

**Лекция 5. Момент импульса в  
квантовой механике. Движение в  
центральной поле. Элементарная  
теория атома водорода.  
Колебательные и вращательные  
уровни энергии.**

# Часть 1. Момент импульса в квантовой физике



<https://www.youtube.com/watch?v=DcaJQtKHm88>

# Момент импульса в квантовой физике



<https://www.youtube.com/watch?v=DcaJQtKHm88>

для сферического волчка

$$\hat{H}_{\text{вращ}} = \frac{\hat{\vec{L}}^2}{2I}$$

# Момент импульса в квантовой физике



стоп-кадр из <https://www.youtube.com/watch?v=DcaJQtKHm88>

для сферического волчка

$$\hat{H}_{\text{вращ}} = \frac{\hat{\vec{L}}^2}{2I}$$

$$\hat{\vec{L}} = [\vec{r} \times \hat{\vec{p}}] = \begin{pmatrix} y \hat{p}_z - z \hat{p}_y \\ -x \hat{p}_z + z \hat{p}_x \\ x \hat{p}_y - y \hat{p}_x \end{pmatrix}$$

# Момент импульса в квантовой физике

MANCHESTER  
1824  
The University of Manchester



стоп-кадр из <https://www.youtube.com/watch?v=DcaJQtKHm88>

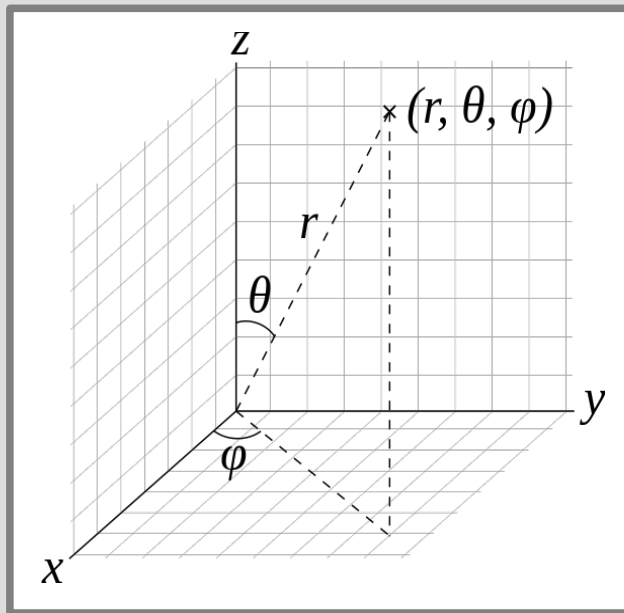
для сферического волчка

$$\hat{H}_{\text{вращ}} = \frac{\hat{L}^2}{2I}$$

$$\hat{\vec{L}} = [\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}] = \begin{pmatrix} y \hat{p}_z - z \hat{p}_y \\ -x \hat{p}_z + z \hat{p}_x \\ x \hat{p}_y - y \hat{p}_x \end{pmatrix}$$

В стационарных состояниях  $L^2$  должен иметь строго определенные значения, но все компоненты вектора  $L$  одновременно задать невозможно

# Немного математики в сферических координатах



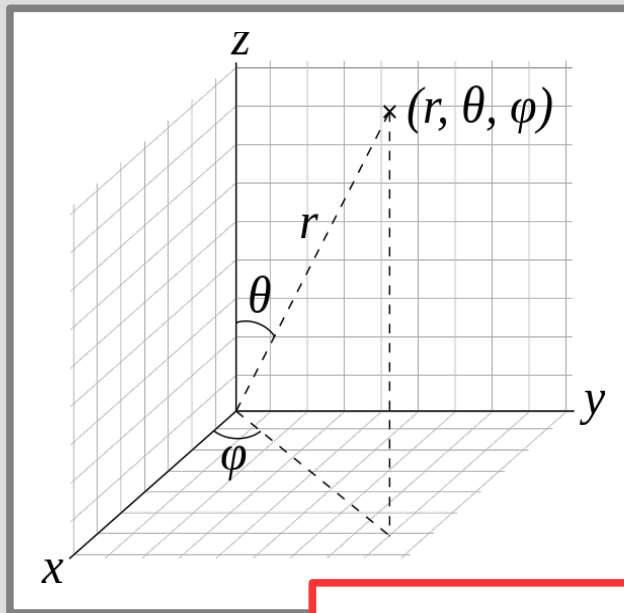
[https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical\\_coordinate\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_coordinate_system)

$$\begin{aligned}X &= r \sin \Theta \cos \phi \\Y &= r \sin \Theta \sin \phi \\Z &= r \cos \Theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ \Theta &= \arctg \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z} \\ \phi &= \arctg \frac{Y}{X}\end{aligned}$$

$$\hat{L}_z = x \hat{p}_y - y \hat{p}_x = -i \hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

# Немного математики в сферических координатах



$$\begin{aligned} X &= r \sin \Theta \cos \phi \\ Y &= r \sin \Theta \sin \phi \\ Z &= r \cos \Theta \end{aligned}$$

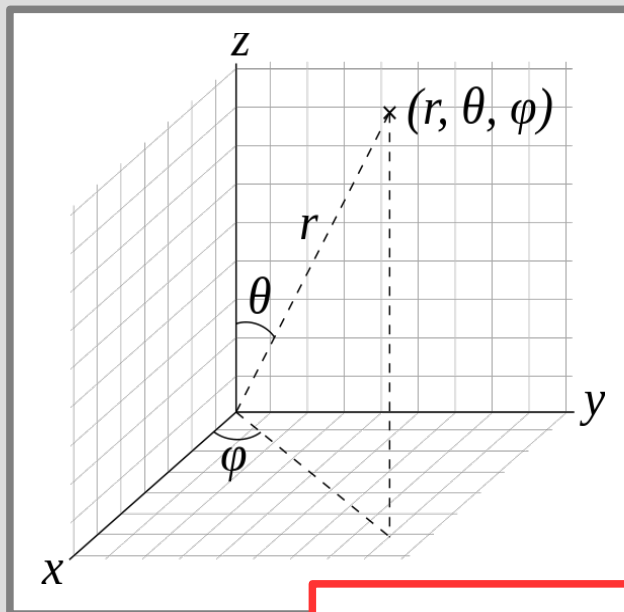
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ \Theta &= \arctg \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z} \\ \phi &= \arctg \frac{Y}{X} \end{aligned}$$

$$\hat{L}_z = x \hat{p}_y - y \hat{p}_x = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad \hat{l}_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial f}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

# Немного математики в сферических координатах



[https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical\\_coordinate](https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_coordinate)

$$\begin{aligned} X &= r \sin \Theta \cos \phi \\ Y &= r \sin \Theta \sin \phi \\ Z &= r \cos \Theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ \Theta &= \arctg \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z} \\ \phi &= \arctg \frac{Y}{X} \end{aligned}$$

$$\hat{L}_z = x \hat{p}_y - y \hat{p}_x = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial f}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

$$\propto \hat{l}^2 f$$



# Собственные значения проекции момента

$$\hat{l}_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$-i \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} = m \Psi$$

$$\Psi = f(r, \Theta) e^{i m \phi}$$

+ требование однозначности при повороте на  $2\pi$

# Собственные значения проекции момента

$$\hat{l}_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$-i \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} = m \Psi$$

$$\Psi = f(r, \Theta) e^{i m \phi}$$

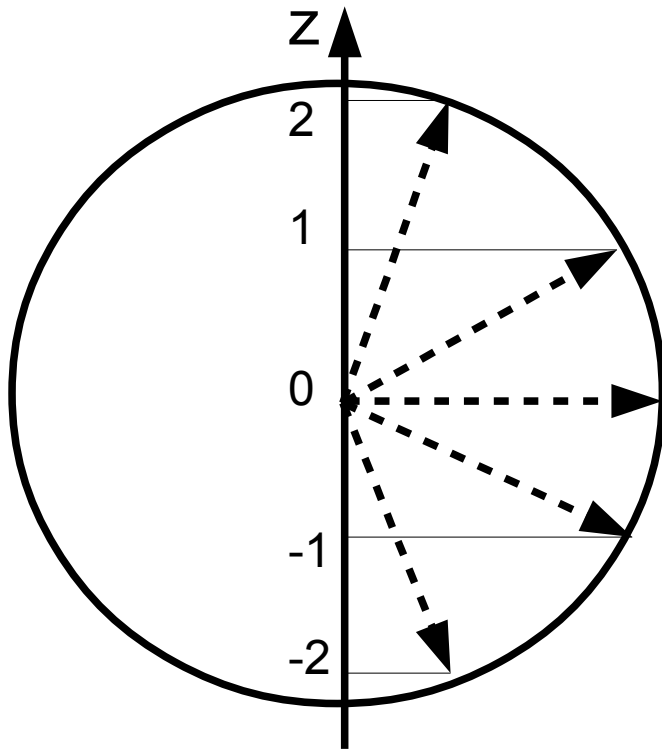
+ требование однозначности при повороте на  $2\pi$

$m$  — целое

возможные значения от  $-l$  до  $l$

# Собственные значения проекции момента

$$\hat{l}_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi}$$



## «Векторная» модель:

- при заданной длине возможны только дискретные значения проекции на ЛЮБУЮ заданную ось
- соотношения неопределенности запрещают направление «строго вдоль Z»

