

УДК 519.866

Л. В. Егоров

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Автомодельная редукция дифференциально-разностного уравнения для изучения его асимптотики

Сравниваются асимптотики решения дифференциально-разностного аналога уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргера, описывающего диффузию новых технологий в модели шумпетеровской динамики и решения непрерывной версии этого уравнения, полученного при автомодельной редукции Ферми–Улама.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение, автомодельная редукция, асимптотика решения, диффузия технологий, шумпетеровская динамика.

L. V. Yegorov

M. V. Lomonosov Moscow State University
Moscow Institute of Physics and Technology

Selfsimilar reduction of the difference differential equation to study its asymptotics

The paper compares asymptotics of the solution of the difference differential analogue of the Korteweg–de Vries–Burgers equation which describes new technologies diffusion in the shumpeterian dynamics model and the solution of the continuous version of this equation obtained by the selfsimilar Fermi–Ulam reduction.

Key words: difference differential equation, selfsimilar reduction, asymptotics of the solution, technologies diffusion, shumpeterian dynamics.

1. Введение

В моделях нового экономического роста главным движущим фактором экономики является технологический прогресс. В концепции шумпетеровской инновационной динамики совершенствование новых технологий происходит путём их создания (инновационный процесс) и заимствования (имитационный процесс). В работе [1] приводится обзор моделей эндогенного роста, которые, в зависимости от сделанных предположений о механике процессов инновации и имитации, сводятся к исследованию различных уравнений математической физики и их дифференциально-разностных аналогов. В этих моделях конъюнктурную неоднородность описывают эволюцией распределения фирм-производителей по уровням технологической эффективности. В качестве ранжируемого по уровням показателя эффективности может браться, например, общая факторная производительность фирм, их рентабельность, капиталовооружённость и т. д. Мы будем рассматривать эволюцию, описываемую дифференциально-разностным аналогом уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргера в постановке [2], которая является модификацией модели, впервые предложенной В. М. Полтеровичем и Г. М. Хенкиным в работе [3].

Пусть $F_n(t)$ — доля фирм, находящихся на уровне не выше n в момент времени t . Не будем конкретизировать, как именно технологические уровни различаются. Предполагается, что фирма может переходить только на более высокий уровень технологической эффективности. Убывание $F_n(t)$ происходит за счёт перехода фирм с n -го уровня (их доля равна $F_n(t) - F_{n-1}(t)$) на $(n+1)$ -й. Скорость убывания складывается из интенсивности инновационного процесса α и интенсивности имитационного процесса $\beta(F_{n+1} - F_n)$, которая пропорциональна доле фирм уровнем выше — в данной модели реализована возможность заимствования только у ближайших передовых фирм. Экзогенные параметры $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ считаются одинаковыми для каждого уровня n . Они не определяются статистически — вопрос об их идентификации стоит отдельно. Например, в [4] предложили определять коэффициенты инновации и имитации косвенно, в предположении об их пропорциональности расходам на исследования и разработки, через параметры модели распространения новых технологий. Итак, имеем следующее уравнение:

$$\frac{dF_n}{dt} = -(\alpha + \beta(F_{n+1} - F_n))(F_n - F_{n-1}). \quad (1)$$

Поскольку, в силу сделанных предположений, распределение со временем сдвигается по n вправо, естественно считать, что отрицательные технологические уровни отсутствуют. Граничные и монотонные начальные условия имеют вид

$$F_0(t) \equiv 0, \quad 0 < F_{k-1}(0) < F_k(0) < 1, 1 < k < N, \quad F_k(0) = 1, k \geq N. \quad (2)$$

В работе [2] показано, что асимптотикой решения задачи (1), (2) при $\alpha = 0$ является цепочка Ленгмюра–Вольтерра. В общей постановке вопрос об асимптотике решения этой задачи остается открытым [4].

