Основные формулы по курсу «Механика и специальная теория относительности»

М. Г. Иванов

24 декабря 2017 г.

1 Тензоры

Везде в курсе подразумевается, что все функции достаточно гладкие, а все необходимые для вычислений теоремы существования и единственности выполнены.

Закон преобразования тензора типа (n,m) при замене координат $x^M \to x^{M'}$

$$T^{M'_1\dots M'_n}{}_{K'_1\dots K'_m}(x') = T^{M_1\dots M_n}{}_{K_1\dots K_m}(x(x'))\frac{\partial x^{M'_1}}{\partial x^{M_1}}(x(x'))\dots\frac{\partial x^{M'_n}}{\partial x^{M_n}}(x(x'))\frac{\partial x^{K_1}}{\partial x^{K'_1}}(x')\dots\frac{\partial x^{K_m}}{\partial x^{K'_m}}(x').$$

При указании типа тензора кроме валентности (число верхних и нижних индексов) *следует указывать класс преобразований координат*, по отношению к которым объект ведёт себя как тензор.

Появление в одном члене двух одноимённых индексов подразумевает суммирование (свёртку) по всему диапазону изменения индекса. Такие индексы называются немыми. Один из индексов такой пары должен быть верхним, а другой — нижним. В декартовых координатах можно не различать верхние и нижние индексы.

Индекс, который в каждом члене выражения встречается ровно один раз называется свободным. Свободный индекс во всех членах должен быть в одном (верхнем или нижнем) положении. Свободный индекс (одновременно во всех членах) можно заменять конкретным значением.

Если в каком-то члене одноимённый индекс встретился более двух раз, то в выражении допущена ошибка.

Если аргумент функции или функционала несёт индексы, то подразумевается, что функция зависит от всех компонент, например, пусть $\alpha,\beta = 1,\dots,d$, а $\alpha'\beta' = 1',\dots,d'$, тогда

$$f(x^\alpha) \equiv f(x^\beta) \equiv f(x^1,x^2,\dots,x^d) \equiv f(x) \neq f(x^{\alpha'}) \equiv f(x^{\beta'}) \equiv f(x^{1'},x^{2'},\dots,x^{d'}) \equiv f(x')$$

Роль индекса у аргумента — показать число компонент и (если аргумент тензор) валентность тензора, к какой системе координат относится индекс. Имя индекса у аргумента при этом не важно.

Далее по повторяющим индексам везде подразумевается суммирование, если явно не оговорено обратное.

Для 3-мерного евклидового пространства в декартовых координатах

$$e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\alpha\gamma\beta} = -e_{\beta\gamma\alpha} = -e_{\gamma\beta\alpha}, \qquad e_{123} = e_{xyz} = +1.$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\mu}, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}.$$

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = a_\alpha b_\alpha, \quad [\mathbf{a}\times\mathbf{b}]_\gamma = e_{\alpha\beta\gamma}a_\alpha b_\beta.$$

$$\nabla_\alpha = \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \nabla_\alpha x_\beta = \nabla_\alpha r_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad \operatorname{div}\mathbf{a} = (\boldsymbol{\nabla},\mathbf{a}) = \nabla_\alpha a_\alpha, \quad \operatorname{rot}\mathbf{a} = [\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}], \ (\operatorname{rot}\mathbf{a})_\gamma = e_{\alpha\beta\gamma}\nabla_\alpha a_\beta.$$

$$\operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{\nabla}\varphi, \quad (\operatorname{grad}\varphi)_\alpha = \nabla_\alpha\varphi, \quad (\boldsymbol{\nabla},\boldsymbol{\nabla}) = \nabla_\alpha\nabla_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\alpha} = \triangle.$$

2 Лагранжев формализм

Действие — функционал от траектории системы $x^\alpha(t)$ в конфигурационном пространстве:

$$S[x^\alpha(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t)\, dt$$

Функция Ларганжа $L(x, \dot{x}, t)$ часто (но не всегда) в классической механике — разность кинетической и потенциальной энергий.

