УДК 532.5.032

О. С. Коцур

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

О существовании локальных способов вычисления скорости переноса вихревых трубок с сохранением их интенсивности

Рассматривается вопрос о способах вычисления скорости Фридмана — векторного поля, описывающего такой перенос вихревых трубок в течении вязкой жидкости, при котором трубки сохраняют свою интенсивность. Известно, что скорость Фридмана существует для всякого элементарного вихревого фрагмента, и притом она не единственная. Для нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости с ненулевым скалярным произведением завихренности и ее ротора оставался открытым вопрос о существовании таких скоростей Фридмана (локальных), параметры которых зависели бы только от компонент скорости и их производных в рассматриваемой точке. Ответ на этот вопрос важен для стратегии развития численных алгоритмов расчета вязких несжимаемых течений с помощью вихревых методов. На примере цилиндрических течений показано, что существуют такие нестационарные течения с ненулевым скалярным произведением завихренности и ее ротора, в которых локальная скорость Фридмана существует, а также такие течения, в которых возможны только нелокальные способы вычисления скорости Фридмана.

Ключевые слова: перенос завихренности, скорость Фридмана, диффузионная скорость, вихревые методы.

O. S. Kotsur

Bauman Moscow State Technical University

On the existence of local formulae of the transfer velocity of local tubes that conserve their strengths

In the paper we discuss different approaches to express Fridman velocity, which is the transfer velocity of vortex tubes that conserves their strengths in a viscous fluid. It is known that Fridman velocity exists for any elementary vortex fragment, though it is not unique. The existence of such expressions (which we call local) of Fridman velocities depending only on the velocity components and their derivatives, has been an open question for nonstationary incompressible flows where the scalar product of vorticity and its curl is nonzero. This question is of importance for the development of numerical vortex methods. In this paper, in terms of the examples of cylindrical flows, we demonstrate the existence of flows with nonzero scalar product of vorticity and its curl, which have local Fridman velocity; as well as the existence of the flows where only nonlocal Fridman velocity is possible.

Key words: vorticity transfer, Fridman velocity, diffusion velocity, vortex methods.

1. Введение

Согласно теоремам Гельмгольца [1] в идеальной баротропной жидкости вихревые трубки перемещаются вместе с несущими их материальными частицами и при этом сохраняют свою интенсивность. Это фундаментальное свойство позволяет построить ряд лагранжевых методов вычислительной гидродинамики, называемых *вихревыми методами*, для моделирования течений идеальной несжимаемой жидкости. Суть данных методов состоит в аппроксимации поля завихренности с помощью элементарных вихревых объектов: вихревых линий (трубок), отрезков, точек или сгустков [2]. Справедливость теорем Гельмгольца для идеальной несжимаемой жидкости позволяет на одном временном шаге переносить упомянутые вихревые объекты по полю скорости течения $\mathbf{V}$ с сохранением их интенсивности, а на следующем временном шаге — восстановить поле скорости. После этого процесс повторяется.

С точки зрения возможности использования вихревых методов для моделирования вязких течений (для которых теоремы Гельмгольца не выполняются) возникают два важных вопроса:

1) Можно ли для всякого вязкого течения подобрать такое векторное поле $\mathbf{U}$ (которое можно рассматривать как поле скорости некоторой воображаемой сплошной среды), двигаясь по которому, вихревые трубки оставались бы вихревыми трубками и сохраняли свою интенсивность?

2) Существуют ли практические способы поиска такого поля?

Согласно теореме Фридмана [3], такая скорость $\mathbf{U}$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{\Omega} - (\mathbf{\Omega}\cdot\nabla)\mathbf{U} + \mathbf{\Omega}\nabla\cdot\mathbf{U} = 0 \tag{1}$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + \nabla\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{U}) = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{\Omega} = \nabla\times\mathbf{V}$ — поле завихренности, $\mathbf{V}$ — поле скорости течения.

Вслед за [4] будем называть $\mathbf{U}$ *скоростью Фридмана*[1]. Для невязких несжимаемых течений справедливо уравнение Гельмгольца, которое можно получить из (1) путем замены $\mathbf{U}$ на $\mathbf{V}$. В данном случае видно, что само поле скорости невязкой жидкости $\mathbf{V}$ является примером скорости Фридмана.