2. Автомоделная редукция

Перейдём к разностям $f_n = F_n - F_{n-1}$, обозначающим долю фирм, которые находятся ровно на уровне n , и перепишем уравнение (1) в новых обозначениях:

$$\begin{aligned} \frac{df_n}{dt} &= -(\alpha + \beta f_{n+1})f_n + (\alpha + \beta f_n)f_{n-1} = \\ &= -\alpha(f_n - f_{n-1}) - \beta(f_{n+1} - f_{n-1})f_n. \end{aligned} \quad (1')$$

Начальные и краевые условия (2) перейдут в

$$f_0(t) \equiv 0, \quad f_n(0) > 0, n = 1, \dots, N, \quad f_n(0) = 0, n > N. \quad (2')$$

Считая, что $x \in \mathbb{Z}$, мы можем переписать (1') в эквивалентном виде:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -\alpha[f(x, t) - f(x - h, t)] - \beta[f(x + h, t) - f(x - h, t)]f(x, t), \quad h > 0. \quad (3)$$

Если x принимает только целочисленные значения и шаг $h = 1$, то система (2) совпадает с (1'). Однако её целесообразно рассматривать для любых, в том числе и вещественных, значений x . В случае, когда функция f гладкая, система (1') достаточно близко описывается системой (2). Будем сопоставлять решение (1'), (2') с решением дифференциального уравнения (2) с неотрицательными начальными условиями

$$f(x, 0) = f_0(x). \quad (4)$$

Считая шаг h малым, разложим $f(x \pm h, t)$ в окрестности точки x до второго порядка малости:

$$f(x \pm h, t) = f(x, t) \pm h \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + o(h^2).$$

Автомодельная редукция Ферми–Улама дифференциально-разностного уравнения (2) даёт его непрерывный аналог:

$$f_t + \alpha h f_x + 2\beta h f_x f = \frac{1}{2} \alpha h^2 f_{xx}. \quad (5)$$

Преобразование $x = 2\beta h y + \alpha h t$ приводит уравнение (5) к вязкостному уравнению Бюргерса:

$$u_t + u u_y = \mu u_{yy}, \quad \mu = \frac{\alpha}{8\beta^2}. \quad (6)$$

Начальное условие (4) перейдет в

$$u(y, 0) = u_0(y) = f_0(2\beta h y), \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) dy = M. \quad (7)$$

Для решения задачи Коши (6), (7) известен асимптотический ряд [5]. Нам будет достаточно взять только первый его член, который был найден ещё в работе [6]:

$$u(y, t) = \sqrt{\frac{\mu}{t+1}} \frac{\exp\left\{-\frac{y^2}{4\mu(t+1)}\right\}}{e^{\frac{\sqrt{\pi}}{2\mu}-1} + \int_{\frac{y}{2\sqrt{\mu(t+1)}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta}. \quad (8)$$

Этот асимптотический член также является решением уравнения (6).

Теорема сходимости формулируется в переменных подобия $s = \ln(t+1)$, $\xi = y/\sqrt{t+1}$, $w(\xi, s) = \sqrt{t+1}u(y, t)$, действие группы преобразований которого переводит (6) в

$$w_s + \left(\frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{2}\xi w_s\right) = \mu w_{\xi\xi}, \quad \mu = \frac{\alpha}{8\beta^2}. \quad (6')$$

и не изменяет момент распределения

$$w(\xi, 0) = w_0(\xi), \quad \int_{-\infty}^{\infty} w_0(\xi) d\xi = M. \quad (7')$$

Теорема 1 (см. [5]). Пусть w — решение задачи Коши (6'), (7') с $\mu > 0$ и $w_0 \in L^1 \cap L^\infty$ обладает моментом распределения $\int_{-\infty}^{\infty} w_0(\xi) d\xi = M$. Тогда

$$w(\xi, s) \rightarrow \frac{\sqrt{\mu} \exp\{-\xi^2/4\mu\}}{e^{\frac{\sqrt{\pi}}{2\mu}-1} + \int_{\xi/\sqrt{4\mu}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta} \quad \text{при } s \rightarrow \infty$$

поточечно и в $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$.