Вариациая действия — функционал от траектории системы $x^\alpha(t)$ и вариации траектории $\delta x^\alpha(t)$ с граничными условиями $\delta x^\alpha(t_{0,1}) = 0$:

$$\delta S[x^\alpha(t), \delta x^\alpha(t)] = \frac{d}{d\varepsilon} S[x^\alpha(t) + \varepsilon\, \delta x^\alpha(t)]\bigg|_{\varepsilon=0} = S[x^\alpha(t) + \delta x^\alpha(t)] - S[x^\alpha(t)] + o(\delta x).$$

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\, \delta x^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\, \delta \dot{x}^\alpha \right) dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\, \delta x^\alpha \bigg|_{t_0}^{t_1}}_{0} + \int\limits_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right)}_{\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)}} \delta x^\alpha\, dt.$$

Выражение в скобках в последнем интеграле называется вариационной производной. Условие экстремальности действия — условие, что $\delta S = 0$ для произвольной вариации $\delta x^\alpha(t)$ (при условии $\delta x^\alpha(t_{0,1}) = 0$) требует обращения вариационной производной в нуль. Это даёт нам уравнения движения в форме уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)} \equiv \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = 0.$$

Также через функцию Лагранжа L определяются обобщённые импульсы $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}$ (компоненты ковектора), обобщённые силы $F_\alpha = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}$ (компоненты ковектора только для линейных преобразований), энергия $\mathcal{E} = \dot{x}^\alpha p_\alpha - L$ (скаляр).

Пусть имеется некоторая замена обобщённых координат и времени, непрерывно зависящая от параметра s:

$$t' = T(x^\alpha, t, s), \quad x'^\alpha = X^\alpha(x^\alpha, t, s),$$

причём эта замена оставляет неизменным действие, или (что эквивалентно) подынтегральное выражение в действии (включая dt!)

$$L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t)\, dt = L(x'^\alpha, \dot{x}'^\alpha, t')\, dt'.$$

Такая замена называется *симметрией действия*. Согласно теореме Э.Нётер, симметрии действия соответствует закон сохранения некоторой величины p_s

$$\frac{dp_s}{dt} = 0, \qquad p_s = \left(p_\alpha \frac{\partial X^\alpha}{\partial s} - \mathcal{E} \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{s=0}.$$

3 Гамильтонов формализм

Если выполняется условие

$$\det \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot{x}^\beta} \right) \equiv \det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\alpha \partial \dot{x}^\beta} \right) \neq 0,$$

то функция Лагранжа называется невырожденной. В этом случае локально обобщённые скорости $\dot{x}^\alpha$ могут быть выражены через обобщённые импульсы

$$\dot{x}^\alpha = V^\alpha(x^\alpha, p_\alpha, t)$$

и с помощью преобразования Лежандра по функции Лагранжа может быть построена функция Гамильтона — энергия как функция обобщённых координат, обобщённых импульсов и времени:

$$H(x^\alpha, p_\alpha, t) = p_\beta V^\beta(x^\alpha, p_\alpha, t) - L(x^\alpha, V^\alpha(x^\alpha, p_\alpha, t), t).$$

Функция Гамильтона позволяет записать уравнения динамики как уравнения первого порядка — уравнения Гамильтона, которые в канонических переменных (обобщённых координатах и импульсах) имеют вид

$$\dot{x}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}.$$

Переход от функции Гамильтона к функции Лагранжа выполняется аналогично. Условие того, что обобщённые импульсы могут быть выражены через обобщённые скорости как $p_\alpha = P_\alpha(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t)$ (условие невырожденности функции Гамильтона)

$$\det\left(\frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial p_\beta}\right) \equiv \det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\right) \neq 0,$$

$$L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t) = \dot{x}^\beta P_\beta(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t) - H(x^\alpha, P_\alpha(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t), t)$$

Функция от обобщённый координат, обобщённых импульсов и времени называется *наблюдаемой величиной* или просто *наблюдаемой* $F(x^\alpha, p_\alpha, t)$. Для пары наблюдаемых F, G определяется *скобка Пуассона*, которая в канонических переменных имеет вид

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial x^\alpha} = \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial x^\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial x^\alpha}\right).$$

Для канонических переменных (необходимое и достаточное условие каноничности)

$$\{x^\alpha, p_\beta\} = \delta^\alpha_\beta, \qquad \{x^\alpha, x^\beta\} = \{p_\alpha, p_\beta\} = 0.$$

Для произвольной наблюдаемой $F = F(x, p, t)$ и функции Гамильтона $H(x, p, t)$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}.$$

4 Уравнение Гамильтона-Якоби

В уравнении Гамильтона-Якоби действие является не функционалом, а функцией от конечного момента времени и конечной точки траектории, при этом траектория удовлетворяет уравнениям Эйлера Лагранжа

$$S(t_1, x_1^\alpha) = \int^{t_1} L(x, \dot{x}, t)\, dt, \quad x^\alpha(t_1) = x_1^\alpha, \qquad \frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)} \equiv \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = 0.$$

Производные от действия по конечной точке оказываются связанными с импульсами и энергией

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t} = -\mathcal{E}, \qquad \frac{\partial S(t,x)}{\partial x^\alpha} = p_\alpha.$$