В работе [5] дан положительный ответ на вопрос о существовании скорости $\mathbf{U}$ для элементарного вихревого фрагмента, который представляет собой конечный участок пространственной вихревой трубки с ненулевой завихренностью. Более того, в этой же работе доказано, что скоростей Фридмана существует бесконечно много, но для вязкой несжимаемой жидкости все они имеют следующий вид:

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{\mathbf{\Omega}\times(-\nu\nabla\times\mathbf{\Omega} - \nabla f + \nabla W)}{\mathbf{\Omega}^2} + \gamma\mathbf{\Omega}, \tag{3}$$

где W — какое-либо скалярное поле, постоянное вдоль вихревых линий, γ — произвольное скалярное поле, а f — некоторая скалярная функция, которая удовлетворяет условию

$$\mathbf{\Omega}\cdot\nabla f = -\nu S, \tag{4}$$

где

$$S = \mathbf{\Omega}\cdot(\nabla\times\mathbf{\Omega})$$

[1]Предложенное в [5] название *скорость переноса завихренности*, как отмечено в [4], представляется неудачным, поскольку последнее понятие соответствует векторному полю $\mathbf{U}_T$, если оно существует и удовлетворяет уравнению переноса

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{U}_T\cdot\nabla)\mathbf{\Omega} = 0,$$

которое в общем случае не эквивалентно уравнению (2). Также следует отличать скорость Фридмана от *скорости распространения завихренности*, которая обозначает для вязкопластичных жидкостей скорость перемещения фронта завихренности — поверхности раздела между вихревой и безвихревой зонами течений [6].

назовем *спиральностью поля завихренности* (термин предлагается впервые) по аналогии с понятием спиральности поля скорости [7], определяемого как скалярное произведение скорости на ее ротор.

Таким образом, вопрос о существовании скорости Фридмана $\mathbf{U}$ для области течения связывается с вопросом о существовании такого потенциала f, который удовлетворял бы условию (4). Авторы [5] делают вывод о том, что такая функция f существует для **любого** элементарного вихревого фрагмента и может быть получена интегрированием уравнения (4) вдоль вихревых линий.

При этом ясно, что в случае $S \equiv 0$, что соответствует, например, любому плоскопараллельному или осесимметричному течению несжимаемой жидкости без закрутки [8, 9], в качестве f, W и γ в (3) можно выбрать тождественные нули. В этом случае скорость Фридмана принимает вид

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \mathbf{W}_d, \tag{5}$$

где скорость

$$\mathbf{W}_d = -\nu \frac{\mathbf{\Omega} \times (\nabla \times \mathbf{\Omega})}{\mathbf{\Omega}^2} \tag{6}$$

была названа *диффузионной скоростью* [10] как добавка к основной скорости течения, описывающая перенос завихренности, связанный с вязкой диффузией. Следует заметить, что хотя обе формулы, полученные в работах [8, 9], могут быть представлены одной общей формулой (6) и формально являются следствием (3), исторически первой диффузионная скорость была получена в [8], а формулы (6) и (3) представляют собой соответственно ее развитие и обобщение. Диффузионная скорость является основой вихревых методов для расчета плоскопараллельных вязких несжимаемых течений (например, метод вязких вихревых доменов, ВВД [11], метод диффузионной скорости, DVM [12]).

В более общем случае, когда $S \neq 0$, в выражении для скорости Фридмана необходимо учитывать поправку $\mathbf{W}_s$:

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \mathbf{W}_d + \mathbf{W}_s,$$

где

$$\mathbf{W}_s = \frac{\mathbf{\Omega} \times (-\nabla f + \nabla W)}{\mathbf{\Omega}^2} + \gamma \mathbf{\Omega}. \tag{7}$$

Диффузионная скорость в этом случае определяется суммой $\mathbf{W}_d + \mathbf{W}_s$.

Второй поставленный вопрос о возможности практического поиска скорости Фридмана тесно связан с вопросом о существовании локального способа вычисления этой скорости для рассматриваемого течения. Под локальностью понимается такой способ, при котором скорость Фридмана в заданной точке вычисляется через параметры течения в сколь угодно малой окрестности этой точки (через параметры течения и их пространственные и временные производные в этой точке) [5]. Наличие течений, для которых локальных способов вычисления скорости Фридмана не существует, вносит существенную сложность в разработку численных алгоритмов, основанных на перемещении вихревых объектов, как это реализовано в плоском случае в методе ВВД.