В терминах задачи (5), (4) асимптотика решения имеет вид

$$f(x, t) = \sqrt{\frac{\alpha}{8\beta^2(t+1)}} \cdot \frac{\exp\left\{-\frac{(x-\alpha ht)^2}{2\alpha h^2(t+1)}\right\}}{e^{\frac{4\beta^2 M}{\alpha}-1} + \int_{\frac{x-\alpha ht}{h\sqrt{2\alpha(t+1)}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta} \quad (9)$$

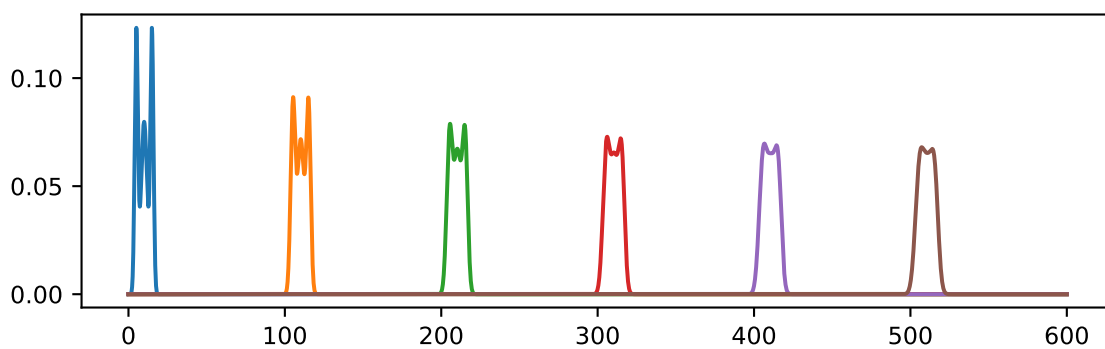
и обладает моментом

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = 2\beta h M. \quad (10)$$

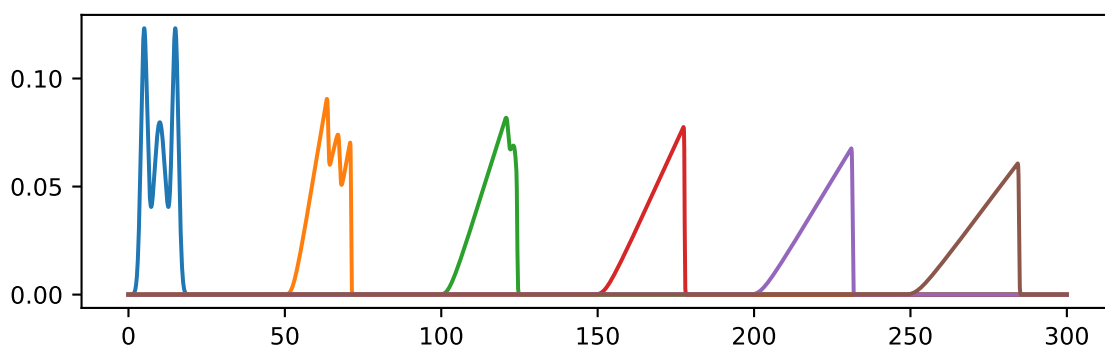
Численный эксперимент позволяет увидеть, насколько хорошо асимптотика (9) решения задачи Коши (5), (4) описывает асимптотику решения задачи (2), (4) дифференциально-разностного уравнения с теми же начальными условиями.