от  $-l$  до  $l$

# Собственные значения квадрата момента. Математика.

$$\hat{l}^2 = - \left( \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

$\hat{l}^2 \Psi = A \Psi$  решается в сферических функциях, см ЛЛ.Ш, пар.28

$$Y_{lm}(\Theta, \phi) = C_{lm} P_l^{|m|}(\cos \Theta) e^{im\phi}$$

собственные значения  $A = l(l+1)$

# Собственные значения квадрата момента. Математика.

$$\hat{l}^2 = - \left( \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

$\hat{l}^2 \Psi = A \Psi$  решается в сферических функциях, см ЛЛ.Ш, пар.28

$$Y_{lm}(\Theta, \phi) = C_{lm} P_l^{|m|}(\cos \Theta) e^{im\phi}$$

собственные значения  $A = l(l+1)$

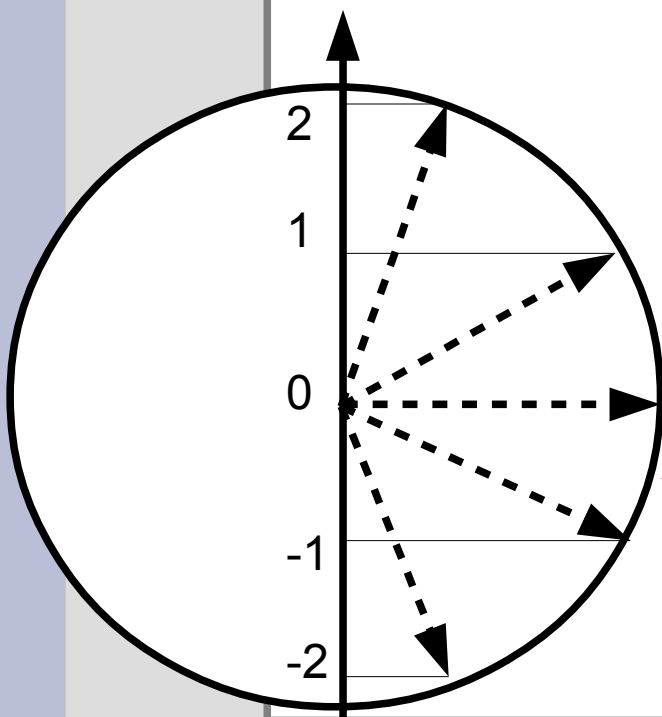
Пространственная чётность  
состояния с определенным  
моментом импульса

$$\begin{aligned} \vec{r} &\Leftrightarrow -\vec{r} \\ \{r, \Theta, \phi\} &\Leftrightarrow \{r, \pi - \Theta, \pi + \phi\} \\ Y_{lm}(\pi - \Theta, \phi + \pi) &= (-1)^l Y_{lm}(\Theta, \phi) \end{aligned}$$

# Собственные значения квадрата момента. Физика.

В отсутствие выделенного направления все значения проекции равновероятны, все оси координат равносильны

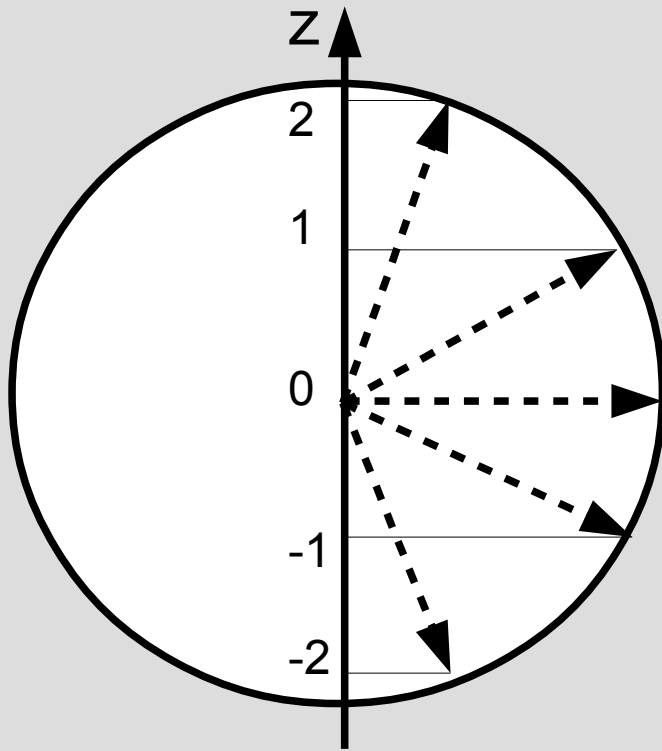
$$\begin{aligned}\langle \hat{l}^2 \rangle &= \langle \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2 \rangle = 3 \langle \hat{l}_z^2 \rangle = \\ &= 3 \times \left[ \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l m^2 \right] = \\ &= \frac{3}{2l+1} \times \frac{1}{3} l(l+1)(2l+1) = l(l+1)\end{aligned}$$



$$\sqrt{\langle \hat{l}^2 \rangle} > l$$

An orange arrow points from this equation towards the sphere diagram.

# Правила квантования момента импульса



- одновременно могут быть измерены проекция момента на заданную (**любую**, традиционно обозначается  $Z$ ) ось и квадрат момента импульса
- собственные значения квадрата момента  $l(l+1)$ , «длиной» вектора момента импульса называют  $l$
- проекция момента импульса — целое число  $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ , всего  $(2l+1)$  возможностей
- чётность состояния с определённым  $l$ :  $P = (-1)^l$

## Часть 2. Движение в центральном поле, некоторые общие свойства



# О строгом решении

$$E \Psi = \hat{H} \Psi = \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(r) \right) \Psi = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(r) \right) \Psi$$

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)}_{\text{действует только на радиальную часть}} + U(r) \Psi + \frac{\hbar^2}{2m r^2} \hat{l}^2 \Psi = E \Psi$$

действует только  
на радиальную  
часть

действует  
только на  
угловую  
часть

$$\Psi = \frac{\xi(r)}{r} \times Y_{lm}(\Theta, \phi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \xi'' + \left( U(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \xi = E \xi$$

Сведена к одномерной задаче,  $r > 0$

$$E \Psi = \hat{H} \Psi =$$

$$\Psi(r, \Theta, \phi) = \Psi_{n_r, l, m}$$

$$E = E(n_r, l)$$

$$\frac{2m r^2 \partial r \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)}$$

действует только  
на радиальную  
часть

$$2m r^2$$

действует  
только на  
угловую  
часть

$$\Psi = \frac{\xi(r)}{r} \times Y_{lm}(\Theta, \phi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \xi'' + \left( U(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \xi = E \xi$$

Сведена к одномерной задаче,  $r > 0$

$$E \Psi = \hat{H} \Psi =$$

$$\Psi(r, \Theta, \phi) = \Psi_{n_r, l, m}$$

$$E = E(n_r, l)$$

$$\frac{2m}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

↑  
действует только  
на радиальную  
часть

Квантовые числа:

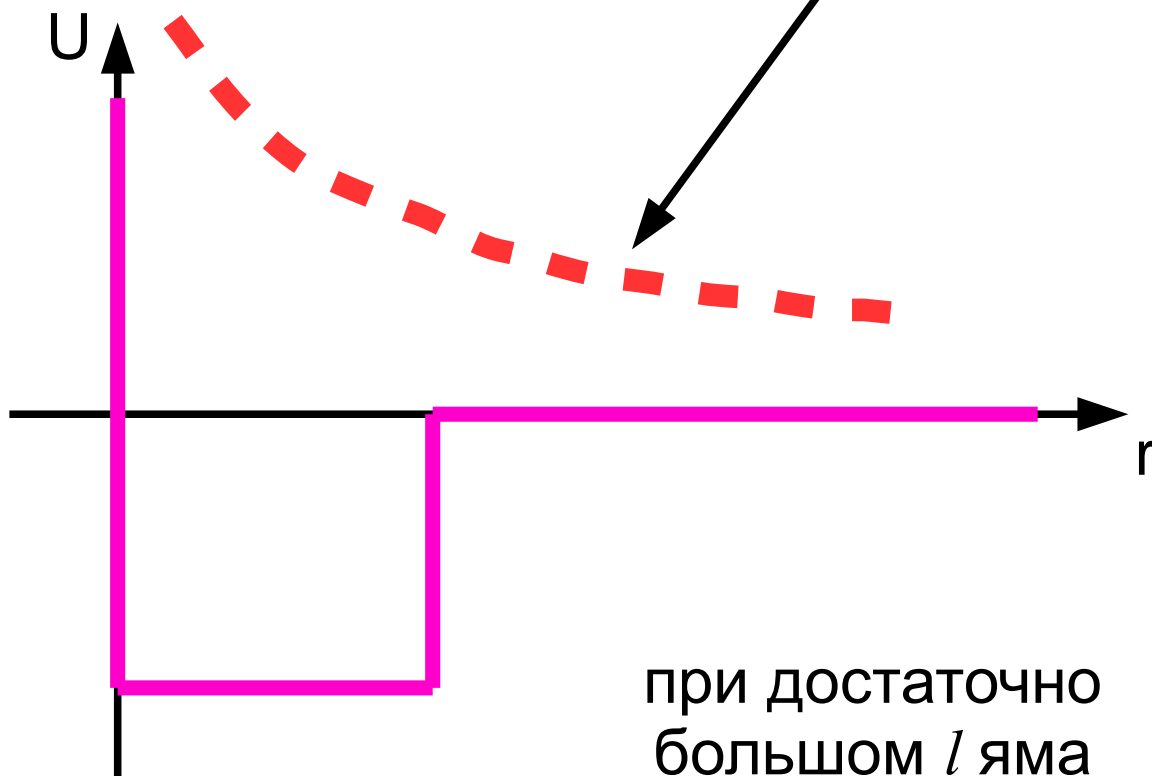
- $n_r$  — радиальное  
(0, 1, 2, ...)
- $l$  — орбитальное  
{s, p, d, f, ..} = {0, 1, 2, 3, ..}
- $m$  — магнитное

$$\Psi = \frac{\xi(r)}{r} \times Y_{lm}(\Theta, \phi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \xi'' + \left( U(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \xi = E \xi$$

↑ центробежная энергия

$$E \Psi = \hat{H} \Psi =$$



при достаточно  
большом  $l$  яма  
может «пропасть»