Известно, что скорость Фридмана всегда имеет локальную формулу как минимум для двух типов трехмерных вихревых течений: стационарных (в этом случае в качестве $\mathbf{U}$ всегда можно выбрать тождественный ноль) и нестационарных течений с нулевой спиральностью S. Для последних скорость Фридмана получается по формулам (5) и (6), которые, очевидно, являются локальными.

Как будет показано далее, в классе несжимаемых течений с ненулевой спиральностью S существуют как течения, для которых не существует локального способа вычисления скорости $\mathbf{U}$, так и течения, для которых такой способ существует.

2. Пример построения скорости Фридмана для цилиндрических течений с закруткой

Рассмотрим закрученное цилиндрическое завихренное течение, в котором осевая составляющая завихренности всюду отлична от нуля. В таком течении поле скорости $\mathbf{V}$ зависит только от расстояния r от оси симметрии и от времени t и при разложении по ортам цилиндрической системы координат $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ представляется следующим образом:

$$\mathbf{V}(r,t) = V_r(r,t)\mathbf{e}_r + V_\varphi(r,t)\mathbf{e}_\varphi + V_z(r,t)\mathbf{e}_z.$$

Для цилиндрического течения поле завихренности $\mathbf{\Omega}(r,t)$ имеет нулевую радиальную компоненту ω_r:

$$\mathbf{\Omega}(r,t) = \omega_\varphi(r,t)\mathbf{e}_\varphi + \omega_z(r,t)\mathbf{e}_z, \quad \omega_z \neq 0.$$

Существование скорости Фридмана эквивалентно разрешимости уравнения (4) относительно функции f. Данное условие (для односвязной области, каковой является фрагмент вихревой трубки) равносильно существованию поля $\mathbf{\Phi}$, удовлетворяющего условиям

$$\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Phi} = -\nu S, \tag{8}$$

$$\nabla \times \mathbf{\Phi} = 0. \tag{9}$$

Несмотря на то, что $\mathbf{\Omega}$ и правая часть (8) являются функциями (r,t), поле $\mathbf{\Phi}$ в общем случае может зависеть еще и от z, удовлетворяя при этом условию (8). Одну из таких функций $\mathbf{\Phi}_0$ можно построить, например, как градиент скалярного поля f_0:

$$f_0(r,z,t) = -\nu \frac{S}{\omega_z} z, \tag{10}$$

для которой компоненты поля $\mathbf{\Phi}_0 = \nabla f_0$ имеют вид

$$\Phi_{0r} = -\nu z \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{S}{\Omega_z}\right), \quad \Phi_{0\varphi} = 0, \quad \Phi_{0z} = -\nu \frac{S}{\omega_z}. \tag{11}$$

Для такого поля условие (9) выполняется автоматически, а условие (8) проверяется путем прямой подстановки. Далее, подставляя $\mathbf{\Phi}_0$ вместо ∇f в (3) (приняв $W = \gamma = 0$), можно получить искомую скорость $\mathbf{U}$. Поскольку по условию выше $\omega_z \neq 0$, то функции f_0, $\mathbf{\Phi}_0$ и $\mathbf{U}$ определены.

Рассмотрим предложенную функцию f_0 (10) и соответствующую ей скорость Фридмана $\mathbf{U}$ с точки зрения локальности. Для цилиндрического течения в окрестности любой точки с одним и тем же значением r поля параметров течения совпадают. Поэтому если $\mathbf{U}$ локальна, то она может зависеть только от r и t:

$$U_r = U_r(r,t), \quad U_\varphi = U_\varphi(r,t), \quad U_z = U_z(r,t). \tag{12}$$

Если производная $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{S}{\Omega_z}\right)$ не равна нулю, то в построенной выше функции $\mathbf{\Phi}_0$ присутствует зависимость от z, что явно переносится и в формулу (3) для вычисления $\mathbf{U}$. Ясно, что скорость Фридмана, определенная таким способом, оказывается нелокальной, поскольку ее значение в какой-либо точке зависит от выбора начала отсчета по координате z. В этом нет противоречия, поскольку скоростей Фридмана существует бесконечно много и каждому выбранному началу отсчета можно поставить в соответствие поле $\mathbf{U}$, построенное предложенным способом и удовлетворяющее при этом теореме Фридмана (2). Более того, как будет показано в примере раздела 5, эта скорость оказывается неограниченной по z.