3. Сравнение асимптотик

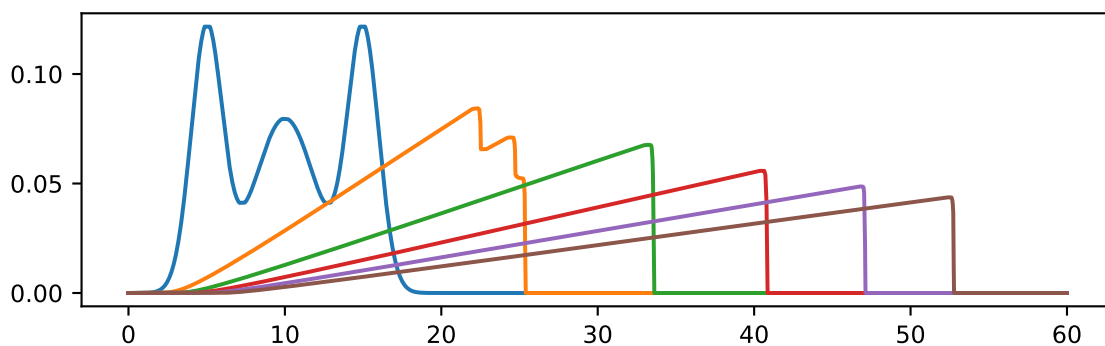
Решение уравнения (6) становится одноэкстремальным по x за конечное время, вне зависимости от вида начальных условий (7). Оказывается, то же верно и для дифференциально-разностного уравнения (2). Как видно из рис. 1, мультимодальность начальной плотности распределения у решения не сохраняется. Здесь и далее расчёты проводились для трёх наборов параметров: $\alpha = 1, \beta = 0.01$, когда в уравнении преобладает линейная составляющая; $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$, когда и линейная, и диффузионная составляющие существенны; $\alpha = 0.01, \beta = 1$, когда преобладает диффузионная составляющая (случай, близкий к [2]). Шаг h влияет только на скорость распространения волны, его везде брали равным 0.01. В качестве начальных условий бралась функция $0.3f_{\mathcal{N}(5,1)}(x) + 0.4f_{\mathcal{N}(10,2)}(x) + 0.3f_{\mathcal{N}(15,1)}(x)$.



