p b_{\mathbf{p}}^+ + v_p b_{-\mathbf{p}}, \\ a_{-\mathbf{p}}^+ &= u_p b_{-\mathbf{p}}^+ + v_p b_{\mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Из требования, чтобы новые квазичастицы имели свойства бозе-операторов ($[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}'}^+] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$) вытекает условие

$$u_p^2 - v_p^2 = 1. \quad (6.8)$$

Следующий шаг: две комбинации из старых операторов, входящие в гамильтониан (6.5), выразим через новые операторы:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^+ a_{-\mathbf{p}} &= 2v_p^2 + (u_p^2 + v_p^2)(b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}} + b_{-\mathbf{p}}^+ b_{-\mathbf{p}}) + \\ &+ 2u_p v_p (b_{\mathbf{p}}^+ b_{-\mathbf{p}}^+ + b_{\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}}), \\ a_{\mathbf{p}}^+ a_{-\mathbf{p}}^+ + a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} &= 2u_p v_p + 2u_p v_p (b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}} + b_{-\mathbf{p}}^+ b_{-\mathbf{p}}) + \\ &+ (u_p^2 + v_p^2)(b_{\mathbf{p}}^+ b_{-\mathbf{p}}^+ + b_{\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}}). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Видно, что мы получили те же самые комбинации, которые были в гамильтониане (6.5), но только из новых операторов. Но теперь мы можем избавиться от «плохой» комбинации операторов, выбирая параметры u_p, v_p . Легко видеть, что после подстановки (6.9) в (6.5) «плохая» комбинация исчезает, если выполняется условие

$$(\varepsilon_p + gn) 2u_p v_p + gn (u_p^2 + v_p^2) = 0, \quad (6.10)$$

а коэффициент при «хорошей» комбинации (который определяет энергии квазичастиц E_p) принимает вид

$$E_p = (\varepsilon_p + gn) (u_p^2 + v_p^2) + gn \cdot 2u_p v_p. \quad (6.11)$$

Уравнение (6.10) содержит две комбинации из коэффициентов u_p, v_p . Можно получить другое уравнение, содержащее те же самые комбинации, переписав соотношение (6.8) в виде

$$(u_p^2 - v_p^2)^2 = (u_p^2 + v_p^2)^2 - (2u_p v_p)^2 = 1. \quad (6.12)$$

В результате для двух комбинаций из коэффициентов u_p, v_p , удовлетворяющих уравнениям (6.10) и (6.12), найдем

$$u_p^2 + v_p^2 = \frac{\varepsilon_p + gn}{\sqrt{(\varepsilon_p + gn)^2 - (gn)^2}}, \quad 2u_p v_p = - \frac{gn}{\sqrt{(\varepsilon_p + gn)^2 - (gn)^2}}. \quad (6.13)$$

Выражение для энергии квазичастиц (6.11) принимает вид

$$E_p = \sqrt{(\varepsilon_p + gn)^2 - (gn)^2} = \sqrt{\varepsilon_p(\varepsilon_p + 2gn)}. \quad (6.14)$$

Гамильтониан неидеального бозе-газа (6.6) полностью определен. Возбужденные состояния характеризуются числом и видом квазичастиц, отличающихся импульсами и имеющих энергии (6.14). Основное состояние — вакуум по квазичастицам.

Рассмотрим зависимость энергии квазичастиц от импульса. В идеальном бозе-газе, где взаимодействия между частицами нет ($g = 0$), энергия квазичастиц совпадает с $\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}$ и минимальное значение $\frac{\varepsilon(p)}{p} = \frac{p}{2m}$ равно нулю. Когда есть взаимодействие, то

для достаточно малых импульсов ($p^2 \ll 4mgn$) энергии квазичастиц $E_p \approx \sqrt{\frac{gn}{m}} p$ и минимальное значение $\frac{E_p}{p} = \sqrt{\frac{gn}{m}}$, т.е. равно конечной величине. Это означает, что в неидеальном бозе-газе при скоростях меньших $\sqrt{\frac{gn}{m}}$ возможна сверхтекучесть.

При рассмотрении бозе-газа было предположено, что основная масса частиц находится в конденсате, а плотность надконденсатных частиц мала. Очевидно, что жидкий гелий, где реально наблюдается сверхтекучесть, не является газом, и поэтому рассмотренная модель к нему непосредственно неприменима.

Тем не менее эта модель дает пример системы, где сверхтекучесть возможна. Кроме того, решение задачи о слабо неидеальном бозе-газе, которое впервые было найдено Н.Н. Боголюбовым (вскоре после открытия сверхтекучести), открыло новые возможности в теоретической физике. Метод канонического преобразования от операторов частиц к новым «квазичастицам» стал широко использоваться и для других задач и получил название « (u, v) -преобразования Боголюбова».

6.4 Историческое послесловие

Слабо неидеальный бозе-газ в природе можно образовать из молекул, которые, в отличие от атомов, слабо взаимодействуют между собой. Если накопить достаточное число бозе-молекул (например, из двух связанных атомов ${}^6\text{Li}$) и затем охладить этот «газ» до очень низких температур, то произойдет его конденсация в одном, самом нижнем состоянии. На такую возможность обратили внимание Бозе и Эйнштейн в 30-х годах прошлого столетия. Но практическое осуществление этой идеи стало возможным только в конце прошлого столетия.

Накопление молекул оказалось возможным только в нематериальной оболочке — магнитной ловушке. А охлаждение «газа» до температур, ниже микрокельвина потребовало использования уникального метода лазерного охлаждения. Наблюдение и исследование свойств конденсированного состояния (из $10^6 - 10^7$ молекул) также требовало уникальных методов.

Осуществление бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) стало громким научным открытием и триумфом экспериментальной физики.

