

Введение в физику металлов и сверхпроводимость

Валерий Владимирович Рязанов

Лекция 3

Кинетическая индуктивность

**Модель Друде электропроводности
металлов.**

**Высокочастотные свойства
сверхпроводников.**

Кинетическая индуктивность

Обычная (магнитная или геометрическая) индуктивность L участка электрической цепи, по которой протекает ток I , связана с величиной энергии магнитного поля, которое при этом возникает в окружающем пространстве:

$$LI^2/2 = [1/(2\mu_0)] \int B^2 dV \quad (3.1)$$

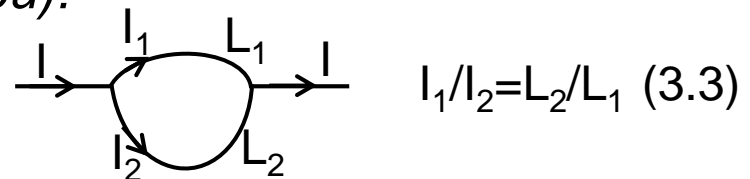
В сверхпроводнике важную роль играет **кинетическая индуктивность**, связанная с энергией, потраченной на разгон сверхпроводящих пар (запасенной в кин энергии сверхпроводящей компоненты тока) в соответствии с первым уравнением Лондонов (ур. L I):

$$L_k I^2/2 = \int n_s (mv_s^2/2) dV; \quad L_k = \Lambda \int (j_s^2/I^2) dV \quad (3.2)$$

Интегрирование здесь ведется по объему сверхпроводника.

$$\Lambda = m/(e^2 n_s) = \mu_0 \lambda_L^2$$

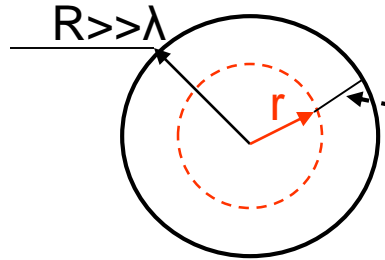
Поскольку на поддержание сверхтока энергия не тратится, распределение тока в сверхпроводящих цепях обратно пропорционально полной индуктивности участков (геометрической + кинетической).



Кинетическая индуктивность сверхпроводящих структур

Сверхпроводящий провод с радиусом $R \gg \lambda$.

(и длиной l)



$$x = R - r \quad j_s = j_{s0} e^{-x/\lambda}$$

$$L_k = \Lambda \int (j_s^2 / I^2) \quad (3.2)$$

Полный ток: $I = \int j_s dS = 2\pi R \int j_s dx = 2\pi R j_{s0} \lambda$

$$L_k = [\mu_0 \lambda^2 j_{s0}^2 / (2\pi R j_{s0} \lambda)^2] \int e^{-2x/\lambda} 2\pi R l dx = \mu_0 \lambda l / (4\pi R) \quad (3.4)$$

dV элемент объема

Кинетическая индуктивность толстой сверхпроводящей пластины $l \times l$

$$L_k^\square = \mu_0 \lambda^2 \int (j_s^2 / I^2) dV = [\mu_0 \lambda^2 j_{s0}^2 / (l j_{s0} \lambda)^2] \int e^{-2x/\lambda} l^2 dx = \mu_0 \lambda / 2 ; \quad (3.5)$$

Геометрическая индуктивность пластины (ее часть, связанная с энергией поля внутри сверхпроводника):

$$L^\square = (1/\mu_0) \int (B^2 / I^2) dV = (1/\mu_0) [B_I^2 / (B_I l / \mu_0)^2] \int e^{-2x/\lambda} l^2 dx = \mu_0 \lambda / 2 ; \quad (3.6)$$

использовано: $B = B_I e^{-x/\lambda}$ и выражение для тока в **единичной** полосе **в расчете на одну поверхность**: $2I_{e\partial} = 2B_I / \mu_0$, т.е. $I_{e\partial} = B_I / \mu_0$ (см (2.11))

$$L_{\text{полн}}^\square = L^\square + L_k^\square = \mu_0 \lambda \quad (3.7)$$

Для типичной $\lambda \cong 40$ нм $L_{\text{полн}}^\square \cong 10^{-14}$ Гн.

Кинетическая индуктивность тонких сверхпроводящих пленок

Сверхпроводящая пленка с $d \ll \lambda$:

$$L_{\text{к}}^{\square} = \mu_0 \lambda^2 \int (j_s^2 / I^2) I^2 dx = \mu_0 \lambda^2 / d \quad (3.8) \quad \text{т.к. } j_s = \text{const} = I/(dl).$$

d-толщина пленки

С уменьшением толщины кинетическая индуктивность повышается.