3. Достаточное условие существования локальной скорости Фридмана для цилиндрического течения

На основании предположения о локальности поля $\mathbf{\Phi}$ получим достаточное условие существования локальной скорости Фридмана для цилиндрического течения. Этот результат будет использован в разделе 4 при построении примера цилиндрического течения с локальной скоростью $\mathbf{U}$.

Локальность поля $\mathbf{\Phi}$ означает, что $\mathbf{\Phi}$ может являться функцией только от (r, t):

$$\mathbf{\Phi}(r,t) = \Phi_r(r,t)\mathbf{e}_r + \Phi_\varphi(r,t)\mathbf{e}_\varphi + \Phi_z(r,t)\mathbf{e}_z.$$

В цилиндрических координатах

$$\nabla \times \mathbf{\Phi} = \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial \Phi_z}{\partial \varphi} - r\frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial z}\Big)\mathbf{e}_r + \Big(\frac{\partial \Phi_r}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial r}\Big)\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial (r\Phi_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_r}{\partial \varphi}\Big)\mathbf{e}_z =$$
$$= -\frac{\partial \Phi_z}{\partial r}\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\Phi_\varphi)}{\partial r}\mathbf{e}_z.$$

Из условия (9) следует, что

$$\Phi_z(r,t) = C_z(t),$$
$$\Phi_\varphi(r,t) = \frac{C_\varphi(t)}{r}, \tag{13}$$

где $C_z(t)$ и $C_\varphi(t)$ — некоторые функции времени. Подставляя выражения для $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{\Phi}$ в (8) с учетом полученных выше условий и опуская зависимость от t, получим

$$\omega_\varphi(r)\frac{C_\varphi}{r} + \omega_z(r)C_z = -\nu\Big[-\omega_\varphi(r)\frac{\partial \omega_z(r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\omega_z(r)\frac{\partial (r\omega_\varphi(r))}{\partial r}\Big]. \tag{14}$$

В итоге для разрешимости (8) (а значит, и для существования локального поля $\mathbf{\Phi}$) достаточно существования таких двух функций времени C_φ и C_z, при которых выражение (14) обращается в тождество (вопрос необходимости условия (14) в данной работе не рассматривается).

Приведем пример течения, для которого условие (14) разрешимо, что подтвердит наличие для такого течения локальной скорости Фридмана.

4. Пример цилиндрического течения, для которого существует локальная скорость Фридмана

Рассмотрим цилиндрическое нестационарное вязкое течение, являющееся суперпозицией некоторого нестационарного окружного течения ($V_r = 0, V_z = 0$) и некоторого стационарного осевого течения ($V_r = 0, V_\varphi = 0$). В работе [13] показано, что суперпозиция полей скорости и давления для таких двух течений всегда является решением уравнения Навье–Стокса и, следовательно, описывает некоторое цилиндрическое течение.

В качестве нестационарного окружного выберем течение, описываемое полем окружной скорости V_φ и полем давления $\hat{p}$:

$$V_\varphi(r,t) = rt + \frac{r^3}{8\nu}, \quad \hat{p}(r,t) = \hat{p}_0(t) + \frac{r^2t^2}{2} + \frac{r^6}{384\nu^2} + \frac{r^4 t}{16\nu},$$

где $\hat{p}_0(t)$ — любая функция времени.

В качестве стационарного осевого течения выберем известное течение Пуазейля в трубе радиусом R с параболическим профилем осевой скорости [14] и полем давления:

$$V_z(r) = 2V\Big(1 - \frac{r^2}{R^2}\Big), \quad \bar{p}(z) = zA, \quad A = -\frac{8V\nu}{R^2}, \tag{15}$$

где V – средняя скорость течения ($V > 0$).