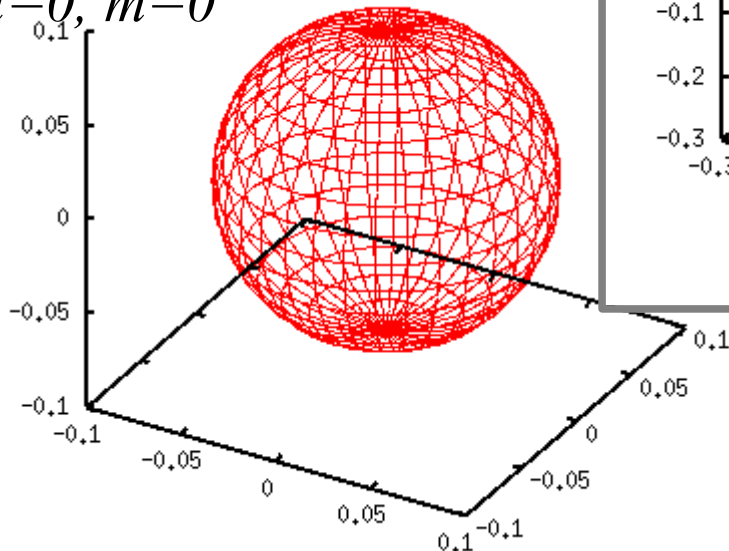
твует  
ко на  
вую  
сть

# Вид некоторых волновых функций (угловая часть).

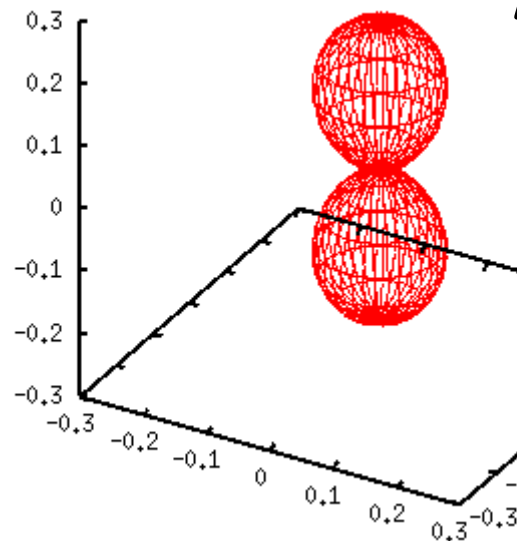
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \xi'' + \left( U(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \xi = E \xi$$

$$\Psi = \frac{\xi(r)}{r} \times Y_{lm}(\Theta, \phi)$$

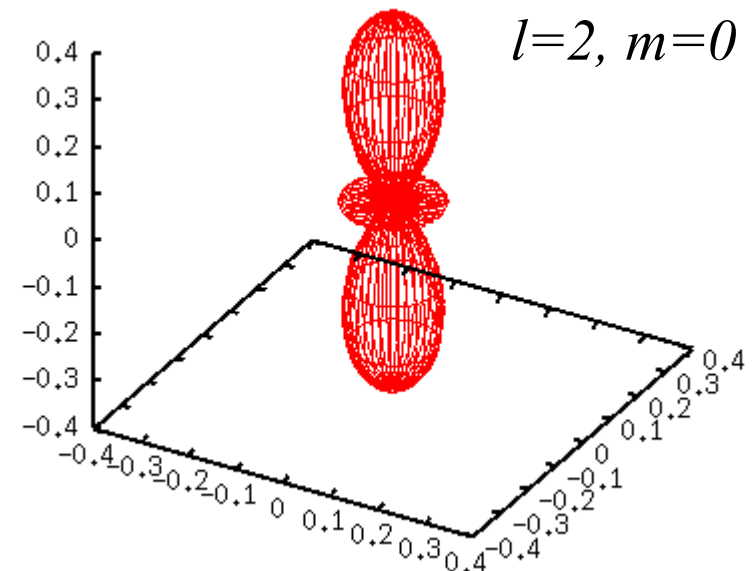
$l=0, m=0$



$l=1, m=0$

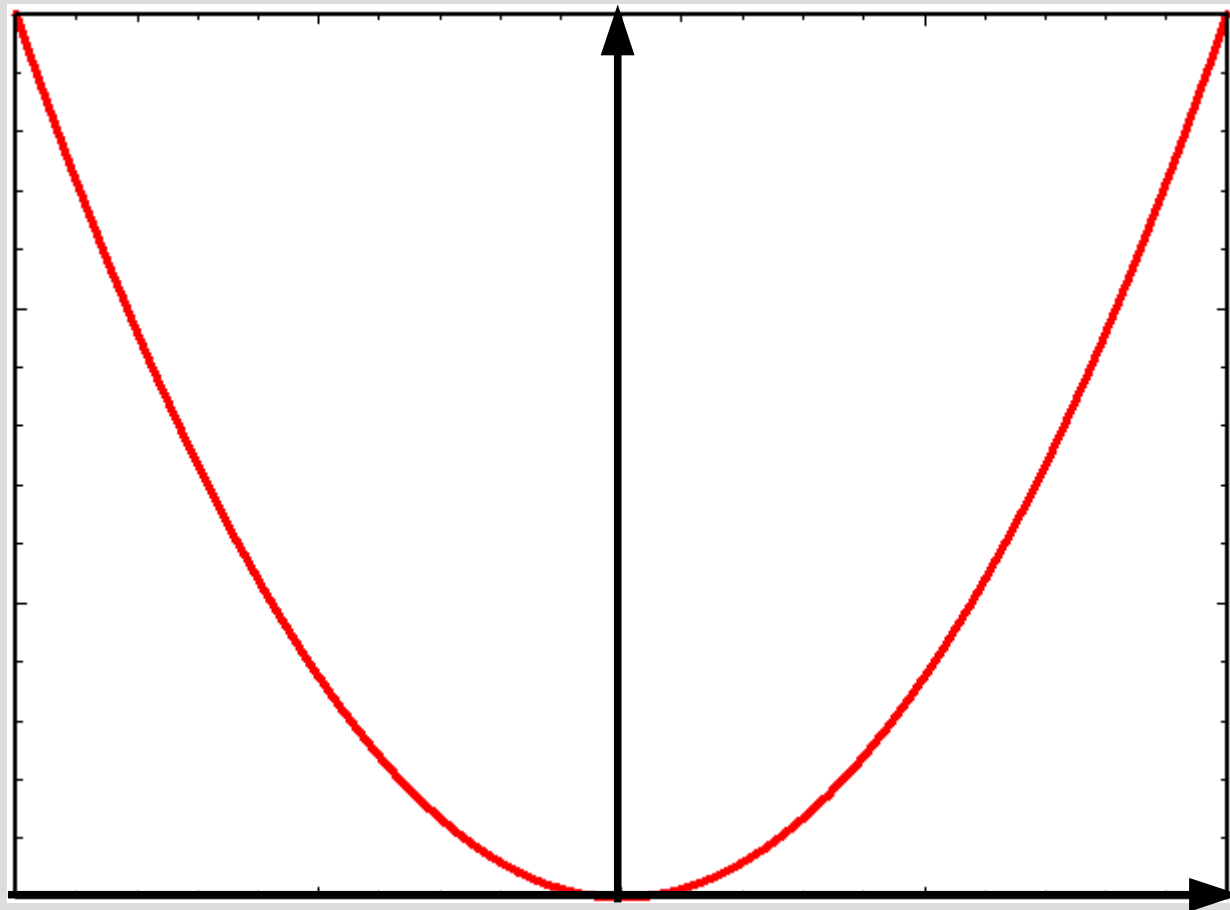


$l=2, m=0$



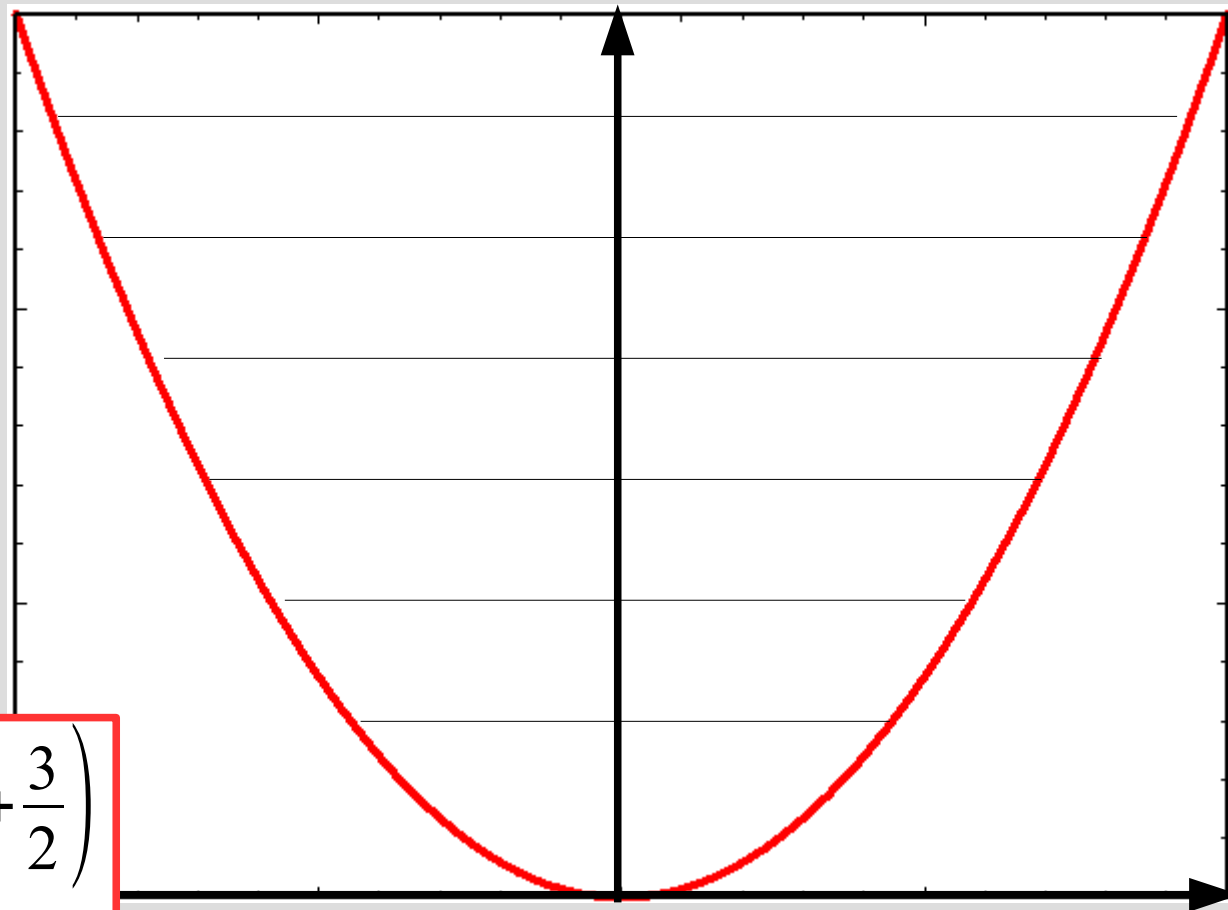
# Трёхмерный осциллятор $U=kr^2/2$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + \frac{kr^2}{2} \Psi = E \Psi$$



# Трёхмерный осциллятор $U=kr^2/2$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + \frac{kr^2}{2} \Psi = E \Psi$$



$$E_n = \hbar \omega \left( n + \frac{3}{2} \right)$$

$$n = n_x + n_y + n_z$$

# Трёхмерный осциллятор $U=kr^2/2$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + \frac{kr^2}{2} \Psi = E \Psi$$

кратность  
вырождения:

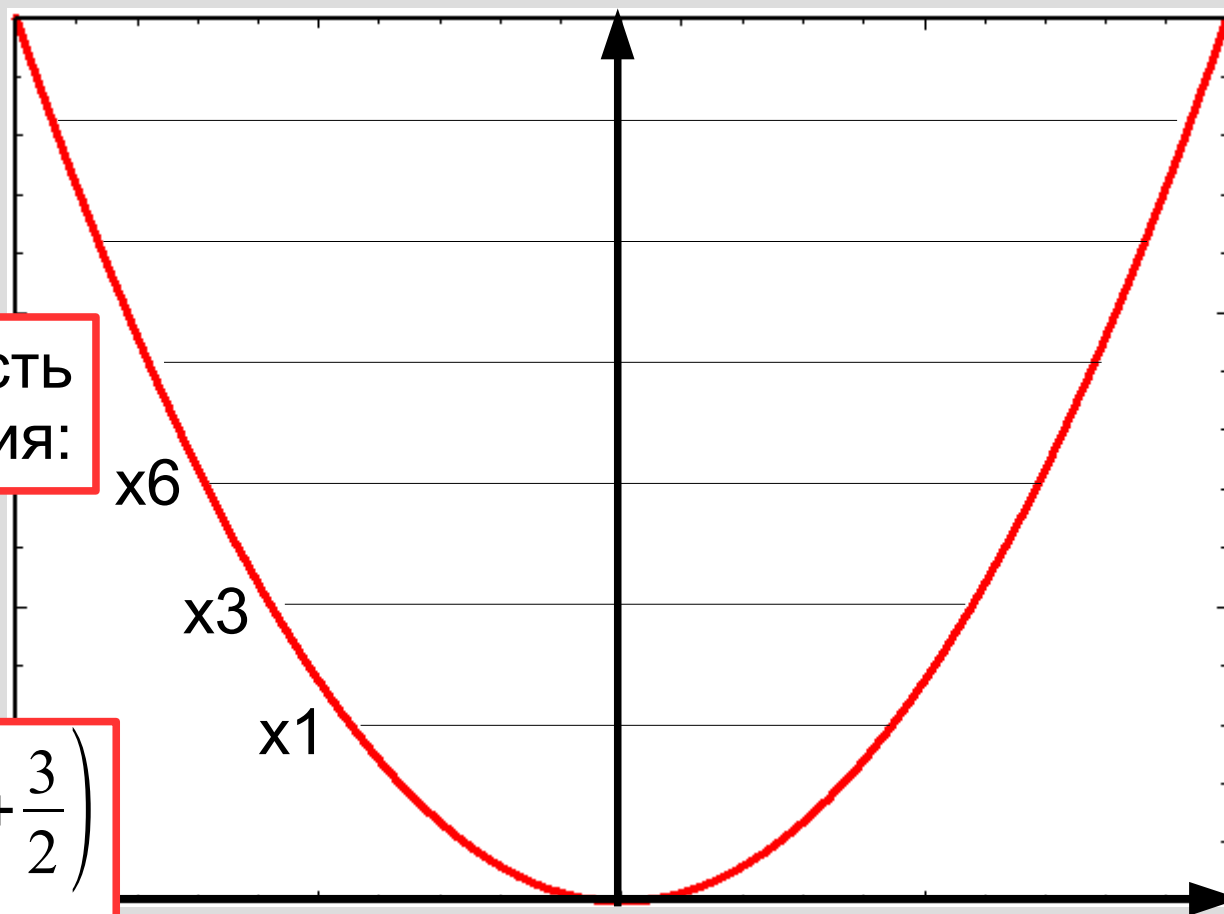
x6

x3

x1

$$E_n = \hbar \omega \left( n + \frac{3}{2} \right)$$

$$n = n_x + n_y + n_z$$





# Трёхмерный осциллятор $U=kr^2/2$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + \frac{kr^2}{2} \Psi = E \Psi$$

кратность  
вырождения:

x6

x3

x1

$$E_n = \hbar \omega \left( n + \frac{3}{2} \right)$$

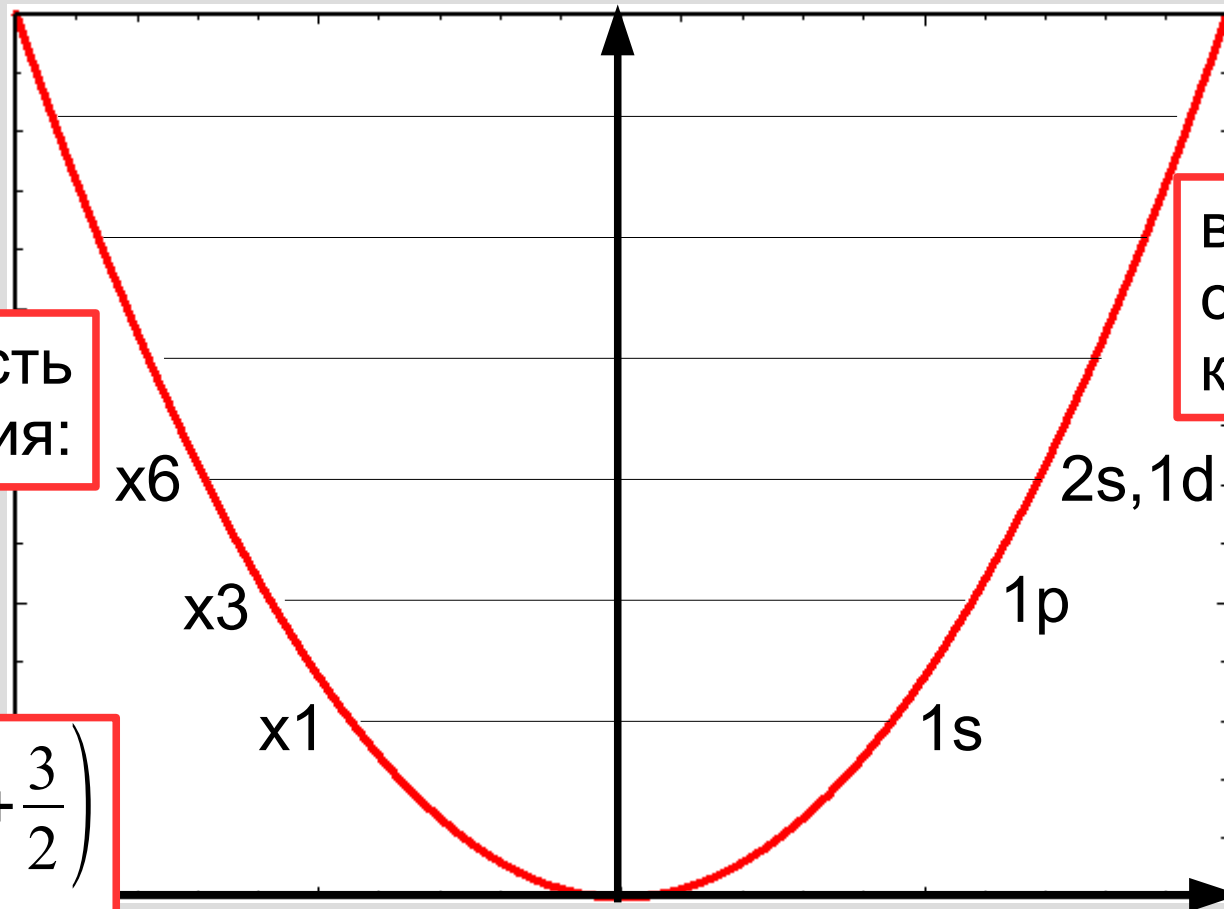
$$n = n_x + n_y + n_z$$

В  
сферических  
координатах

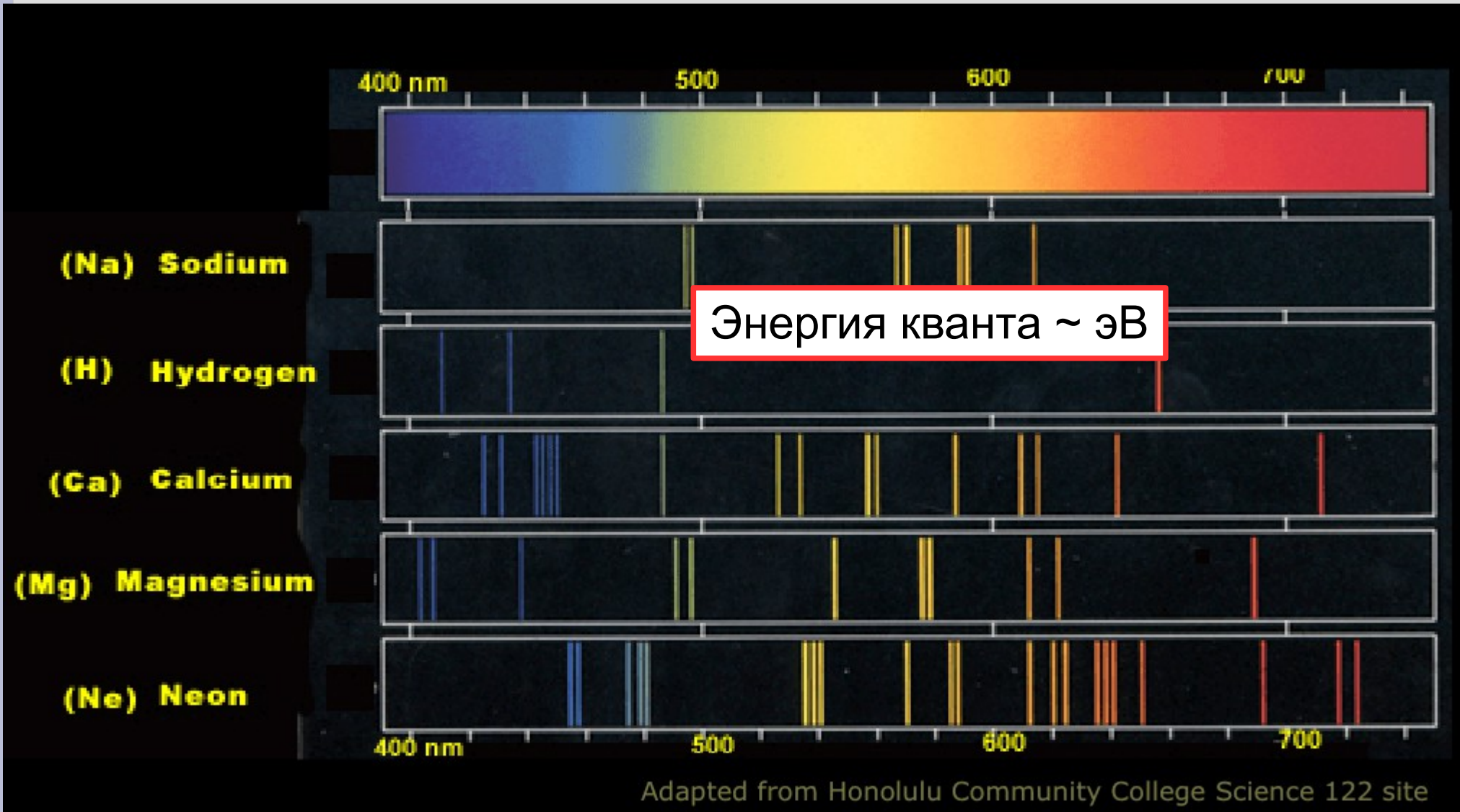
2s, 1d

1p

1s

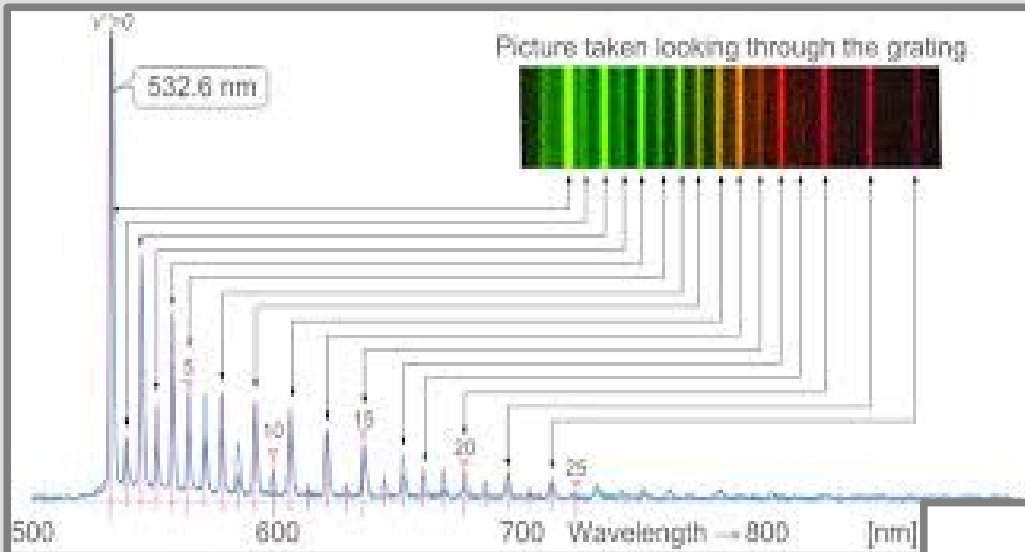


# Часть 3. Спектры атомов и молекул: масштабы энергии



Adapted from Honolulu Community College Science 122 site

# Спектры молекул

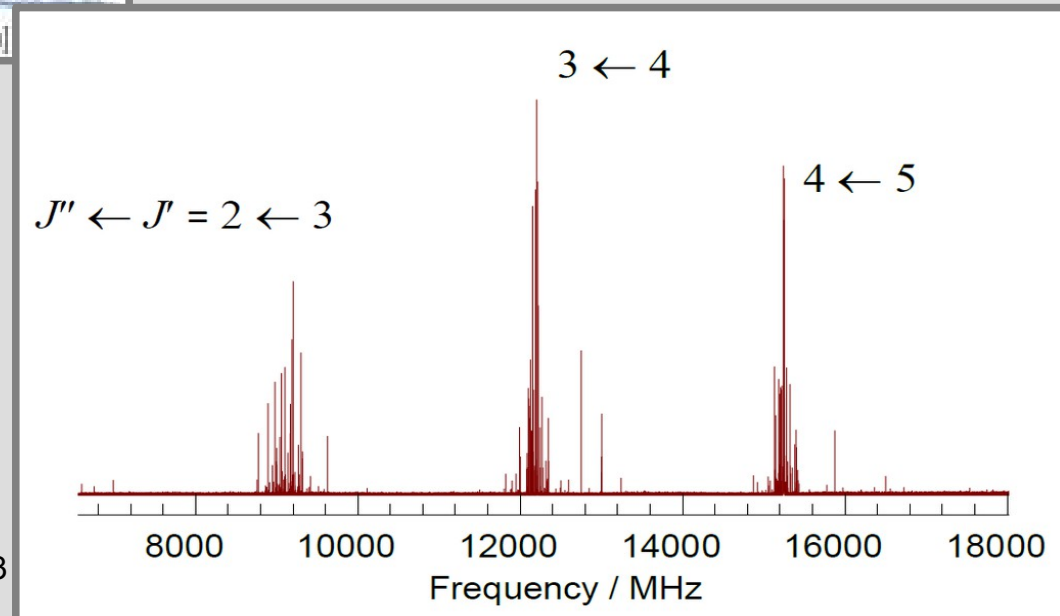


Колебательные уровни в молекуле, квант  $\sim 0.01$  эВ

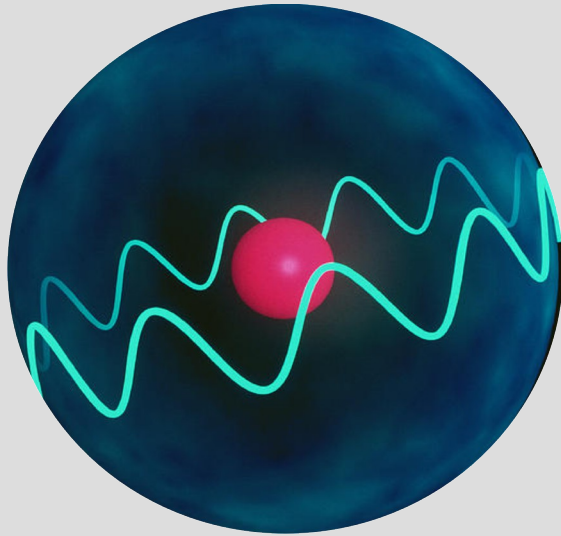
<http://alkaad.com/pe-1600-iodine-molecular-spectroscopy.html>

Вращательные уровни в молекуле, СВЧ-спектр (1 см), квант  $\sim 10^{-4}$  эВ

Part of the rotational spectrum of trifluoriodomethane, CF3I



# Элементарная теория атома водорода

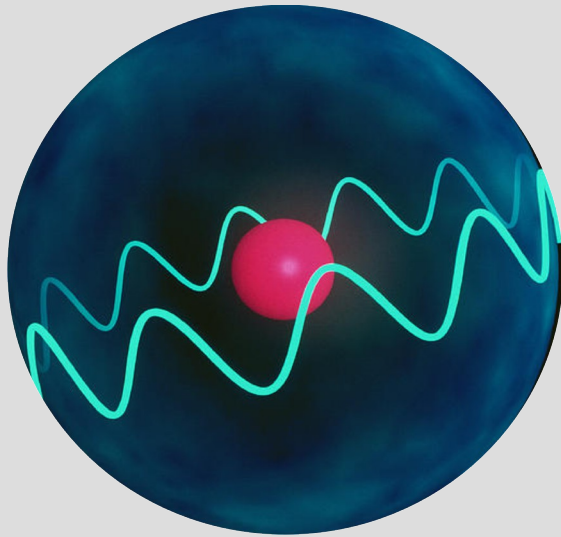


Задача:  
финитное движение электрона в  
кулоновском поле ядра

Найти:

- уровни энергии (точно),
- волновые функции (качественно)

# Уравнение Шредингера для двух различимых тел



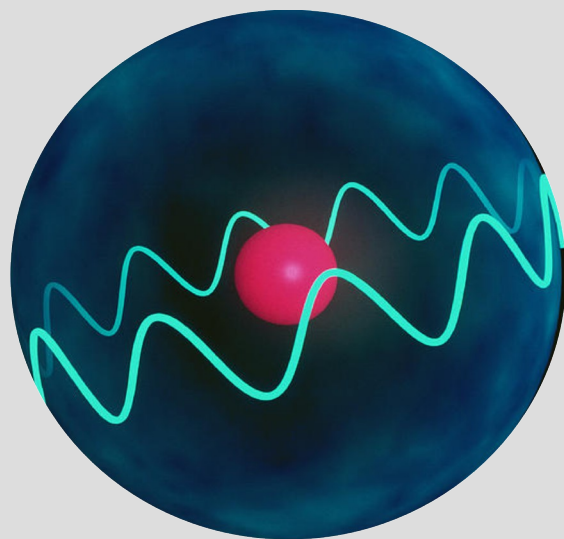
$$\Psi(\vec{R}, \vec{r})$$



Координата электрона

Координата ядра

# Уравнение Шредингера для двух различимых тел



$$\Psi(\vec{R}, \vec{r})$$

↑  
↑  
↑

↑ Координата ядра  
↑ Координата электрона

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\vec{R}} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{r}} + U(|\vec{R} - \vec{r}|)$$

$$\vec{R}_{\text{ЦМ}}, (M+m)$$
$$\vec{\rho} = \vec{R} - \vec{r}, \mu = \frac{Mm}{M+m}$$

# Случай кулоновского потенциала $U(r) = -e^2/r$ . Уровни энергии.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \xi'' + \left( U(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \xi = E \xi$$

Только ответы:

- 1) случайное вырождение по орбитальному квантовому числу
- 2) энергию определяет главное квантовое число  $n = n_r + l + 1$
- 3) возможные значения момента  $l = 0, 1, \dots, (n-1)$

$$E_n = -\frac{m e^4}{2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

↑  
13.6 эВ

Полная кратность вырождения  $n$ -ого уровня:  
 $n$  значений момента,  $(2l+1)$  значение проекции  $= n^2$

# Случай кулоновского потенциала $U(r) = -e^2/r$ . Волновые функции.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \xi'' + \left( U(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \xi = E \xi$$