Глава 7

Теория сверхпроводимости

7.1 Введение в проблему

В квантовой механике движение электронов через идеальный кристалл проходит без сопротивления. Сопротивление возникает только от нарушений идеальности кристаллов, главным образом от температурных колебаний ядер решетки. Поэтому при понижении температуры сопротивление уменьшается и для чистых металлов (с идеальной решеткой) стремится к нулю при $T \rightarrow 0$.

В 1908 г. голландский физик Каммерлинг-Оннес, работавший в Лейдене над получением низких температур, нашел способ сжижения последнего из инертных газов — гелия и охлаждения его до температур порядка 0.1 К. Открылись хорошие возможности для исследования проводимости разных металлов и сплавов при температурах $T \rightarrow 0$. В то время существовали различные теоретические предсказания. Для чистых металлов без примесей Эйнштейн предсказывал экспоненциальное затухание колебаний ядер решетки (и соответствующего падения сопротивления). Но было также предсказание, что при $T \rightarrow 0$ происходит закрепление электронов в атомах, что приводит к росту сопротивления до бесконечности. Изучая наиболее чистые металлы: золото и платину, Каммерлинг-Оннес обнаружил падение сопротивления, но считал, что еще более чистый образец можно получить для ртути. Измеряя ее сопротивление при понижении температуры, он

увидел при $T \simeq 4.1^0$ К резкий обрыв практически до нуля. Так в 1911 г. была открыта «сверхпроводимость» — резкое падение сопротивления (практически до нуля) при конечных температурах T_c . Причем это явление наблюдалось затем для большинства металлов и сплавов при достаточно низких температурах T_c

7.2 Попытки объяснить сверхпроводимость на основе классической электродинамики (как состояние идеального проводника)

В каком состоянии находится проводник при температурах ниже T_c ? Естественный ответ — в состоянии идеального проводника, где движение электронов определяется только электромагнитным полем, а какое-либо трение отсутствует. Этому соответствует уравнение движения $m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}$ и т.к. плотность тока связана с плотностью электронов ρ как $\mathbf{J} = e\rho\mathbf{v}$, то получаем связь электрического поля с плотностью тока в виде

$$\mathbf{E} = \frac{m}{\rho e^2} \dot{\mathbf{J}}. \quad (7.1)$$

Теперь, используя уравнение Максвелла $\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{H}}$, исключим \mathbf{E} и получим связь между производными по времени от \mathbf{H} и \mathbf{J} ,

$$\dot{\mathbf{H}} = -\frac{mc}{\rho e^2} \text{rot } \dot{\mathbf{J}}. \quad (7.2)$$

Найдем еще одну связь между \mathbf{H} и \mathbf{J} . Учитывая, что $\text{div } \mathbf{H} = 0$ и, следовательно, $\text{rot rot } \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H}$, из уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$ (малым током смещения пренебрегаем) найдем $\nabla^2 \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \mathbf{J}$. Дифференцируя это равенство по времени и комбинируя с (7.2), получаем уравнение для производной по времени от магнитного поля,

$$\lambda_L^2 \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad \lambda_L^2 = \frac{mc^2}{4\pi\rho e^2}. \quad (7.3)$$

Константа λ_L , имеющая размерность длины, при типичных для металлов значениях $\rho \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $\frac{e^2}{mc^2} \sim 10^{-13} \text{ см}$ имеет порядок величины $\lambda_L \sim 10^{-5} \text{ см}$.

Физический смысл уравнения (7.3) легко понять при рассмотрении частного случая. Пусть ось x направлена перпендикулярно поверхности сверхпроводника, и значение $x = 0$ совпадает поверхностью. Уравнение (7.3) в этом одномерном случае, $\lambda_L^2 \frac{d^2}{dx^2} \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}} = 0$, имеет решение $\dot{\mathbf{H}}(x) = \dot{\mathbf{H}}(0) \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right)$, что означает, что внутри идеального проводника $\dot{\mathbf{H}} = 0$, т.е. магнитное поле не меняется. Это свойство полезно проиллюстрировать на двух мысленных экспериментах.

Пусть температура образца сверхпроводника $T > T_c$ и магнитное поле $H = 0$. Охлаждаем образец до $T < T_c$, а затем накладываем магнитное поле. Оно огибает сверхпроводник, но внутрь не проникает («идеальный диамагнетик»).

Меняем порядок процедур: сначала (при $T > T_c$) включаем магнитное поле, которое проникает внутрь образца, а затем понижаем температуру, переводим образец в сверхпроводящее состояние. Поле внутри образца не меняется, даже после выключения источника поля.

Таким образом намагниченность идеального проводника не определяется однозначно внешними условиями, а зависит от последовательности событий.

7.3 Эффект Мейснера

Сверхпроводники считались идеальными проводниками в течение 22-х лет после открытия. Но в 1933 г. Мейснер и Оксенфельд измерили распределение магнитного потока около сверхпроводников и установили, что случай магнитного поля, замороженного внутри сверхпроводника, не осуществляется. Поле внутри сверхпроводника всегда равно нулю, т.е. он всегда идеальный диамагнетик.

Вопрос: в нашем втором мысленном эксперименте до перехода в сверхпроводящее состояние внутри образца было поле. Как

оно исчезло при охлаждении до $T < T_c$? Ответ: при переходе в сверхпроводящее состояние возникают поверхностные токи, создающие такое магнитное поле, которое полностью компенсирует уже существующее поле внутри сверхпроводника.

7.4 Теория Лондонов

В 1935 г. Ф. и Г. Лондоны предположили, что уравнения, которые считали справедливыми для $\dot{\mathbf{H}}$ (в частности (7.3)) следует считать уравнениями для \mathbf{H} . Тогда объяснялся эффект Мейснера. Хотя эта теория не имела твердого обоснования, она стала общепризнанной. Константу λ_L , определяющую толщину переходного слоя у границы сверхпроводника, стали называть «лондоновской длиной». В обоснование этой теории можно привести некоторые квантово-механические аргументы.