Тогда итоговое течение с полями скорости и давления

$$\mathbf{V}(r,t) = V_\varphi(r,t)\mathbf{e}_\varphi + V_z(r,t)\mathbf{e}_z, \quad p(r,z,t) = \hat{p}(r,t) + zA$$

также остается цилиндрическим, а его параметры, согласно [13], удовлетворяют уравнениям Навье–Стокса (в чем также можно убедиться прямой подстановкой).

Поле завихренности итогового течения имеет вид

$$\omega_r = 0, \quad \omega_\varphi = \frac{4Vr}{R^2}, \quad \omega_z = 2t + \frac{r^2}{2\nu}.$$

Спиральность завихренности $S = \frac{16Vt}{R^2}$ не равна нулю при $t, V \neq 0$.

Покажем, что для такого течения существует локальное выражение для скорости Фридмана. Воспользуемся для этого результатами предыдущего раздела, а именно условием (14), в которое подставим ω_φ, ω_z и S для рассматриваемого течения:

$$\frac{4rV}{R^2}\frac{C_\varphi}{r} + \left(2t + \frac{r^2}{2\nu}\right)C_z = -\frac{16\nu Vt}{R^2}.$$

Данное условие можно удовлетворить выбором $C_z = 0$ и $C_\varphi = -4\nu t$, что подтверждает существование локальной скорости Фридмана, зависящей только от r и t. Ее явный вид легко получить подстановкой полученной функции C_φ в (13) и затем в выражение (7).

5. Пример цилиндрического течения, для которого не существует локальной скорости Фридмана

Аналогично предыдущему разделу, сконструируем цилиндрическое течение как сумму осевого течения V_z, выбранного как в предыдущем примере (течение Пуазейля), и окружного течения V_φ, являющегося решением задачи о диффузии в вязкой жидкости бесконечного прямолинейного концентрированного вихря с циркуляцией Γ:

$$V_\varphi(r,t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left[1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right], \quad \hat{p}(r,t) = \hat{p}_0(t) + \int \frac{V_\varphi^2(r,t)}{r}dr,$$

где $\hat{p}_0(t)$ – любая функция времени, а неопределенный интеграл выражается в специальных функциях и, ввиду громоздкости, не приводится.

Итоговое течение с полями скорости и давления

$$\mathbf{V}(r,t) = V_\varphi(r,t)\mathbf{e}_\varphi + V_z(r,t)\mathbf{e}_z, \quad p(r,z,t) = \hat{p}(r,t) + zA,$$

где V_z и A определяются формулами (15), также остается цилиндрическим, а его параметры, согласно [13], удовлетворяют уравнениям Навье–Стокса (в чем также можно убедиться прямой подстановкой).

Поле завихренности итогового течения

$$\omega_r = 0, \quad \omega_\varphi = \frac{4Vr}{R^2}, \quad \omega_z = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t}e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \tag{16}$$

Сконструируем с помощью полей f_0 (10) и $\mathbf{\Phi}_0$ (11) скорость Фридмана для такого течения. Спиральность завихренности S для данного течения нигде не обращается в 0 при $r, t \neq 0$.

Подставляя (16) в (10) и (11), можно убедиться, что скорость $\mathbf{W}_d$ имеет только один ненулевой компонент W_{dr}, который является функцией только координаты r и времени t:

$$W_{dr} = W_{dr}(r,t), \quad W_{d\varphi} = 0, \quad W_{dz} = 0,$$

в то время как компоненты поправки $\mathbf{W}_s$ оказываются линейно зависимыми от координаты z (что демонстрирует нелокальность и, более того, неограниченность скорости Фридмана с ростом z):

$$W_{sr} = g_0(r,t), \quad W_{s\varphi} = g_1(r,t)z, \quad W_{sz} = g_2(r,t)z, \tag{17}$$

где

$$g_0(r,t) = \frac{8rV^2(r^2+4t\nu)}{16r^2tV^2 + \frac{R^4\Gamma^2}{16\pi^2 t\nu^2}e^{-\frac{r^2}{2t\nu}}},$$

$$g_1(r,t) = -\frac{\Gamma R^2 V r}{\pi t\Big(16r^2tV^2 + \frac{R^4\Gamma^2}{16\pi^2 t\nu^2}e^{-\frac{r^2}{2t\nu}}\Big)},$$

$$g_2(r,t) = \frac{16r^2V^2\nu}{16r^2tV^2 + \frac{R^4\Gamma^2}{16\pi^2 t\nu^2}e^{-\frac{r^2}{2t\nu}}}$$

(очевидно, что при $r > 0$ функции g_1 и g_2 не обращаются в ноль).