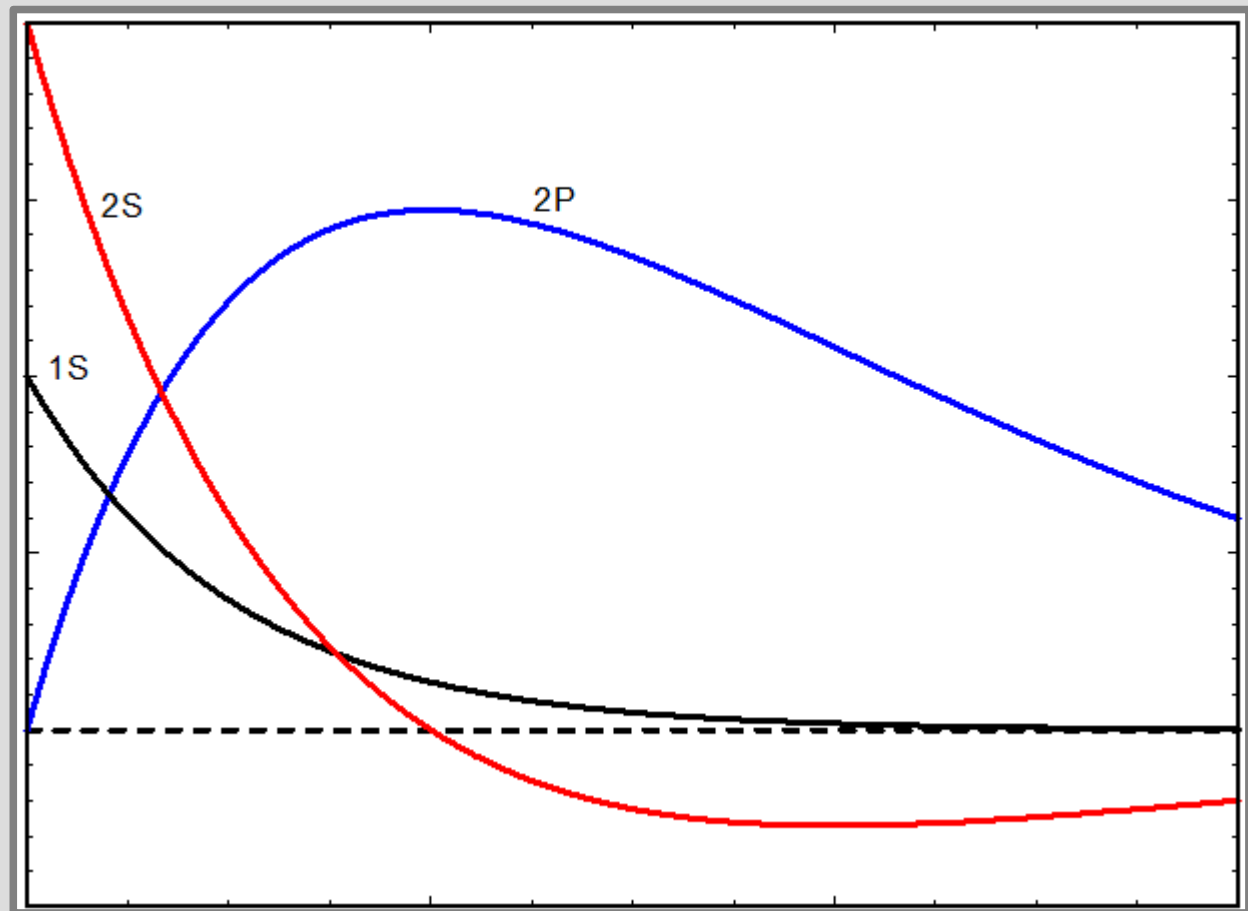
$$\Psi = \frac{\xi(r)}{r} \times Y_{lm}(\Theta, \phi) = R_{nl} \times Y_{lm}$$

$$R_{10} = 2e^{-r}$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-r/2} \left( 1 - \frac{r}{2} \right)$$

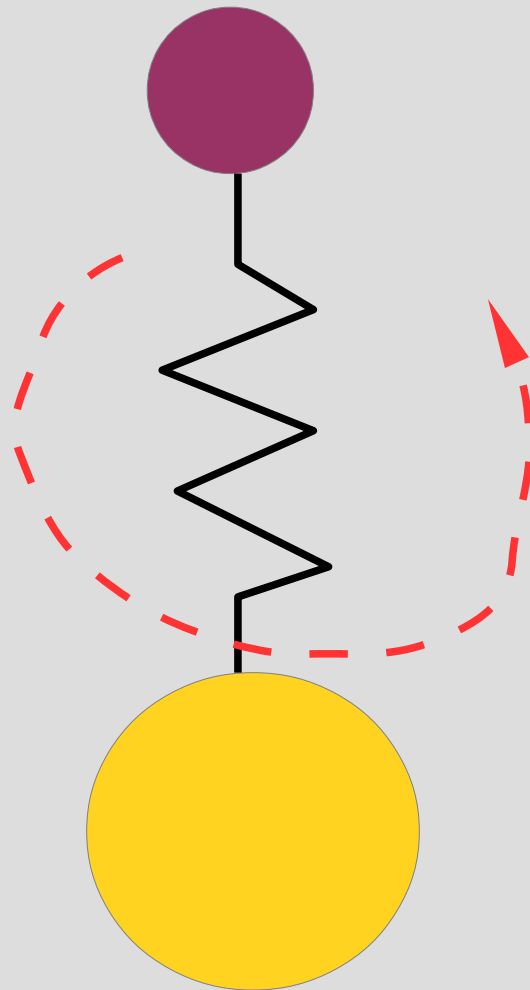
$$R_{21} = \frac{1}{2\sqrt{6}} e^{-r/2} r$$

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2} \approx 0.53 \text{ \AA}$$





# Вращательные и колебательные степени свободы молекул



# Колебания двухатомной молекулы

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{kx^2}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$E_n = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

гармоническое  
приближение

# Колебания двухатомной молекулы

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{kx^2}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$E_n = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

гармоническое  
приближение

Средняя энергия  
при конечной температуре  
(вычисление делалось для АЧТ)

$$\bar{E} = \sum E_n w_n = \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / (kT)} - 1} + \frac{\hbar \omega}{2}$$

# Колебания двухатомной молекулы

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{kx^2}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$E_n = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

гармоническое  
приближение

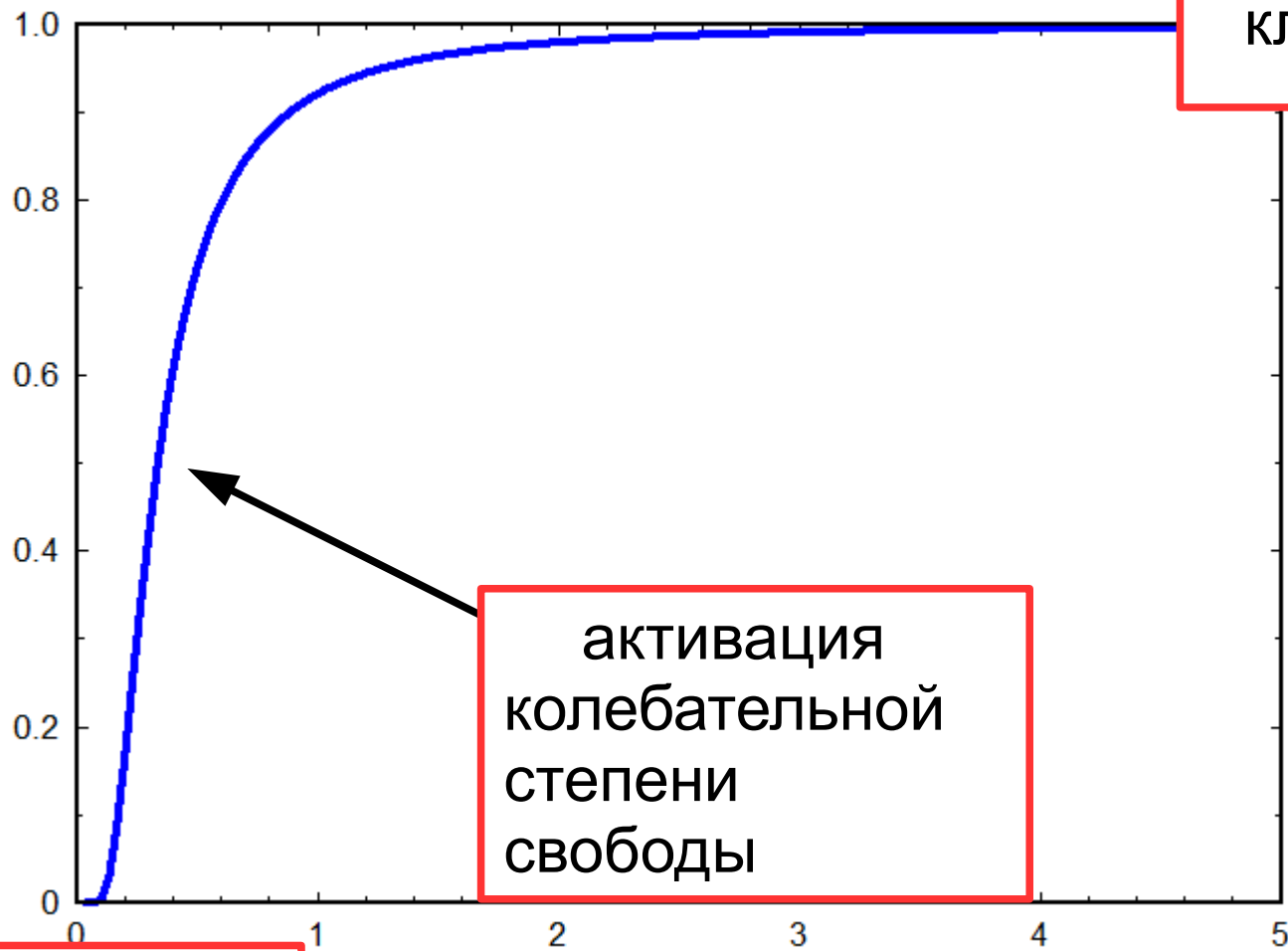
Средняя энергия  
при конечной температуре  
(вычисление делалось для АЧТ)

$$\bar{E} = \sum E_n w_n = \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / (kT)} - 1} + \frac{\hbar \omega}{2}$$

$$C = k \frac{(\hbar \omega)^2}{(kT)^2} \frac{e^{\hbar \omega / (kT)}}{(e^{\hbar \omega / (kT)} - 1)^2}$$