Для типичной $\lambda \cong 40$ нм и толщины $d=10$ нм: $L_{\text{к}}^{\square} \cong 10^{-13}$ Гн.

Эффективная глубина проникновения $\lambda_{\text{eff}} = \lambda^2 / d$ (3.9)

Индуктивность толстой сверхпроводящей пленки над сверхпроводящим экраном.

Сверхпроводящая пластина с током I расположена на расстоянии b над полубесконечным сверхпроводящим экраном

Поле $B_0 = 2B_I = \mu_0 I$ "заперто" в "магнитном" зазоре $t_M = \lambda_1 + b + \lambda_2$, сверхток течет по внутренней поверхности пленки.

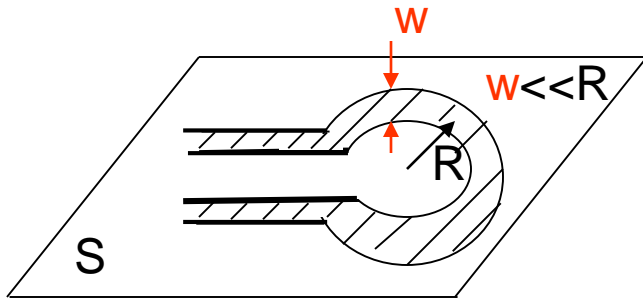
Индуктивность пленки и экрана на квадрат = $\mu_0 \lambda_1 + \mu_0 \lambda_2$

Индуктивность, связанная с полем в помере b :

$$L^{\square} = (1/\mu_0) [(2 B_I)^2 / (I/w)^2] w^2 b = \mu_0 b.$$

Полная индуктивность на квадрат: $L_{\text{total}}^{\square} = \mu_0 (\lambda_1 + \lambda_2 + b)$ (3.10)

Индуктивность сверхпроводящей петли над сверхпроводящим экраном



уменьшение индуктивности, возникающее при размещении сверхпроводящего элемента (петли) над сверхпроводящей экранирующей плоскостью ("ground plane")

Индуктивность такой петли в норм состоянии (из справочника):

$$L_n = R\mu_0 [\ln(16 R/w) - 2] \quad (3.11)$$

Если сверхпроводящая петля расположена над сверхпроводящей экранирующей плоскостью, ее индуктивность равна:

$$L_s = (2\pi R/w) \mu_0 (\lambda_1 + \lambda_2 + b); \quad (2\pi R/w - \text{число квадратов}) \quad (3.12)$$

Оценки по формулам ур.(2.11 и 2.12) дают для

$\lambda \cong 40$ нм, $R=100$ мкм, $w = 10$ мкм и $b=200$ нм :

$$L_n \cong 4 \cdot 10^{-10} \text{ Гн}, \quad L_s \cong 2 \cdot 10^{-11} \text{ Гн},$$

т.е. индуктивность упала в 20 раз !

Модель Друде электропроводности нормальных металлов

Теория металлов Друде (1900 г.) – теория свободных электронов в кристаллической решетке металла.

Нет взаимодействия электронов между собой.

Время свободного пробега τ между столкновениями с решеткой - мгновенное случайное изменение скорости.

В нормальном металле в стационарном случае:

$$e\mathbf{E} = m d\mathbf{v}_n/dt = m \langle \mathbf{v}_n \rangle / \tau \quad (e\mathbf{E} - m \langle \mathbf{v}_n \rangle / \tau = 0)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}; \quad \mathbf{j} = en \langle \mathbf{v}_n \rangle = (e^2 n \tau / m) \mathbf{E}; \quad \boxed{\sigma = e^2 n \tau / m} \quad (3.13)$$

В нестационарном случае нормальные электроны будут ускоряться:

$$m d \langle \mathbf{v}_n \rangle / dt = e\mathbf{E} - m \langle \mathbf{v}_n \rangle / \tau \quad \text{или} \quad [m / (n_n e)] dj_n / dt = e\mathbf{E} - [m / (n_n e)] \mathbf{j}_n / \tau \quad (3.14)$$

В этом случае ток определяется комплексной проводимостью σ :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}; \quad \sigma = \sigma_1 - i\sigma_2 \quad (3.15)$$

Комплексная проводимость сверхпроводников

В случае переменного сигнала сверхток меняет знак, сверхпроводящие электроны замедляются и ускоряются, что возможно только, если в сверхпроводнике появляется электрическое поле E . Поле E приводит в этом случае в движение и нормальную (диссипативную) компоненту!