Уравнение Шредингера в магнитном поле (в отсутствие электрического поля) имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi + U \Psi, \quad (7.4)$$

и можно считать, что $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Из этого уравнения и ему сопряженного найдем уравнение непрерывности в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (7.5)$$

где плотность тока равна

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2m} (\Psi^* \hat{\mathbf{p}} \Psi - \Psi \hat{\mathbf{p}} \Psi^*) - \frac{e}{mc} \mathbf{A} |\Psi|^2. \quad (7.6)$$

В стационарном однородном металле можно считать, что волновая функция не зависит от координат и главным является последний член, т.е. можно принять для тока

$$\mathbf{j} \simeq -\frac{e}{mc} \mathbf{A} |\Psi|^2 = -\frac{e\rho}{mc} \mathbf{A}. \quad (7.7)$$

Ротор от этого уравнения приводит к уравнению Лондонов,

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\frac{mc}{e\rho} \operatorname{rot} \mathbf{j}. \quad (7.8)$$

От открытия сверхпроводимости (1911 г.) до создания теории Лондонов (1935 г.) прошло 24 года. Но настоящей микроскопической теории, в которой рассматриваются электроны в кристалле и их взаимодействие, еще долго не было, несмотря на постоянные попытки ее создания.

7.5 Дорога к микроскопической теории сверхпроводимости

Такая теория была создана только в 1957 г. Почему потребовалось так много времени? Была уже создана теория сверхтекучести бозе-газа. Казалось бы сверхпроводимость это сверхтекучесть заряженной «электронной жидкости». Но электроны, в отличие от гелия, — это не бозе-, а ферми-частицы. Даже две ферми-частицы не могут находиться в одном состоянии, поэтому из них невозможно образование конденсата. Правда, два электрона в связанном состоянии образуют бозе-частицу. Но как они могут связаться, если одинаково заряжены и отталкиваются? Правда, в металле заряд электронов полностью компенсирован зарядом ионов, но для связи нужно притяжение.

В 1950-51 гг. независимо Г. Фрёлых и Дж. Бардин теоретически установили, что электроны взаимодействуют с колебаниями решетки (фононами). То что это взаимодействие, несмотря на его малость, играет роль в сверхпроводимости, подтвердилось экспериментально в обнаружении «изотопического эффекта» — зависимости критической температуры T_c от изотопного состава ядер кристаллической решетки.

Электрон-фононное взаимодействие во втором порядке теории возмущений приводит к слабому притяжению между электронами. Но согласно законам квантовой механики при слабом притяжении связанное состояние возможно в одномерном и двумерном пространствах, а в трехмерном пространстве — невозможно.

Ключевая идея была предложена молодым американским физиком Л. Купером в краткой заметке, опубликованной в конце 1956 г. Его идею можно понять на простой электронной модели

металла. Представим, что весь положительный заряд кристалла равномерно размазан по объему металла («модель желе») и полностью компенсирует заряд электронов. Задача о невзаимодействующих ферми-частицах была решена в разделе 1.1.

Одночастичные состояния можно характеризовать импульсом (и спином). В основном состоянии системы невзаимодействующих фермионов все состояния внутри сферической поверхности Ферми заняты, а выше поверхности Ферми — свободны.

Изменить свое состояние без большой затраты энергии могут лишь электроны вблизи ферми-границы, немного повысив энергию и двигаясь вокруг сферы Ферми. Но это означает, что электроны вблизи ферми-поверхности находятся не в трехмерном, а в двумерном пространстве, а в этом случае, как отмечено выше, могут образовывать связанные состояния даже при слабом притяжении. Такие пары связанных электронов получили названия «куперовских пар».

«Эффект Купера» явился последней подсказкой. Через полгода вышла работа Дж. Бардина, Л. Купера и Дж. Шриффера (БКШ). С точки зрения математики теория БКШ не была идеальна. Н.Н. Боголюбов предложил более общий метод канонических преобразований (аналогичный, использованному им для бозе-газа).

Глава 8

Теория сверхпроводимости БКШ

Центральное предположение: в основном состоянии металла (при нулевой температуре) все электроны металла вблизи поверхности Ферми связаны в куперовские пары.

8.1 Основное состояние сверхпроводника. «Куперовские пары»

Притяжение электронов очень мало, поэтому при образовании связанного состояния следует экономить на движении центра масс пары и рассматривать только состояния двух электронов с равным нулю суммарным импульсом. Пусть в состояниях $|\mathbf{p}\rangle$ и $|\bar{\mathbf{p}}\rangle$ электроны обладают противоположными импульсами и спинами. Тогда вектор основного состояния сверхпроводника $|\Psi_0\rangle$ можно представить в виде

$$|\Psi_0\rangle = \prod_{\mathbf{p}} (u_{\mathbf{p}} + v_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\bar{\mathbf{p}}}^{\dagger}) |0\rangle, \quad (8.1)$$

где произведение берется по парам $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}})$, а $|0\rangle$ — вектор состояния вакуума по частицам (обычным образом нормированный на

единицу: $\langle 0|0\rangle = 1$). Из условия нормировки получим:

$$\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = 1 \quad \implies \quad u_p^2 + v_p^2 = 1. \quad (8.2)$$

Заселенности $n_{\mathbf{p}}$ и $n_{\bar{\mathbf{p}}}$ состояний $|\mathbf{p}\rangle$ и $|\bar{\mathbf{p}}\rangle$ оказываются одинаковыми и равными

$$n_{\mathbf{p}} = \langle \Psi_0 | a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} | \Psi_0 \rangle = v_p^2, \quad n_{\bar{\mathbf{p}}} = \langle \Psi_0 | a_{\bar{\mathbf{p}}}^{\dagger} a_{\bar{\mathbf{p}}} | \Psi_0 \rangle = v_p^2. \quad (8.3)$$

Таким образом, величина v_p^2 представляет собой вероятность существования куперовской пары $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}})$, тогда как $u_p^2 = 1 - v_p^2$ — это вероятность того, что пара состояний $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}})$ является свободной.