а) $\alpha = 1, \beta = 0.01$



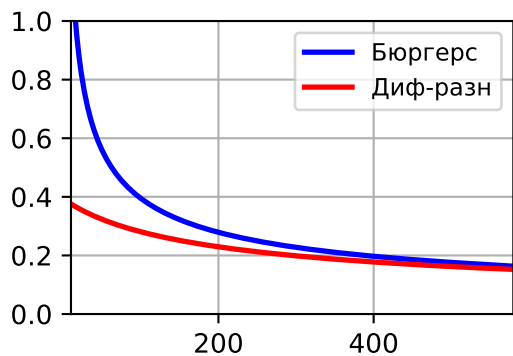
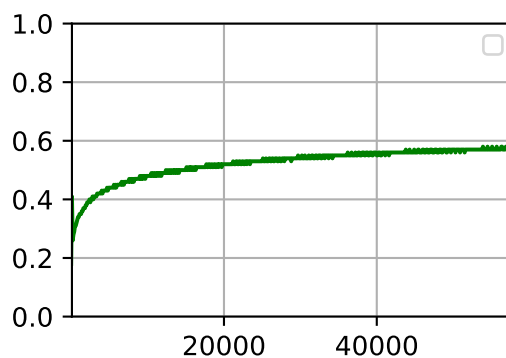
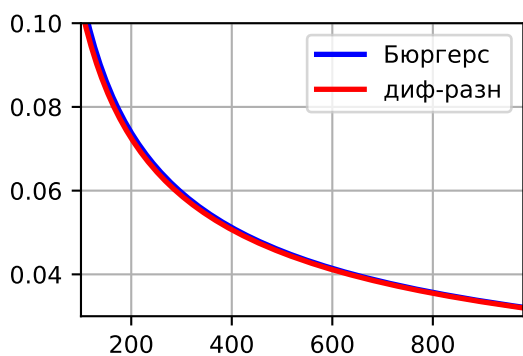
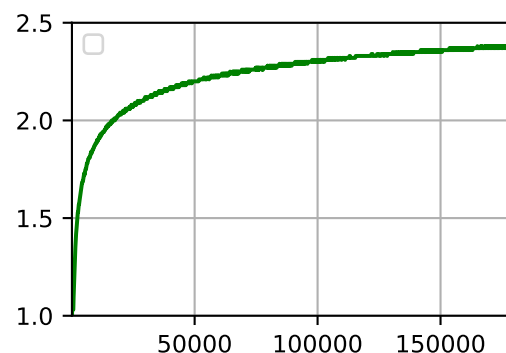
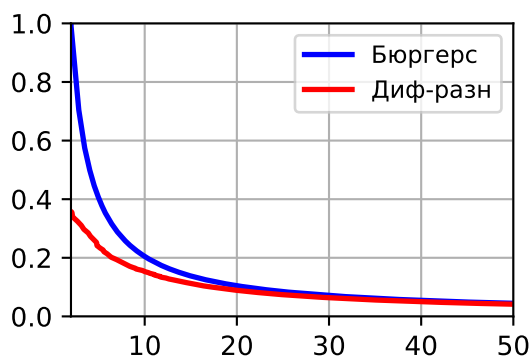
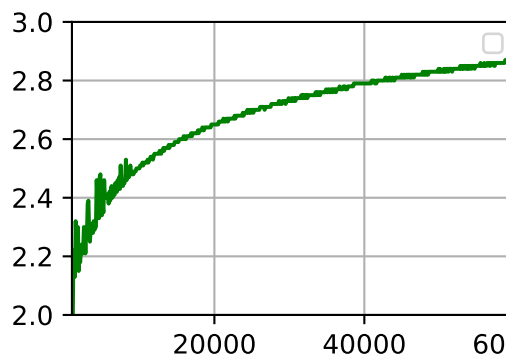
б) $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$



в) $\alpha = 0.01, \beta = 1$

Рис. 1. $f(x, t)$ по оси x при разных параметрах α и β в одни и те же моменты времени

Итак, решение дифференциально-разностного уравнения (2) становится одноэкстремальным за конечное время, как и решение (6), что позволяет нам использовать их максимумы для характеристики их асимптотического поведения. Теперь в качестве начальных условий (4) для численных расчётов решения задачи Коши (2), (4) бралась плотность $\mathcal{N}(0, 1)$, обладающая моментом $2\beta hM = 1$. Соответственно для расчёта асимптотики решения задачи (5), (4) по формуле (9) использовалось значение $M = 1/2\beta h$ в зависимости от выбранных параметров α, β, h .

а) $\max_x f(x, t)$ по оси x со временемб) Расстояние между максимумами по оси t Рис. 2. Расчёт для значений $\alpha = 1, \beta = 0.01, h = 0.01, M = 5000$ а) $\max_x f(x, t)$ по оси x со временемб) Расстояние между максимумами по оси t Рис. 3. Расчёт для значений $\alpha = 0.5, \beta = 0.5, h = 0.01, M = 100$ а) $\max_x f(x, t)$ по оси x со временемб) Расстояние между максимумами по оси t Рис. 4. Расчёт для значений $\alpha = 0.01, \beta = 1, h = 0.01, M = 50$

Как видно из графиков рис. 2—4а для всех трёх наборов параметров максимумы плотностей распределений со временем начинают совпадать. Причём, чем больше α , тем быстрее

стабилизируется процесс. Графики рис. 2–4б дают представление о длительности установления фиксированной разности фаз.

Меру схожести двух асимптотик по времени можно оценить и в L_1 -норме как $\int_{\mathbb{R}} |f_B(x, t) - f_D(x, t)| dx$, где f_B — асимптотика решения уравнения Бюргера (5), f_D — решение дифференциально-разностного уравнения (2), с одинаковыми начальными условиями (4).