Полный ток в сверхпроводнике (сумма нормального и сверхпроводящего тока) определяется комплексной проводимостью σ :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (a); \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n \quad (b); \quad \sigma = \sigma_1 - i\sigma_2 \quad (c); \quad (3.15a)$$

В нестационарном случае нормальные электроны будут ускоряться и в сверхпроводнике в соответствии с (3.14):

$$[m/(n_n e)] dj_n/dt = e\mathbf{E} - [m/(n_n e)] \mathbf{j}_n/\tau \quad (3.14a)$$

Выразим поле E , введя в выражение формально $\Lambda = m/(e^2 n_s)$:

$$\mathbf{E} = \Lambda(n_s/n_n) dj_n/dt + \Lambda(n_s/n_n) \mathbf{j}_n/\tau \quad (3.16)$$

Комплексная проводимость сверхпроводника (II).

Пусть электромагнитное поле в сверхпроводнике, а вслед за ним и токи меняются с частотой ω по закону: $\mathbf{E}, \mathbf{j}_s, \mathbf{j}_n \sim e^{i\omega t}$

Тогда из ур.(L I) $\Lambda dj_s/dt = \mathbf{E}$ дифференцированием получим $\mathbf{j}_s = -i(1/\Lambda\omega)\mathbf{E}$

Аналогично из ур.(3.16): $\mathbf{E} = \Lambda(n_s/n_n)(1/\tau)(i\omega\tau + 1)\mathbf{j}_n$ или

$$\mathbf{j}_n = (n_n\tau/n_s\Lambda)\{(1-i\omega\tau)/[1+(\omega\tau)^2]\}\mathbf{E}, \text{ поскольку } 1/(1+i\omega\tau) = (1-i\omega\tau)/[1+(\omega\tau)^2]$$

Полный ток в сверхпроводнике:

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n = [-i(1/\Lambda\omega) + (n_n\tau/n_s\Lambda)\{(1-i\omega\tau)/[1+(\omega\tau)^2]\}]\mathbf{E} \quad (3.17)$$

Выделяя действительную и мнимую часть из $\sigma = \sigma_1 - i\sigma_2$, получим для действительной части проводимости:

$$\sigma_1 = (n_n\tau/n_s\Lambda)/[1+(\omega\tau)^2] = (n_n e^2 \tau / m) / [1+(\omega\tau)^2] \quad (3.18)$$

$$\Lambda = m / (e^2 n_s)$$

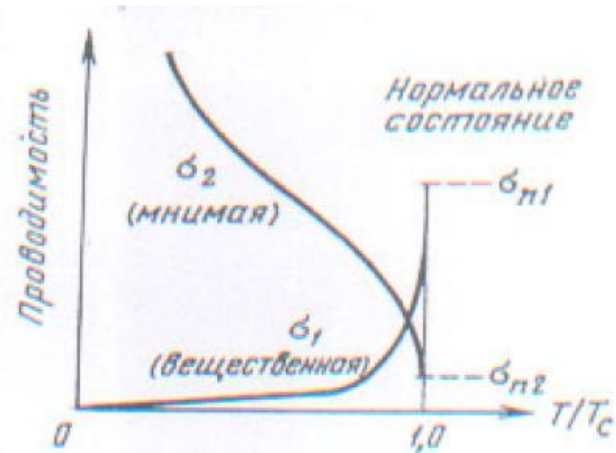
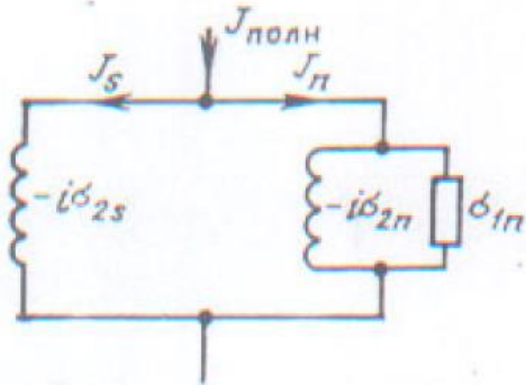
Действительная часть проводимости определяется исключительно нормальными электронами !!!