Рассмотрим, как действуют операторы уничтожения и рождения частиц в состояниях $|\mathbf{p}\rangle$ и $|\bar{\mathbf{p}}\rangle$ на вектор основного состояния сверхпроводника $|\Phi_0\rangle$. Вычисления дают

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}} |\Psi_0\rangle &= v_p a_{\bar{\mathbf{p}}}^{\dagger} \prod_{\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}} (u_{p'} + v_{p'} a_{\mathbf{p}'}^{\dagger} a_{\bar{\mathbf{p}}'}^{\dagger}) |0\rangle, \\ a_{\bar{\mathbf{p}}} |\Psi_0\rangle &= -v_p a_{\mathbf{p}}^{\dagger} \prod_{\mathbf{p}' \neq \bar{\mathbf{p}}} (u_{p'} + v_{p'} a_{\mathbf{p}'}^{\dagger} a_{\bar{\mathbf{p}}'}^{\dagger}) |0\rangle, \\ a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |\Psi_0\rangle &= u_p a_{\mathbf{p}}^{\dagger} \prod_{\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}} (u_{p'} + v_{p'} a_{\mathbf{p}'}^{\dagger} a_{\bar{\mathbf{p}}'}^{\dagger}) |0\rangle, \\ a_{\bar{\mathbf{p}}}^{\dagger} |\Psi_0\rangle &= u_p a_{\bar{\mathbf{p}}}^{\dagger} \prod_{\mathbf{p}' \neq \bar{\mathbf{p}}} (u_{p'} + v_{p'} a_{\mathbf{p}'}^{\dagger} a_{\bar{\mathbf{p}}'}^{\dagger}) |0\rangle. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Отсюда видно, что

$$(u_p a_{\mathbf{p}} - v_p a_{\bar{\mathbf{p}}}^{\dagger}) |\Psi_0\rangle \equiv 0, \quad (u_p a_{\bar{\mathbf{p}}} + v_p a_{\mathbf{p}}^{\dagger}) |\Psi_0\rangle \equiv 0. \quad (8.5)$$

Следуя аналогии с решением задачи о бозе-газе, будем считать, что основное состояние системы $|\Psi_0\rangle$ является вакуумом по квазичастицам, а возбуждения системы описываются как рождения квазичастиц. Из соотношений (8.5) ясно, что операторы уничтожения квазичастиц представляют собой линейные комбинации операторов уничтожения и рождения частиц:

$$b_{\mathbf{p}} = u_p a_{\mathbf{p}} - v_p a_{\bar{\mathbf{p}}}^{\dagger}, \quad b_{\bar{\mathbf{p}}} = u_p a_{\bar{\mathbf{p}}} + v_p a_{\mathbf{p}}^{\dagger}. \quad (8.6)$$

Соответственно операторы рождения квазичастиц выглядят следующим образом:

$$b_{\mathbf{p}}^+ = u_p a_{\mathbf{p}}^+ - v_p a_{\bar{\mathbf{p}}}, \quad b_{\bar{\mathbf{p}}}^+ = u_p a_{\mathbf{p}}^+ + v_p a_{\mathbf{p}}. \quad (8.7)$$

Легко проверить, что условие (8.2) обеспечивает справедливость правил антикоммутиации для операторов уничтожения и рождения квазичастиц (ферми-операторов).

8.2 Микроструктура основного состояния сверхпроводника

В отсутствие взаимодействия основное состояние электронов — заполненная ферми-зона. При возбуждении электрон переходит в состояние над ферми-поверхностью, а на его месте образуется дырка. Т.е. элементарное возбуждение вблизи основного состояния — это электрон-дырочные пары.

Если основное состояние (все состояния с $p < p_F$ заполнены, а с $p' > p_F$ свободны) считать вакуумом, то электрон-дырочное возбуждение рождается оператором $a_{\mathbf{p}'}^+ a_{\mathbf{p}}$.

Слабое притяжение между электронами от обмена фононами дает надежду, что определенные суперпозиции электрон-дырочных возбуждений дают выигрыш в энергии. Куперовские пары и являются такими комбинациями. Гамильтониан системы (куперовские пары над основным состоянием) в представлении чисел заполнения можно представить в виде

$$\hat{H} = \sum_p \epsilon_p (a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} + a_{\bar{\mathbf{p}}}^+ a_{\bar{\mathbf{p}}}) - g \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ a_{\bar{\mathbf{p}}}^+ \sum_{\mathbf{p}'} a_{\bar{\mathbf{p}'}} a_{\mathbf{p}'}, \quad (8.8)$$

где первый член — кинетическая энергия электронов, отсчитываемая от энергии Ферми ϵ_F ($\epsilon_p = \frac{p^2}{2m} - \epsilon_F$), а второй член описывает притяжение между электронами с одним параметром g , имеющим порядок фононной энергии.

Гамильтониан можно выразить через квазичастицы, используя каноническое преобразование, обратное к (8.6), (8.7):

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}} &= u_p b_{\mathbf{p}} + v_p b_{\mathbf{p}}^+, & a_{\bar{\mathbf{p}}} &= u_p b_{\bar{\mathbf{p}}} - v_p b_{\bar{\mathbf{p}}}^+, \\ a_{\mathbf{p}}^+ &= u_p b_{\mathbf{p}}^+ + v_p b_{\mathbf{p}}, & a_{\bar{\mathbf{p}}}^+ &= u_p b_{\bar{\mathbf{p}}}^+ - v_p b_{\bar{\mathbf{p}}}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Гамильтониан (8.8), выраженный через операторы квазичастиц $b_{\mathbf{p}}^+$, $b_{\mathbf{p}}$, должен иметь «правильный» вид:

$$\hat{H} = H_0 + \sum_p E_p (b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}} + b_{\bar{\mathbf{p}}}^+ b_{\bar{\mathbf{p}}}), \quad (8.10)$$

где H_0 — среднее значение гамильтониана по основному состоянию (вакууму по квазичастицам), а E_p — энергии квазичастиц. Из этого условия определяются коэффициенты u_p , v_p и энергии квазичастиц, т.е. спектр возбуждений сверхпроводника, который и определяет его специфические свойства.