классический предел

молекулы



активация  
колебательной  
степени  
свободы

теорема  
Нернста

...ние делалось для АЧТ)

$$\bar{\epsilon}_n w_n = \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / (kT)} - 1} + \frac{\hbar \omega}{2}$$

$$C = k \frac{(\hbar \omega)^2}{(kT)^2} \frac{e^{\hbar \omega / (kT)}}{(e^{\hbar \omega / (kT)} - 1)^2}$$

# Оценка колебательного кванта

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k x^2}{2}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2} \approx 0.53 \text{ \AA}$$

$$E_n = -\frac{m e^4}{2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

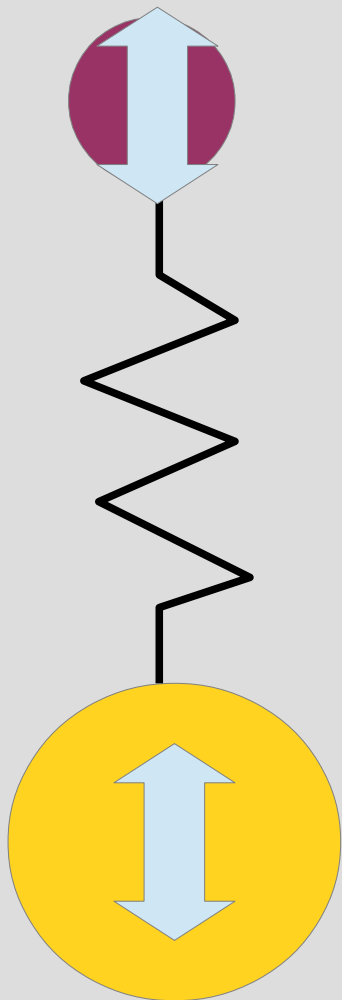
- Энергия связи — кулоновская,  $\sim Ry$
- Межатомное расстояние  $\sim$  боровского радиуса  $r_0$
- Энергия связи существенно меняется (на  $\sim Ry$ ) при изменении расстояния на  $r_0$

$$k \sim \frac{Ry}{r_0^2} \sim \frac{m e^4 / (\hbar^2)}{(\hbar^2 / (m e^2))^2} = \frac{m^3 e^8}{\hbar^6}$$
$$\hbar \omega \sim \frac{m e^4}{\hbar^2} \sqrt{\frac{m}{\mu}} = Ry \sqrt{\frac{m}{\mu}}$$

десятки мэВ, сотни и тысячи К

# «Нулевые колебания» в молекуле

В основном состоянии атомы делокализованы (соотношение неопределённостей!).



Оценка:

$$\frac{k A_0^2}{2} = \frac{\hbar \omega}{2} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$A_0^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{k \mu}} = \frac{\hbar}{\omega \mu} \sim \frac{\hbar^2}{R_y \sqrt{m \mu}}$$

$$\sim \frac{(10^{-27})^2}{13.6 \times 1.6 \times 10^{-12} \times 10^{-27} \sqrt{2000 \times 16}} \text{ см}^2 \simeq$$

$$\simeq 2.5 \times 10^{-19} \text{ см}^2 = (5 \times 10^{-10} \text{ см})^2$$

несколько %  
от  
межатомного

«Нуле

Более формальное вычисление.

Волновая функция основного состояния (ЛЛ. III)

$$\Psi = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp\left( -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 \right)$$

Среднеквадратичное отклонение

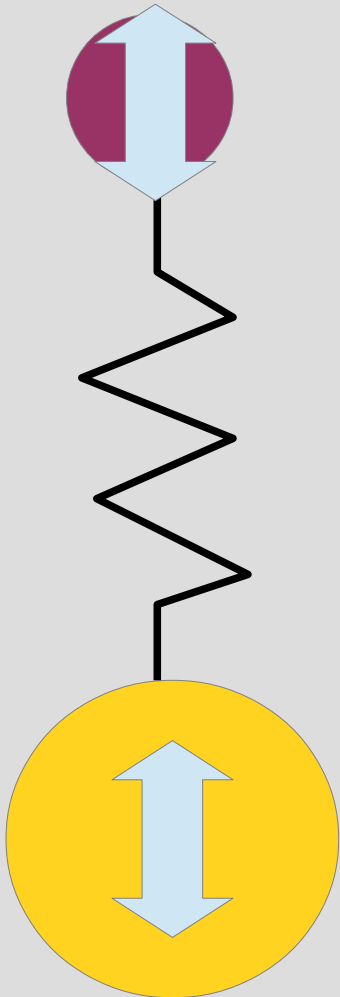
$$A_0^2 = \langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \Psi^2 dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\hbar}{m\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega}$$

Оценка:  $\frac{k A_0^2}{2} = \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$

$$A_0^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{k\mu}} = \frac{\hbar}{\omega\mu} \sim \frac{\hbar^2}{Ry \sqrt{m\mu}}$$

$$\sim \frac{(10^{-27})^2}{13.6 \times 1.6 \times 10^{-12} \times 10^{-27} \sqrt{2000 \times 16}} \text{ см}^2 \simeq 2.5 \times 10^{-19} \text{ см}^2 = (5 \times 10^{-10} \text{ см})^2$$

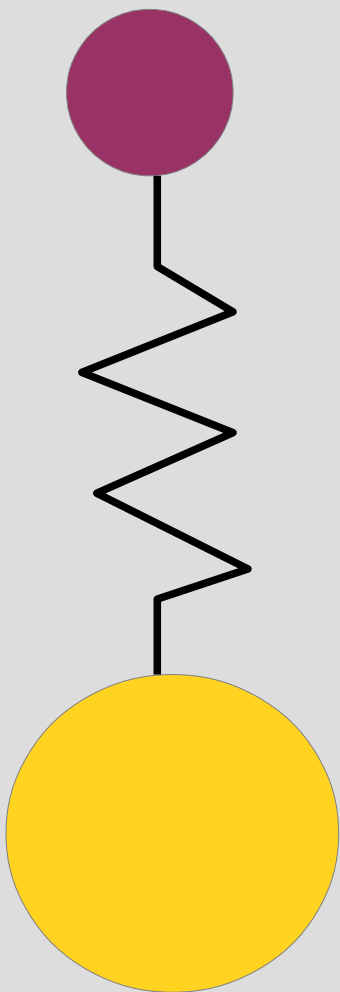
несколько %  
от  
межатомного





# Вращение двухатомной молекулы

Тензор инерции  $\hat{I} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$



$$\hat{H} = \frac{\hbar^2 \hat{l}_x^2}{2I_x} + \frac{\hbar^2 \hat{l}_y^2}{2I_y} + \frac{\hbar^2 \hat{l}_z^2}{2I_z} = \frac{\hbar^2 \hat{l}^2}{2I} + \underbrace{\left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{I} \right) \frac{\hbar^2 \hat{l}_z^2}{2}}_{m=0}$$

Набор невырожденных уровней,  
энергии уровней

$$E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I}, l = 0, 1, 2, \dots$$

# Теплоёмкость молекулы водорода

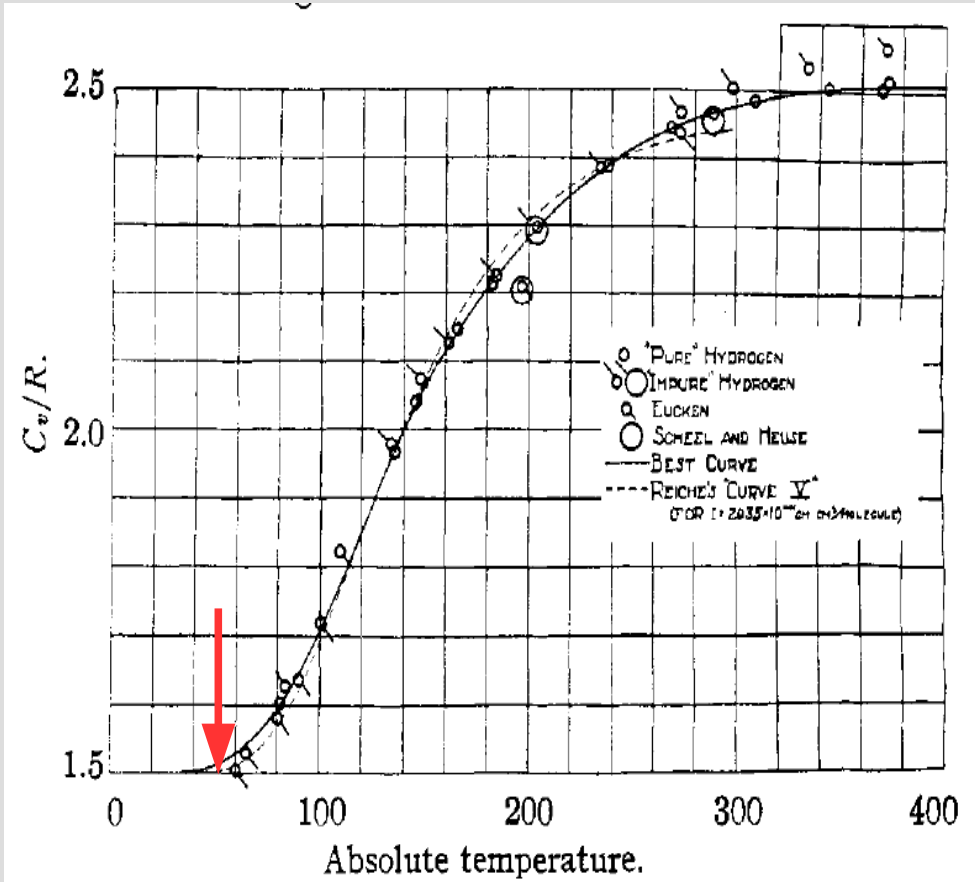


Fig. 3.—Specific heat of hydrogen.