Мнимая часть проводимости определяется как нормальными, так и сверхпроводящими электронами, поскольку и те, и другие вносят вклад в индуктивные высокочастотные свойства сверхпроводников:

$$-\sigma_2 = (1/\Lambda\omega)\{1 + (n_n/n_s)(\omega\tau)^2/[1+(\omega\tau)^2]\} \text{ или} \quad (3.19)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{2s} + \sigma_{2n} = n_s e^2 / (m\omega) + n_n e^2 (\omega\tau)^2 / [m\omega(1+(\omega\tau)^2)] \quad (3.19a)$$

Комплексная проводимость сверхпроводника (III).



$$\sigma_{2s} = n_s e^2 / (m\omega) \quad (3.20 \text{ a})$$

$$\sigma_{1n} = (n_n e^2 \tau / m) / [1 + (\omega\tau)^2] \quad (3.20 \text{ b})$$

$$\sigma_{2n} = n_n e^2 (\omega\tau)^2 / [m\omega(1 + (\omega\tau)^2)] \quad (3.20 \text{ c})$$

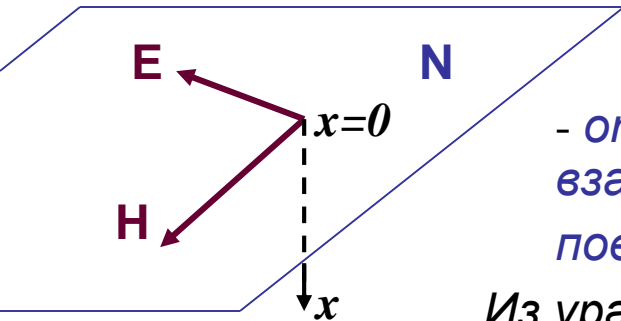
При $n_n(\omega\tau)^2 \ll 1$ и $\omega\tau \ll 1$ величина σ_{2n} мала

$$n_s \rightarrow 0, \quad \sigma_{2s} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_c$$

$$n_n \rightarrow n, \quad T \rightarrow T_c \text{ (норм. пров.)}$$

При $T \rightarrow T_c$ действительная и мнимая части проводимости выходят на соответствующие характеристики нормального металла.

Глубина проникновения электромагнитной волны в металл. Скин-эффект.



Дано: - поверхность металла (полупространство):
 - отношение E/H в электромагнитной волне, взаимодействующей с металлом, однородно вдоль поверхности ($x=0$).

Из уравнений Максвелла, связывающих E и H :

$$\text{rot } \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}; \quad (\text{a}) \quad \text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t = -\mu_0 \partial \mathbf{H} / \partial t; \quad (\text{b}) \quad (3.21)$$

$$\text{rot } \text{rot } \mathbf{H} = \text{grad } \overset{=0}{\text{div}} \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H}; \quad \boxed{\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \mu_0 \partial \mathbf{H} / \partial t}; \quad (3.22)$$

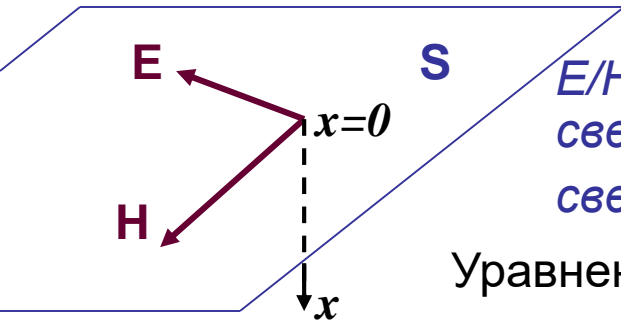
Волна $\mathbf{H} \sim e^{-i(kx - \omega t)}$ затухает вглубь металла (вдоль x).

Из дифференцирования ур. (3.22):

$$\kappa^2 = -i \sigma \mu_0 \omega = -2i/\delta^2, \quad \text{где } \delta = (2/\sigma \mu_0 \omega)^{1/2} - \text{ (по определению, пока) комплексная скин-глубина} \quad (3.23)$$

или $\boxed{\kappa = (1-i)/\delta}$ (3.24), поскольку $-2i = 1 - 2i + i^2 = (1-i)^2$

Глубина проникновения электромагнитной волны (скин-эффект) в сверхпроводнике.



поверхность сверхпроводящего полупространства: E/H в электромагнитной волне, взаимодействующей со сверхпроводником, однородно вдоль поверхности сверхпроводника ($x=0$).