8.3 Свойства сверхпроводников, связанные с их спектром возбуждений

В идеальном Ферми-газе основное состояние — полностью заполненная ферми-зона, а спектр возбуждений непрерывный и начинается с нуля. В сверхпроводнике при нулевой температуре все электроны у поверхности Ферми связаны в куперовские пары и основное состояние сверхпроводника — конденсат таких пар. В импульсном пространстве он занимает узкий слой вокруг поверхности Ферми. Для возбуждения сверхпроводника необходимо разорвать куперовскую пару, т.е. затратить энергию больше энергии связи пары.

Следует ожидать, что теоретический спектр квазичастиц E_p будет иметь щель, величина которой очень мала, т.к. определяется очень слабым куперовским спариванием. Поэтому решение задачи с гамильтонианом (8.8) на каждом этапе требует аккуратности.

8.4 Гамильтониан, выраженный через операторы рождения и уничтожения квазичастиц

В гамильтониан (8.8) входят три комбинации операторов частиц. Через операторы квазичастиц их можно представить в виде

$$a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} + a_{\bar{\mathbf{p}}}^+ a_{\bar{\mathbf{p}}} = 2v_p^2 + (u_p^2 - v_p^2) (\hat{n}_{\mathbf{p}} + \hat{n}_{\bar{\mathbf{p}}}) + 2u_p v_p (b_{\mathbf{p}}^+ b_{\bar{\mathbf{p}}}^+ + b_{\bar{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}}),$$

$$\sum_p a_{\mathbf{p}}^+ a_{\bar{\mathbf{p}}}^+ = \frac{\Delta}{g} + \hat{F}^+, \quad \sum_p a_{\bar{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}} = \frac{\Delta}{g} + \hat{F},$$
(8.11)

где введены обозначения

$$\hat{n}_{\mathbf{p}} = b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}}, \quad \hat{n}_{\bar{\mathbf{p}}} = b_{\bar{\mathbf{p}}}^+ b_{\bar{\mathbf{p}}}, \quad \Delta = g \sum_p u_p v_p (1 - \hat{n}_{\mathbf{p}} - \hat{n}_{\bar{\mathbf{p}}}),$$

$$\hat{F}^+ = \sum_p (u_p^2 b_{\mathbf{p}}^+ b_{\bar{\mathbf{p}}}^+ - v_p^2 b_{\bar{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}}), \quad \hat{F} = \sum_p (u_p^2 b_{\bar{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}} - v_p^2 b_{\mathbf{p}}^+ b_{\bar{\mathbf{p}}}^+).$$
(8.12)

Пользуясь этими обозначениями, запишем гамильтониан (8.8) в форме

$$H = \sum_p 2\epsilon_p v_p^2 + \sum_p \epsilon_p (u_p^2 - v_p^2) (\hat{n}_{\mathbf{p}} + \hat{n}_{\bar{\mathbf{p}}}) +$$

$$+ \sum_p \epsilon_p 2u_p v_p (b_{\mathbf{p}}^+ b_{\bar{\mathbf{p}}}^+ + b_{\bar{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}}) - g \left(\frac{\Delta}{g} + \hat{F}^+ \right) \left(\frac{\Delta}{g} + \hat{F} \right).$$
(8.13)

Вторая строка в (8.13) содержит «неправильные члены» с $b_{\mathbf{p}}^+ b_{\bar{\mathbf{p}}}^+$ и $b_{\bar{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}}$. В последнем слагаемом они включены в F и F^+ . Произведением F и F^+ , которое содержит члены с рождением и уничтожением четырех квазичастиц, будем пренебрегать. Тогда последнее слагаемое в (8.13) сводится к

$$-\frac{\Delta^2}{g} - \Delta(\hat{F}^+ + \hat{F}) = -\frac{\Delta^2}{g} - \Delta \sum_p (u_p^2 - v_p^2) (b_{\mathbf{p}}^+ b_{\bar{\mathbf{p}}}^+ + b_{\bar{\mathbf{p}}} b_{\mathbf{p}}). \quad (8.14)$$

Член $-\frac{\Delta^2}{g}$ переходит в «правильные члены», а условие уничтожения всех «неправильных членов» принимает вид

$$\sum_p (\epsilon_p 2u_p v_p - \Delta (u_p^2 - v_p^2)) (b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}}^+ + b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}) = 0, \quad (8.15)$$

откуда следует уравнение для коэффициентов u_p, v_p , связанных соотношением $u_p^2 + v_p^2 = 1$,

$$\epsilon_p 2u_p v_p - \Delta (u_p^2 - v_p^2) = 0, \quad (8.16)$$

решение которого дает

$$2u_p v_p = \frac{\Delta}{\sqrt{\epsilon_p^2 + \Delta^2}}, \quad u_p^2 - v_p^2 = \frac{\epsilon_p}{\sqrt{\epsilon_p^2 + \Delta^2}}. \quad (8.17)$$

8.5 Уравнение для Δ

В (8.17) коэффициенты u_p, v_p выражаются через Δ . Но Δ , как это видно из ее определения в (8.12), в свою очередь определяется через u_p, v_p . Величина Δ играет важную роль в теории сверхпроводимости, и ее оценку следует рассмотреть более тщательно.