$$E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I}$$

Дискретность уровней = активационный характер теплоёмкости

Температура активации:

$$kT \sim \frac{\hbar^2}{I} \sim \frac{\hbar^2}{M r_0^2} \approx \frac{(10^{-27})^2}{2000 \times 10^{-27} \times 10^{-16}} = 0.5 \times 10^{-14} \text{ эрг}$$

$$T \approx 50 \text{ К}$$

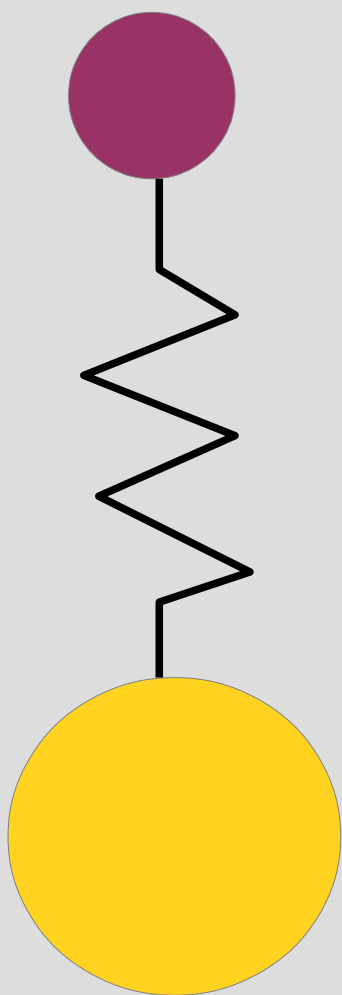
рисунок из статьи R.E.Cornish and E.D.Eastman "The specific heat of hydrogen gas at low temperatures...", J.Am.Chem.Soc. 50, 627 (1928)

# Оценка вращательного кванта энергии

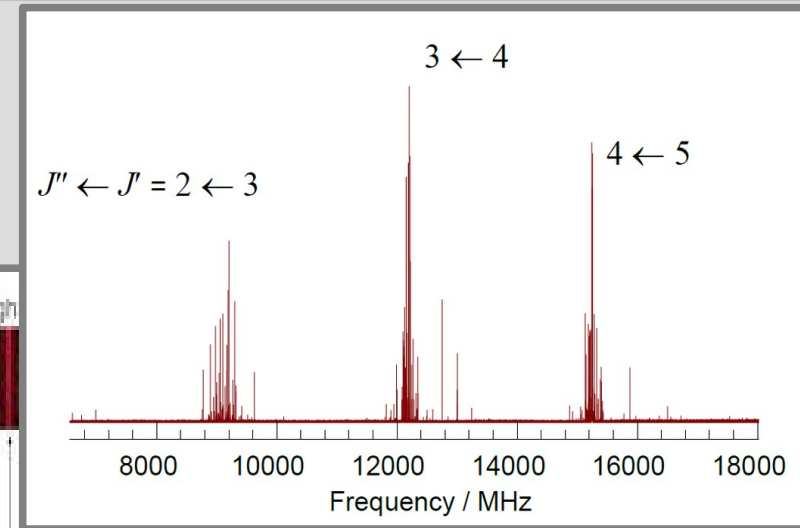
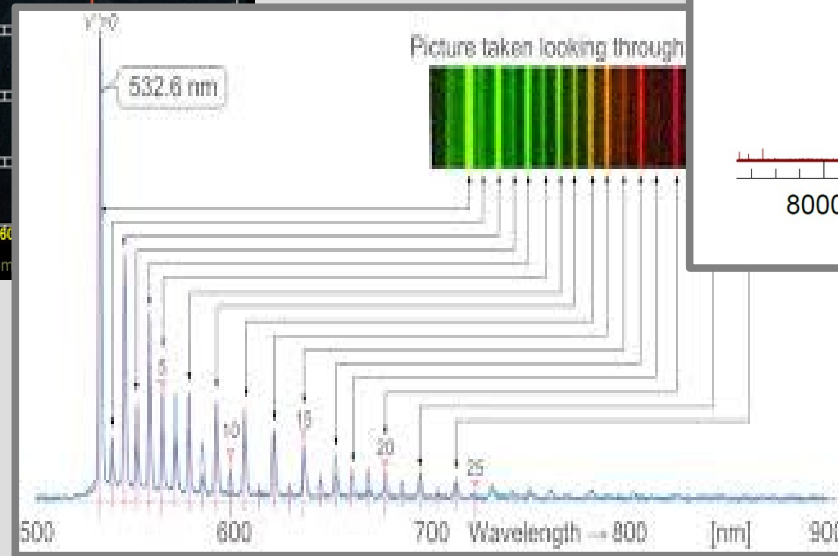
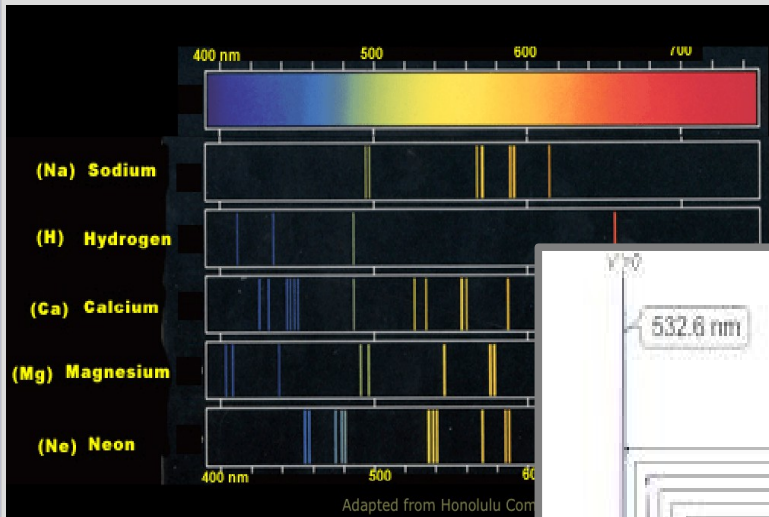
- Расстояние порядка боровского радиуса

$$\hbar \omega \sim \frac{\hbar^2}{M r_0^2} = \frac{\hbar^2}{M (\hbar^2 / (m e^2))^2} = \frac{m}{M} \frac{m e^4}{\hbar^2} = \frac{m}{M} R_y$$

доли мэВ, единицы и десятки К

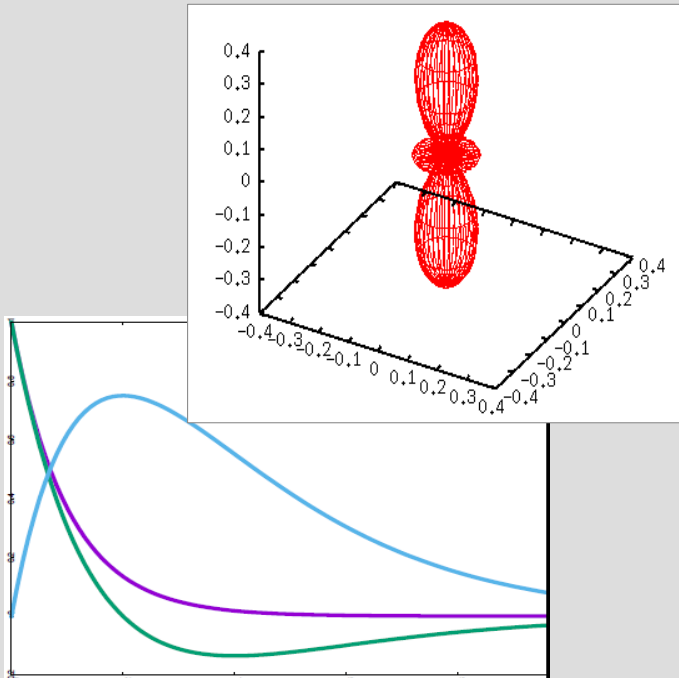


# Сравнение масштабов расщепления спектров

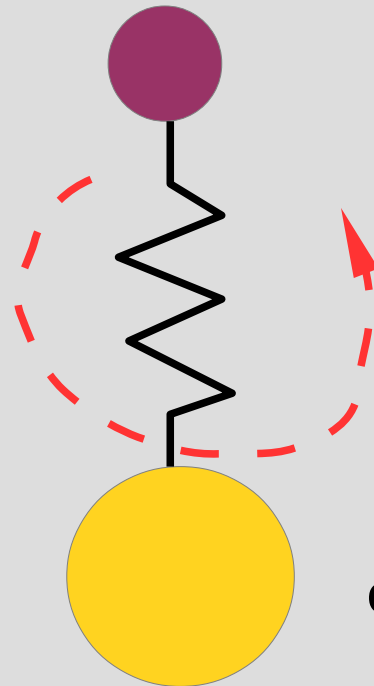


$$\omega_e : \omega_{\text{кол}} : \omega_{\text{вращ}} = 1 : \sqrt{\frac{m}{M}} : \frac{m}{M}$$

# Основное на лекции

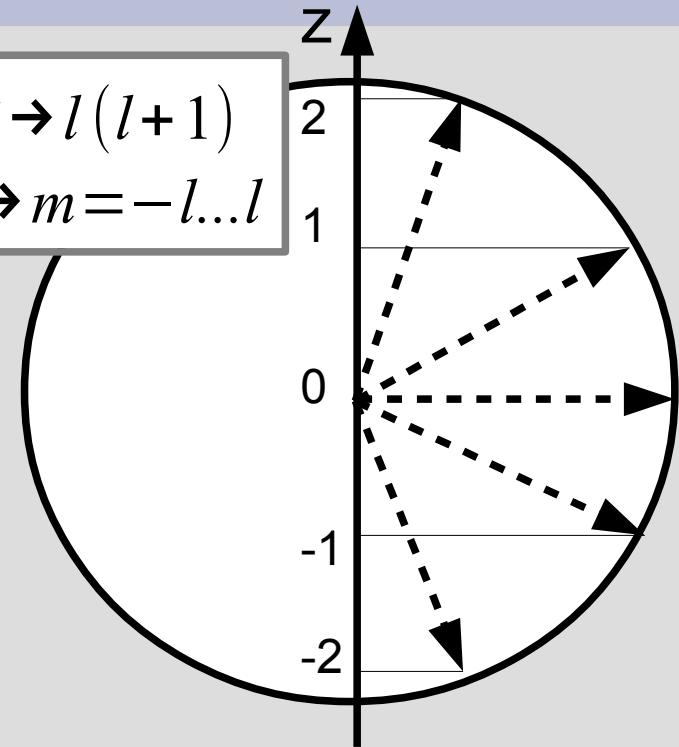


$$E_n = -\frac{m e^4}{2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$$



$$\hat{l}^2 \rightarrow l(l+1)$$

$$\hat{l}_z \rightarrow m = -l \dots l$$



$$\omega_e : \omega_{\text{кол}} : \omega_{\text{вращ}} = 1 : \sqrt{\frac{m}{M}} : \frac{m}{M}$$