Перейдем к вопросу существования локального способа вычисления скорости $\mathbf{U}$ для рассматриваемого течения. Как отмечено в разделе 3, локальной $\mathbf{U}$ может быть только в том случае, если ее компоненты зависят только от (r,t), см. (12). Чтобы $\mathbf{U}$ была скоростью Фридмана, она должна удовлетворять уравнению (2).

Распишем покоординатно уравнение (2) в цилиндрической системе координат для цилиндрического течения с учетом (12). При этом уравнение, соответствующее проекции на вектор $\mathbf{e}_r$, удовлетворяется автоматически, а остальные два уравнения имеют вид

$$\frac{\partial\omega_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(U_r\omega_\varphi) = 0, \quad \frac{\partial\omega_z}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_r\omega_z) = 0. \tag{18}$$

Для рассматриваемого течения (16) $\partial\omega_\varphi/\partial t = 0$, поэтому из первого уравнения (18) следует, что $U_r = \frac{C}{\omega_\varphi}$, где $C = C(t)$ — любая функция времени. Это приводит к условию

$$\frac{\partial\omega_z}{\partial t} + \frac{C}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r\omega_z}{\omega_\varphi}\right] = 0.$$

Подставим в получившееся уравнение относительно C компоненты поля завихренности (16):

$$-\frac{\Gamma(CR^2t - 2r^2V + 8tV\nu)}{32\pi t^3 V\nu^2}e^{-\frac{r^2}{4t\nu}} = 0.$$

Видно, что единственным условием удовлетворения последнего уравнения является выбор функции C как

$$C = \frac{2V(r^2-4\nu t)}{R^2 t}.$$

Учитывая, что по условию C является функцией только от времени, это может быть выполнено только для случая $V = 0$, который соответствует плоскому несжимаемому течению с нулевой спиральностью S, для которого всегда существует локальная скорость Фридмана (5). Для случая $V \neq 0$ функция C не может зависеть только от времени, и для предложенного цилиндрического течения не существует локальной Фридмана $\mathbf{U}$.

6. Альтернативный подход к рассмотрению эволюции завихренности в осесимметричных течениях с закруткой

В работе [4] предлагается другой подход к рассмотрению эволюции завихренности в закрученных осесимметричных течениях несжимаемой жидкости. Он заключается в отдельном рассмотрении движения вихревых трубок, построенных из радиально-осевой $\boldsymbol{\Omega}_{rz}$ и окружной $\boldsymbol{\Omega}_\varphi$ составляющих завихренности. Эти компоненты суть роторы окружной $\mathbf{V}_\varphi$

и радиально-осевой $\mathbf{V}_{rz}$ составляющих скорости соответственно. Используя алгоритмы существующих вихревых методов, по этим полям завихренности можно восстановить поле скорости.

Основная особенность такого разделения состоит в том, что уравнения эволюции соответствующей компоненты завихренности не зависят друг от друга и могут быть записаны с помощью двух в общем случае различных скоростей Фридмана $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$:

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}_\varphi}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{\Omega}_\varphi \times \mathbf{U}_1) = 0,$$
$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}_{rz}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{U}_2) = 0,$$

где

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z - \nu \frac{\mathbf{\Omega}_\varphi \times (\nabla \times \mathbf{\Omega}_\varphi)}{\mathbf{\Omega}_\varphi^2} - \frac{\mathbf{V}_\varphi^2}{r\Omega_\varphi}\mathbf{e}_z,$$
$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z - \nu \frac{\mathbf{\Omega}_{rz} \times (\nabla \times \mathbf{\Omega}_{rz})}{\mathbf{\Omega}_{rz}^2}.$$

Таким образом, вихревые трубки поля $\mathbf{\Omega}_\varphi$ движутся, сохраняя свою интенсивность, со скоростью $\mathbf{U}_1$, а вихревые трубки поля $\mathbf{\Omega}_{rz}$ — со скоростью $\mathbf{U}_2$.