Определение Δ в (8.12) зависит от чисел заполнения $\hat{n}_{\mathbf{p}}, \hat{n}_{\bar{\mathbf{p}}}$ квазичастичных состояний. Для основного состояния системы ($n_{\mathbf{p}} = n_{\bar{\mathbf{p}}} = 0$) определение Δ в (8.12) принимает вид $\Delta = g \sum_p u_p v_p$, что вместе с первым равенством в (8.17) приводит к уравнению

$$\Delta = \frac{g}{2} \sum_p \frac{\Delta}{\sqrt{\epsilon_p^2 + \Delta^2}}. \quad (8.18)$$

Сумма в (8.18) берется по всему спектру электронных состояний ϵ_p по обе стороны от поверхности Ферми. Т.к. спектр практически непрерывный, то сумму в (8.18) можно заменить интегралом и рассматривать уравнение для Δ в виде

$$1 = \frac{g}{2} \int_{-\hbar\omega}^{\hbar\omega} \frac{\rho(\epsilon) d\epsilon}{\sqrt{\Delta^2 + \epsilon^2}}, \quad (8.19)$$

где $\rho(\epsilon)$ — плотность электронных состояний. Можно считать, что из-за взаимодействия с фононами спектр электронов обрывается на энергии $\hbar\omega$.

Правая часть в (8.19) содержит малый множитель g . Но Δ , как это видно из (8.16), (8.17), не является малой величиной. Малость g в (8.19) компенсируется большой величиной интеграла (логарифмически расходящимся при $\Delta = 0$).

Границы интегрирования в (8.19) связаны с тем, что притяжение между электронами возникает из-за взаимодействия с фононами. Поэтому спектр электронов, дающих вклад в сверхпроводимость, распространяется до фононной энергии. Плотность состояний в хорошем приближении можно заменить её значением ρ_F на поверхности Ферми. В результате уравнение (8.19) принимает вид

$$1 = \frac{g\rho_F}{2} \int_{-\hbar\omega}^{\hbar\omega} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\Delta^2 + \epsilon^2}} = \frac{g\rho_F}{2} \ln \frac{\sqrt{\Delta^2 + (\hbar\omega)^2} + \hbar\omega}{\sqrt{\Delta^2 + (\hbar\omega)^2} - \hbar\omega}. \quad (8.20)$$

А т.к. $\hbar\omega \gg \Delta$, то уравнение для Δ сводится к равенству

$$1 = g\rho_F \ln \frac{2\hbar\omega}{\Delta}, \quad (8.21)$$

откуда

$$\Delta = 2\hbar\omega e^{-\frac{1}{g\rho_F}}. \quad (8.22)$$

8.6 Гамильтониан для электронов в сверхпроводнике

В гамильтониане (8.13) после исключения «неправильных членов» остаются квадратичные операторные слагаемые, входящие в первую строку, и дополнительный член $-\frac{\Delta^2}{g}$. Формула (8.22) определяет среднее значение Δ , когда в исходном определении в (8.12) числа заполнения квазичастичных состояний были приняты равными нулю. Из члена $\frac{\Delta^2}{g}$, входящего в гамильтониан, естественно выделить квадратичные операторные слагаемые.

Если представить Δ в виде среднего значения и операторной части, $\Delta = \langle \Delta \rangle + \hat{\Delta}$, то в гамильтониан следует включить

$$-\frac{\Delta^2}{g} \approx -\frac{\langle \Delta \rangle^2}{g} - \frac{2}{g} \langle \Delta \rangle \hat{\Delta}. \quad (8.23)$$

Операторная часть, как это следует из определения в (8.12), равна

$$-\frac{2}{g} \hat{\Delta} = \sum_p 2u_p v_p (\hat{n}_{\mathbf{p}} + \hat{n}_{\bar{\mathbf{p}}}). \quad (8.24)$$

В результате гамильтониан принимает вид

$$\begin{aligned} H = & \sum_p 2\epsilon_p v_p^2 + \sum_p \epsilon_p (u_p^2 - v_p^2) (\hat{n}_{\mathbf{p}} + \hat{n}_{\bar{\mathbf{p}}}) + \\ & + \sum_p \Delta 2u_p v_p (\hat{n}_{\mathbf{p}} + \hat{n}_{\bar{\mathbf{p}}}) - \frac{\Delta^2}{g}, \end{aligned} \quad (8.25)$$

т.е. приобретает «правильную форму» (8.10). Энергия основного (вакуумного по квазичастицам) состояния H_0 есть

$$H_0 = \sum_p 2\epsilon_p v_p^2 - \frac{\Delta^2}{g}, \quad (8.26)$$

а энергии квазичастиц с учетом выражений (8.17) для u_p , v_p равны

$$E_p = \epsilon_p (u_p^2 - v_p^2) + \Delta 2u_p v_p = \sqrt{\epsilon_p^2 + \Delta^2}. \quad (8.27)$$

Отсюда видно, что величина Δ определяет порог в энергии квазичастичных возбуждений.