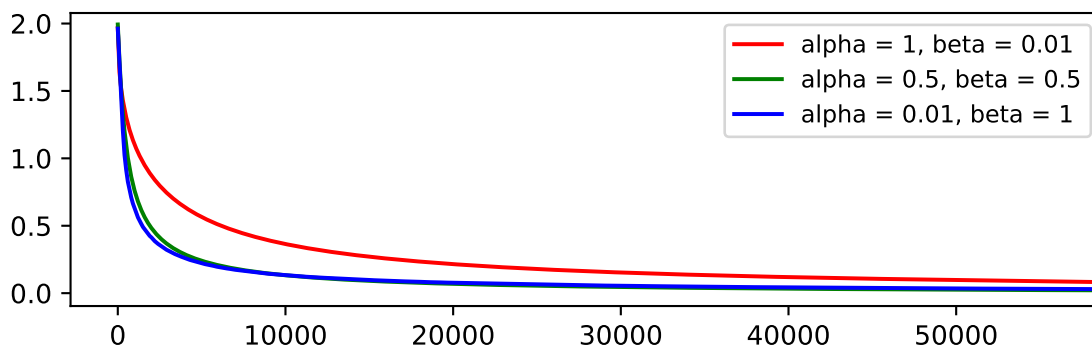


Рис. 5. $\|f_B(x, t) - f_D(x, t)\|_{L_1}$ по оси t при разных параметрах α и β

Приведённые вычисления позволяют высказать гипотезу о том, что асимптотика решения дифференциально-разностного аналога уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргера имеет тот же вид, что и асимптотика решения уравнения Бюргера, к которому сводится первое после автомодельной редукции.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 17-07-00507.

Литература

1. Полтерович В.М. Теория эндогенного экономического роста и уравнения математической физики // ЦЭМИ РАН, Журнал новой экономической ассоциации. 2017. № 2(34). С. 193–201.
2. Ташлицкая Я.М., Шананин А.А. Многоукладность технологической структуры и влияние транзакционных издержек на распространение инноваций // Математическое моделирование. 2000. Т. 12, № 12. С. 24–34.
3. Полтерович В.М., Хенкин Г.М. Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий // Экономика и математические методы. 1988. Т. 24, № 6. С. 518–531.
4. Хенкин Г.М., Шананин А.А. Математическое моделирование шумпетеровской инновационной динамики // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 8. С. 3–19.
5. Kim Y.-J., Tzavaras A.E. Diffusive N-waves and metastability in the Burgers equation // SIAM J. Math. Analysis. 2001. V. 33, N 3. P. 607–633.
6. Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1950. N 3. P. 201–230.

References

1. Polterovich V.M. The Theory of Endogenous Economic Growth and Equations of Mathematical Physics. CEMI RAS, Journal of the New Economic Association. 2017. N 2(34). P. 193–201. (in Russian).

2. *Tashlitskaya Y.M., Shaninin A.A.* The stratification in technological structure and influence of transaction cost on the innovation diffusion. *Mathematical Modeling*. 2000. V. 12, N 12. P. 24–34. (in Russian).
3. *Polterovich V.M., Henkin G.M.* Evolution model for the processes creation and imitation of technologies. *Economics and math. methods*. 1988. V. 24, N 6. P. 518–531. (in Russian).
4. *Henkin G.M., Shaninin A.A.* Mathematical modeling of the schumpeterian dynamics of innovation. *Mathematical Modeling*. 2014. V. 26, N 8. P. 3–19. (in Russian).
5. *Kim Y.-J., Tzavaras A.E.* Diffusive N-waves and metastability in the Burgers equation. *SIAM J. Math. Analysis*. 2001. V. 33, N 3. P. 607–633.
6. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1950. N 3. P. 201–230.

Поступила в редакцию 17.12.2019