Отметим, что соответствующие скорости Фридмана $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$ существуют и локальны для любых осесимметричных закрученных течений при условии, что $\mathbf{\Omega}_\varphi \neq 0$ и $\mathbf{\Omega}_{rz} \neq 0$. Это справедливо и для примеров цилиндрических течений, рассмотренных в разделах 4 и 5, для второго из которых "общей" локальной скорости Фридмана не существует. Выражения $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$ для этих течений имеют следующий вид. Для примера из раздела 4:

$$U_{1r} = -\frac{2\nu}{r}, \quad U_{1\varphi} = 0, \quad U_{1z} = 2V\Big(1 - \frac{r^2}{R^2}\Big) - \frac{R^2(r^2+8t\nu)^2}{256V\nu^2};$$
$$U_{2r} = -\frac{2r\nu}{r^2+4t\nu}, \quad U_{2\varphi} = 0, \quad U_{2z} = 2V\Big(1 - \frac{r^2}{R^2}\Big).$$

Для примера из раздела 5:

$$U_{1r} = -\frac{2\nu}{r}, \quad U_{1\varphi} = 0, \quad U_{1z} = 2V\Big(1 - \frac{r^2}{R^2}\Big) - \frac{\Gamma^2 R^2}{16\pi^2 r^4 V}\big(e^{-\frac{r^2}{4t\nu}} - 1\big)^2;$$
$$U_{2r} = \frac{r}{2t}, \quad U_{2\varphi} = 0, \quad U_{2z} = 2V\Big(1 - \frac{r^2}{R^2}\Big).$$

В общем случае для цилиндрических течений радиальная компонента завихренности Ω_r равна нулю, а компоненты скорости $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$ имеют следующий вид:

$$U_{1r} = V_r - \nu\Big(\frac{1}{r} + \frac{1}{\Omega_\varphi}\frac{\partial \Omega_\varphi}{\partial r}\Big), \quad U_{1\varphi} = 0, \quad U_{1z} = V_z - \frac{V_\varphi^2}{r\Omega_\varphi};$$
$$U_{2r} = V_r - \nu\frac{1}{\Omega_z}\frac{\partial \Omega_z}{\partial r}, \quad U_{2\varphi} = 0, \quad U_{2z} = V_z.$$

7. Заключение

Рассмотрен вопрос о существовании локальных способов вычисления скорости переноса вихревых трубок с сохранением их интенсивности. Известны два класса течений, для которых всегда существует локальное представление скорости Фридмана: стационарные течения и нестационарные несжимаемые течения с нулевой спиральностью (например, плоскопараллельные и осесимметричные без закрутки). На примерах цилиндрических закрученных нестационарных течений с ненулевой спиральностью показано существование как течений с локальной скоростью Фридмана, так и течений, для которых существует только нелокальная скорость Фридмана.

Несмотря на существование скорости Фридмана для любых областей течений с $\mathbf{\Omega} \neq 0$, факт существования течений, в которых $\mathbf{U}$ оказывается только нелокальной, представляет сложность реализации численных алгоритмов, основанных на поиске представления скорости Фридмана, удовлетворяющей требованию ограниченности ее модуля. По этой причине следует приложить усилия для разработки вихревых методов, учитывающих возможность существования течений, для которых могут отсутствовать локальные скорости Фридмана.

В разделе 6 приведен пример такого подхода, применимого для осесимметричных течений с закруткой. В этом случае уравнение эволюции завихренности расщепляется на два независимых уравнения, содержащих две скорости Фридмана, которые всегда локальны. Этот факт может быть использован для построения вихревых методов типа ВВД для закрученных осесимметричных течений.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 17-08-01468 А, 18-31-20051).