Глава 9

Физические предсказания теории БКШ

9.1 Квантование потока

Теория Лондонов правильно описывала многие свойства сверхпроводников. В теории БКШ переносчиком тока являются не электроны, а куперовские пары (с зарядом $q = 2e$), что требует некоторых количественных изменений. Введем волновую функцию для конденсата куперовских пар (с плотностью n_s) $\Psi = \sqrt{n_s} \exp(i\varphi)$. Выражение для плотности тока принимает вид (сравни с (7.6))

$$\mathbf{j} = \frac{e\hbar}{2m} n_s \left(\nabla\varphi - \frac{q}{\hbar c} \mathbf{A} \right). \quad (9.1)$$

При отсутствии тока в сверхпроводнике изменение фазы связано с \mathbf{A} :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2e}{\hbar c} \int_1^2 \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (9.2)$$

Если точка 2 описывает замкнутую траекторию и возвращается в точку 1, то фаза при этом может измениться только на $2\pi n$,

где n целое число, т.е.

$$2\pi n = \frac{2e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} \Rightarrow \frac{2e}{\hbar c} \oint \text{rot} \mathbf{A} d\mathbf{S} \Rightarrow \frac{2e}{\hbar c} \oint \mathbf{H} d\mathbf{S}. \quad (9.3)$$

Последний интеграл, поток магнитного поля через поверхность, Φ , для которого находим

$$\Phi = \frac{2\pi\hbar c}{2e} n \equiv \Phi_0 n. \quad (9.4)$$

Мы получили закон квантования магнитного потока через контур в сверхпроводнике. Величину кванта потока Φ_0 можно ощутить из следующего примера: чтобы через контур диаметром 0.1 мм проходил поток Φ_0 необходимо поле 0.1 от магнитного поля Земли.

9.2 Туннельные эффекты в сверхпроводниках

Между двумя нормальными металлами, разделенными тонкой прослойкой изолятора, может протекать электрический ток с занятого состояния в ферми-зоне одного металла на свободное место в зоне другого металла. Это объясняется квантовым эффектом прохождения электронов через потенциальный барьер.

Туннельный переход электронов между сверхпроводниками возможен только при конечном потенциале между ними, чтобы компенсировать энергию разрыва Куперовской пары.

В 1962 г. американский физик Джозефсон предсказал возможность туннелирования между сверхпроводниками Куперовских пар (что получило с тех пор название «эффектов Джозефсона»). Такой ток не требует дополнительной энергии на разрыв пар и может протекать при одинаковых потенциалах двух сверхпроводников.

В сверхпроводниках при $T = 0$ все электроны вблизи поверхности Ферми связаны в пары с суммарным импульсом равным нулю. Такая корреляция в импульсном пространстве приводит к появлению пространственной корреляции с характерной

длиной ξ_0 , называемой длиной когерентности. Обычно ее размер $\sim 10^{-4}$ см. Поэтому изолирующий слой должен быть существенно меньше ξ_0 , обычно 10-20 ангстрем. Если через такой изолирующий слой протекает не слишком большой ток, то это происходит без разности потенциалов между сверхпроводящими пластинами. Ток может протекать и при установленной разности потенциалов двух пластин, но тогда разность компенсируется соответствующим излучением или поглощением электромагнитных квантов.

Простое описание эффектов, происходящих на джозефсоновских контактах было предложено Фейнманом в виде двух уравнений Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = U_1 \Psi_1 + K \Psi_2, \quad i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = U_2 \Psi_2 + K \Psi_1, \quad (9.5)$$

где U_1, U_2 — гамильтонианы каждого сверхпроводника, а K описывает связь между сверхпроводниками. Если на контакте имеется разность потенциалов, $U_1 - U_2 = qV$, где q заряд переносчиков тока, то выбирая нуль отсчета энергии в центре контакта, систему уравнений можно записать в виде

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \frac{qV}{2} \Psi_1 + K \Psi_2, \quad i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -\frac{qV}{2} \Psi_2 + K \Psi_1. \quad (9.6)$$

Представим обе функции через плотности ρ и фазы θ ,

$$\Psi_1 = \sqrt{\rho_1} e^{i\theta_1}, \quad \Psi_2 = \sqrt{\rho_2} e^{i\theta_2}, \quad \varphi = \theta_2 - \theta_1, \quad (9.7)$$

для которых из уравнений получаем

$$\dot{\rho}_1 = -\dot{\rho}_2 = \frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{qV}{\hbar}. \quad (9.8)$$

Через контакт между сверхпроводниками (из 1 в 2) возникает ток $J = \dot{\rho}_1 = -\dot{\rho}_2$, для которого находим

$$J = J_{\max} \sin \left(\varphi_0 + \frac{q}{\hbar} \int V(t) dt \right), \quad J_{\max} = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2}, \quad (9.9)$$

где φ_0 — случайная фаза, J_{\max} — максимальный ток через контакт, который зависит от свойств сверхпроводников.

Полученные формулы позволяют понять все процессы на джозефсоновском контакте.

а) Если потенциал на контакте V равен нулю, то

$$J = J_{\max} \sin \varphi_0, \quad (9.10)$$

т.е. ток определяется случайной фазой φ_0 и может принимать любые значения в интервале $-J_{\max} \leq J \leq J_{\max}$.

б) Если между контактами имеется постоянная разность потенциалов, то ток осциллирует со временем,

$$J = J_{\max} \sin\left(\varphi_0 + \frac{q}{\hbar} V t\right), \quad (9.11)$$

и его среднее значение равно нулю.

в) Если кроме постоянного потенциала приложено переменное электрическое поле (например, внешняя электромагнитная волна), $V(t) = V_0 + v \cos \omega t$, то считая $v \ll V_0$ и разлагая $\sin\left(\varphi_0 + \frac{q}{\hbar} \int V(t) dt\right)$, получим

$$\begin{aligned} J &= J_{\max} \sin\left(\varphi_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t + \frac{qv}{\hbar \omega} \sin \omega t\right) \approx \\ &\approx J_{\max} \sin\left(\varphi_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t\right) + \cos\left(\varphi_0 + \frac{q}{\hbar} V_0 t\right) \frac{qv}{\hbar \omega} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (9.12)$$

При усреднении по времени первый член обращается в нуль, но среднее от второго члена отлично от нуля, если частоты косинуса и синуса совпадают, т.е. при резонансном условии $qV_0 = \hbar\omega$, когда потенциал, препятствующий переходу куперовских пар между сверхпроводниками компенсируется электромагнитным излучением.