Уравнения (3.22, Максвелла) пригодны и для сверхпроводника

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \mu_0 \partial \mathbf{H} / \partial t; \quad (3.22)$$

Волна $\mathbf{H} \sim e^{-i(kx - \omega t)}$ затухает вглубь сверхпроводника: $\kappa^2 = -i \sigma \mu_0 \omega = -2i/\delta^2$,

или $\kappa = (1-i)/\delta$ (3.24), где $\delta = (2/\sigma \mu_0 \omega)^{1/2}$ – **комплексная скин-глубина** (3.23)

Используем ур-я (3.22-3.24), чтобы выразить скин-глубину для сверхпроводника.

Для T не слишком близких к T_c , не слишком высоких частот и не слишком чистого (лондоновского) сверхпроводника: $n_n \omega \tau / n_s \ll 1$ и $\omega \tau \ll 1$.

В этом приближении из (3.17): $\sigma \cong n_n \tau / (n_s \Lambda) - i / (\Lambda \omega)$ (3.25) или $1/\sigma = \mu_0 \lambda^2 \omega / [(n_n/n_s) \omega \tau - i]$ (3.25a)

Из (3.23): $\delta = \sqrt{2} \lambda / [(n_n/n_s) \omega \tau - i]^{1/2} \cong \sqrt{2/(-i)} \lambda = \lambda(1+i)$, т.к. $1/\sqrt{-i} = \sqrt{i} / (\sqrt{-i} \sqrt{i}) = \sqrt{i}$ и $\sqrt{2i} = \sqrt{(1+i)^2}$.

Из (3.24): $\kappa = (1/\lambda)(1-i)/(1+i) = (1/\lambda)(1-i)^2/2 = -i/\lambda$ (3.26), т.е. затухание $\mathbf{H} \sim e^{-x/\lambda}$

λ -скин-глубина! При сверхвысоких частотах (ГГц) скин-глубина может быть $< \lambda$!

Поверхностный импеданс сверхпроводников

в расчете на квадрат поверхности сверхпроводника

Опять \mathbf{E} и \mathbf{H} вектора эл-маг поля параллельны поверхности полупространства.

Поверхностное полное сопротивление: $Z = -\mathbf{E}/\mathbf{H} = \mathbf{E}/\mathbf{j}_{\text{пов}}$, (3.27)

где $\mathbf{j}_{\text{пов}}$ –поверхност. плотность токов, возникающих в скин-слое **сверхпроводника**.

Покажем: $\mathbf{E}/\mathbf{H} = -\mathbf{E}/\mathbf{j}_{\text{пов}}$: \mathbf{H} -вдоль оси z , \mathbf{E} - вдоль y , тогда $j_y = dH_z/dx = -H(x)/\lambda$ (т.к. $H(x) = H e^{-x/\lambda}$). Поверхностная плотность тока - это ток вдоль y в полосе единичной ширины u во всем поверхностном слое: $\mathbf{j}_{\text{пов}} \cong \mathbf{j}_y(0) \lambda = -\mathbf{H}(0)$

Подставляя в ур. Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}$ магнитное и электрическое поле в виде

$\mathbf{H}, \mathbf{E} \sim e^{-i(kx - \omega t)}$: $-ik\mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}$ (3.28) или $Z = ik/\sigma = i(1-i)/(\delta\sigma) = (1+i)/(\delta\sigma) = -\sqrt{2}i/(\delta\sigma)$, (3.29)

т.к. $\kappa = (1-i)/\delta$ (см(3.24)). Подставив $\delta = (2/\sigma \mu_0 \omega)^{1/2}$ из (3.23) получим $Z = (i\omega\mu_0/\sigma)^{1/2}$ (3.29a)

Ур.(3.29) одинаково **пригодно для хорошего металла и сверхпроводника**.

Подставляя $1/\sigma$ из ур.(3.25a) найдем поверхностный импеданс сверхпроводника (в расчете на квадрат поверхности): $Z = i\omega\mu_0\lambda [1 + i(n_n/n_s)\omega\tau]^{-1/2}$

или, используя биномиальное разложение $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dots$, получим:
 $Z \cong i\omega\mu_0\lambda [1 - (1/2)i(n_n/n_s)\omega\tau] = \omega^2\tau\mu_0\lambda(n_n/2n_s) + i\omega\mu_0\lambda = R_{\square} + iX_{\square}$, (3.30)

где **активная часть поверхностного импеданса** (в расчете на квадрат):

$$R_{\square} = \omega^2\tau\mu_0\lambda(n_n/2n_s) = \omega^2\mu_0^2\lambda^3 n_n \sigma_n / 2n \quad (3.30a)$$