Литература

1. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. Москва : Дрофа, 2003.
2. *Cottet G.-H., Koumoutsakos P.* Vortex Methods. Cambridge : CUP, 2000.
3. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. Москва : Физматгиз, 1963.
4. *Сизых Г.Б.* Эволюция завихренности в закрученных осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости // Уч. зап. ЦАГИ. 2015. Т. 46, вып. 3. С. 14–20.
5. *Марков В.В., Сизых Г.Б.* Эволюция завихренности в жидкости и газе // Известия РАН. МЖГ. 2015. Вып. 2. С. 8–15.
6. *Брутян М.А.* Диффузия завихренности в вязкоупругой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1997. Вып. 5. С. 18–23.
7. *Сэффмен Ф.Дж.* Динамика вихрей. Москва : Научный Мир, 2000.
8. *Голубкин В.Н., Сизых Г.Б.* О некоторых общих свойствах плоскопараллельных течений вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. Вып. 3. С. 176–178.
9. *Брутян М.А., Голубкин В.Н., Крапивский П.Л.* Об уравнении Бернулли для осесимметричных течений вязкой жидкости // Уч. зап. ЦАГИ. 1988. Т. 19, вып. 2. С. 98–100.
10. *Ogami Y., Akamatsu T.* Viscous flow simulation using the discrete vortex method — the diffusion velocity method // Computers & Fluids. 1991. V. 19, N 19. P. 433–441.
11. *Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я.* Моделирование обтекания колеблющегося профиля методом вязких вихревых доменов // Известия РАН. МЖГ. 2007. Т. 42, вып. 1. С. 3–14.
12. *Lacombe G., Mas-Gallic S.* Presentation and Analysis of a Diffusion-Velocity Method // ESAIM : Proc. 1999. V. 7. P. 225–233.
13. *Berker R.* Sur quelques cas d'integration des équations du movement d'un fluide visqueux incompressible. Paris–Lille, 1936.
14. *Ахметов В.К., Волшаник В.В., Зуйков А.Л., Орехов Г.В.* Моделирование и расчет контрвихревых течений. Москва : МГСУ, 2012.

References

1. *Loitsianskii L.G.* Mecanics of Liquids and Gases. Moscow : Drofa, 2003.
2. *Cottet G.-H., Koumoutsakos P.* Vortex Methods. Cambridge : CUP, 2000.

3. *Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V.* Theoretical hydromechanics. Part 1. Moscow : Fizmatgiz, 1963. (in Russian).

4. *Sizykh G.B.* Vorticity evolution in swirling axisymmetrical flows of viscous incompressible fluids. Proceedings of TsAGI. 2015. V. 46, I. 3. P. 14–20. (in Russian).

5. *Markov V.V., Sizykh G.B.* Vorticity Evolution in Liquids and Gases. Proceedings of RAS. 2015. V. 50, I. 2. P. 176–178. (in Russian).

6. *Brutian M.A.* Vorticity diffusion in a viscoelastic fluid. Proceedings of RAS. Mechanics of liquid and gas. 1997. I. 5. P. 18–23. (in Russian).

7. *Saffman P.G.* Vortex Dynamics. Cambridge University Press, 2000.

8. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* Some general properties of plane-parallel viscous flows. Proceedings of AS USSR. Mechanics of liquid and gas. 1987. I. 3. P. 176–178. (in Russian).

9. *Brutian M.A., Golubkin V.N., Krapivskiy P.L.* Bernoulli equation for axisymmetrical flows of viscous fluid. Proceedings of TsAGI. 1988. V. 19, I. 2. P. 98–100. (in Russian).

10. *Ogami Y., Akamatsu T.* Viscous flow simulation using the discrete vortex method — the diffusion velocity method. Computers & Fluids. 1991. V. 19, N 19. P. 433–441.

11. *Gouvernyuk S.V., Dynnikova G.Ya.* Modelling the flow past an oscillating airfoil by the method of viscous vortex domains. Proceedings of RAS. 2007. V. 42, I 1. P. 3–14.

12. *Lacombe G., Mas-Gallic S.* Presentation and Analysis of a Diffusion-Velocity Method. ESAIM : Proc. 1999. V. 7. P. 225–233.

13. *Berker R.* Sur quelques cas d'integration des équations du movement d'un fluide visqueux incompressible. Paris–Lille, 1936.

14. *Akhmetov V.K., Volskanik V.V., Zuykov A.L., Orekhov G.V.* Modelling and simulation of counterswirling flows. Moscow : MGSU, 2012. (in Russian).

Поступила в редакцию 25.02.2019