г) В случае наличия на контакте магнитного поля в общей формуле для тока (9.9) к фазе добавляется «калибровочный член» с векторным потенциалом \mathbf{A} . В результате

$$J = J_{\max} \sin\left(\varphi_0 + \frac{q}{\hbar} \int V(t) dt - \frac{q}{\hbar} \int \mathbf{A} ds\right). \quad (9.13)$$

Эффект от магнитного поля ярко проявляется в системах с двумя джозефсоновскими контактами — приборах, получивших название СКВИД (SQUID — Superconducting Quantum Interference Device).

9.3 SQUID — сверхпроводящий квантовый интерферометр

Рассмотрим рамку из сверхпроводника, симметрично разрезанную двумя джозефсоновскими контактами a и b с симметричными входом (p) и выходом (q) тока.

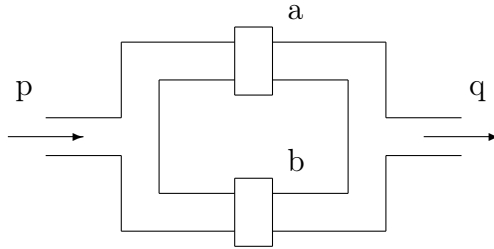


Рис. 1

Суммарный ток через оба рукава рамки равен

$$J = J_0 \sin \varphi_a + J_0 \sin \varphi_b, \quad (9.14)$$

где максимальный ток для двух контактов считаем одинаковым. (В противном случае следует J_0 заменить на J_a и J_b .)

Изменение фаз при прохождении симметричной рамки по каналам a и b могут отличаться только на $2\pi n$, что можно записать в виде равенства

$$\varphi_a + \frac{q}{\hbar} \int_a \mathbf{A} ds - \pi n = \varphi_b + \frac{q}{\hbar} \int_b \mathbf{A} ds + \pi n, \quad (9.15)$$

которое можно переписать в виде

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{q}{\hbar} \oint \mathbf{A} ds + 2\pi n \Rightarrow \frac{q}{\hbar} \Phi + 2\pi n \Rightarrow 2\pi \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} + n \right), \quad (9.16)$$

где Φ — магнитный поток через контур сверхпроводящей рамки, Φ_0 — квант магнитного потока.

Разность фаз в каждом промежутке можно тогда представить в виде

$$\varphi_a = \varphi_0 + \pi \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} + n \right), \quad \varphi_b = \varphi_0 - \pi \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} + n \right), \quad (9.17)$$

а суммарный ток через оба рукава рамки принимает вид

$$\begin{aligned} J &= J_0 \sin \left(\varphi_0 + \pi \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} + n \right) \right) + J_0 \sin \left(\varphi_0 - \pi \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} + n \right) \right) = \\ &= 2J_0 \sin \varphi_0 \cos \pi \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} + n \right) = (-1)^n 2J_0 \sin \varphi_0 \cos \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right). \end{aligned} \quad (9.18)$$

Для максимального значения тока получаем формулу

$$J_{\max} = 2J_0 \cos \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right), \quad (9.19)$$

из которой очевидны уникальные возможности сквида для измерения очень слабых магнитных полей (до 10^{-9} Гс, т.е. 10^{-10} от магнитного поля Земли). Это позволило использовать сквиды в биологии и медицине для изучения переменных магнитных полей сердца и головного мозга.

Использование сквидов дает возможность измерения очень слабых токов (до 10^{-15} В и 10^{-14} А).

Заключение

Выше были рассмотрены лишь некоторые системы многих тождественных частиц. Остались в стороне кристаллы и проходящие в них процессы. Детальному обсуждению проблем физики конденсированных сред посвящено множество книг.

Многонуکلонные ядра — отдельная своеобразная широкая область исследований, где наблюдаются явления, аналогичные сверхпроводимости. (Недавно была опубликована коллективная монография «50 лет теории БКШ в ядерной физике».)

SQUID (сверхпроводящий квантовый интерферометр) — это наглядный пример полезного технического устройства, полностью основанного на принципах квантовой физики систем многих тождественных частиц. По-видимому, наиболее важным вкладом квантовой физики в технику стал транзистор (его изобретение было отмечено Нобелевской премией 1956 г.), появление которого привело к революции в электронике.

Можно надеяться, что представленный здесь анализ особенностей теоретического описания систем многих тождественных частиц поможет читателю, интересующемуся квантовой физикой, разобраться и в более сложных проблемах.

Список литературы

1. Fifty Years of Nuclear BCS. Pairing in Finite Systems. Edited by: R.A. Broglia, V. Zelevinsky. — World Scientific Publishing Company, Singapore, 2013.
2. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фенмановские лекции по физике. Выпуски 8, 9. Квантовая механика. 8-е издание. — М.: Едиториал УРСС, 2014.
3. *Халатников И.М.* Введение в теорию сверхтекучести. — М.: Наука, 1965.
4. *Халатников И.М.* Теория сверхтекучести. — М.: Наука, 1971.
5. *Литтон Э.* Сверхпроводимость. — М.: Мир, 1971.
6. *Уильямс Дж.* Сверхпроводимость и ее применение в технике. — М.: Мир, 1973.
7. *Буккель В.* Сверхпроводимость. Основы и приложения. — М.: Мир, 1975.

Учебное издание

Беляев Спартак Тимофеевич

**КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА СИСТЕМ
МНОГИХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ**

Редактор *Л.В. Себова*. Корректор *О.П. Котова*
Компьютерная верстка *Е.А. Казённова*

Подписано в печать 07.07.2014. Формат 60×84 ¹/₁₆.
Усл. печ. л. 4,25. Уч.-изд.л. 4,0. Тираж 120 экз. Заказ № 246.

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования «Московский
физико-технический институт(государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: rio@mail.mipt.ru; тел. 8(495)408-58-22

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: polygraph@mipt.ru; тел. 8(495)408-84-30