где n -полная плотность электронов, $\sigma_n = ne^2\tau/m$ (см (3.13))- проводимость металла в нормальном состоянии, $n_s = (m/e^2)/(\mu_0\lambda^2)$, т.к. $\lambda^2 = m/(\mu_0 n_s e^2)$

Реактивная (индуктивная) часть поверхностного сопротивления:

$$X_{\square} = \omega\mu_0\lambda = \omega L_{\text{полн}}^{\square}, \quad (3.30b)$$

где $L_{\text{полн}}^{\square} = L^{\square} + L_k^{\square} = \mu_0\lambda$. При $T \rightarrow T_c$ $n_s \rightarrow 0$, $n_n \rightarrow n$, $\sigma \rightarrow \sigma_n = ne^2\tau/m$

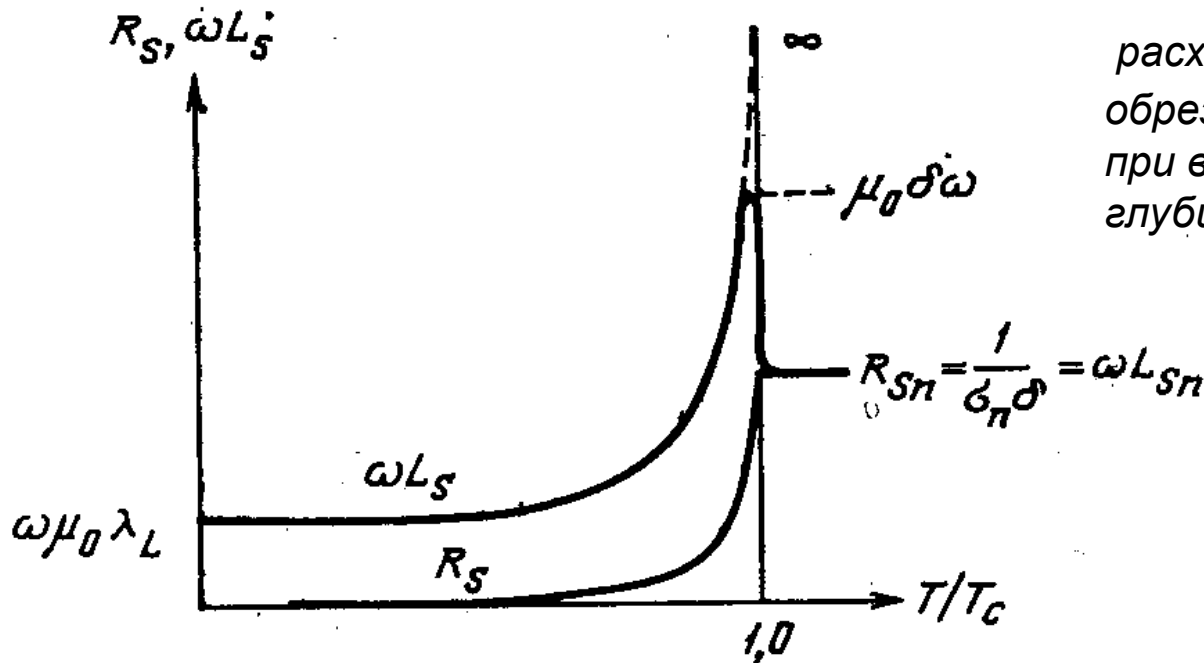
Тогда из (3.29): $Z = (1+i)/(\delta_n \sigma_n)$, где δ_n и σ_n - действительные, т.е. действительная и мнимая части Z совпадают (и не имеют температурной зависимости выше T_c)

Поверхностный импеданс сверхпроводников II

Температурное поведение R_{\square} и X_{\square}

$$\lambda(T) \rightarrow \infty \quad \text{при } T \rightarrow T_c$$

расходимость $X_{\square}(T) = \omega\mu_0\lambda(T)$ обрывается при $\lambda(T) = \delta_n$, т.е. при выходе на нормальную скин-глубину.



Дальнейшее падение $X_{\square}(T)$ связано с исчезновением вклада, обязанного реактивным токам сверхпроводящих пар:

$$\text{при } T \rightarrow T_c \quad L_k^{\square} \rightarrow 0, \quad L_{\text{полн}}^{\square} = (L^{\square} + L_k^{\square}) \rightarrow L^{\square}.$$