Поскольку энергия выражается через импульсы с помощью функции Гамильтона получаем дифференциальное уравнение на функцию $S(t,x)$ — уравнение Гамильтона-Якоби

$$\mathcal{E} = H(x,p,t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x^\alpha, \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}, t\right) = 0.$$

Если вам повезло найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, т.е. его решение $S(t,x^\alpha,a_\alpha)$ с параметрами a_α, число которых равно числу степеней свободы, причём

$$\det\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial a_\beta}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^\alpha \partial a_\beta}\right) \neq 0,$$

то следующие величины будут сохраняться (не зависеть от времени): a_α, $\frac{\partial S}{\partial a_\alpha}$. Этого достаточно для решения уравнений динамики исходной гамильтоновой системы.

5 Движение твёрдого тела и неинерциальные системы отсчёта

Скорость вращения вокруг начала координат с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$: $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}]$.
Момент инерции

$$I_{\alpha\beta} = \sum_a m_a\left(r_a^2\delta_{\alpha\beta} - x_{a\alpha}x_{a\beta}\right) = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$

Момент инерции относительно оси $\mathbf{n}$

$$I_{\mathbf{n}} = I_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta = \int \left(r^2 - (\mathbf{r},\mathbf{n})^2\right) dm = \int r_\perp^2\, dm, \qquad \mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n},\mathbf{r}).$$

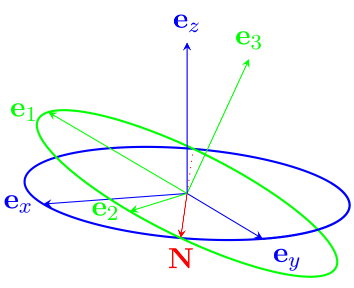
Момент импульса и момент силы

$$\mathbf{L} = \sum_a [\mathbf{r}_a\times\mathbf{p}_a], \quad L_\alpha = I_{\alpha\beta}\Omega^\beta. \qquad \dot{\mathbf{L}} \equiv \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{K} \equiv \sum_a [\mathbf{r}_a\times\mathbf{F}_a].$$

Энергия вращения

$$\mathcal{E}_{\text{вр.}} = \frac{1}{2}I_{\alpha\beta}\Omega^\alpha\Omega^\beta = \frac{1}{2}(\mathbf{\Omega},\mathbf{L}) = \frac{1}{2}(I^{-1})^{\alpha\beta}L_\alpha L_\beta.$$

Углы Эйлера (как в теоретической физике)



Переход от неподвижной системе к подвижной определяется следующим образом:
* Поворот вокруг $\mathbf{e}_z$ на угол φ (*угол прецессии*) совмещает ось y' с линией узлов $\mathbf{N}$.
* Поворот вокруг $\mathbf{N}$ на угол θ (*угол нутации*) совмещает ось z' с осью x^3.
* Поворот вокруг $\mathbf{e}_3$ на угол ψ (*угол собственного вращения*) совмещает оси x'' и y'' с x^1 и x^2.

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_3 &= \cos\theta\,\mathbf{e}_z + \sin\theta(\cos\varphi\,\mathbf{e}_x - \sin\varphi\,\mathbf{e}_y) \end{aligned}$$

Вектор угловой скорости твёрдого тела имеет компоненты $(\dot\varphi, \dot\theta, \dot\psi)$ если его разложить по векторам $\mathbf{e}_z, \mathbf{N}, \mathbf{e}_3$. получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\,\mathbf{e}_z + \dot\theta\,\mathbf{N} + \dot\psi\,\mathbf{e}_3.$$

Введём неинерциальную систему отсчёта, начало отсчёта которой задаётся радиус-вектором $\mathbf{R}(t)$ и движется со скоростью $\mathbf{V}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)$ и ускорением $\mathbf{W}(t) = \dot{\mathbf{V}}(t)$. Также неинерциальная система вращается с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}(t)$. Производные от $\mathbf{R}$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{\Omega}$ мы определим по отношению к невращающейся системе отсчёта, но разлагать их будем по вращающемуся базису. Векторы с двумя штрихами относятся к неинерциальной системе. Силы инерции, действующие на частицу имеют вид

$$\mathbf{F}_{\text{инерц.}} = -m\mathbf{W}'' - m[\dot{\mathbf{\Omega}}'' \times \mathbf{r}''] + m[\mathbf{\Omega}'' \times [\mathbf{r}'' \times \mathbf{\Omega}'']] + 2m[\mathbf{v}'' \times \mathbf{\Omega}''].$$

Эти четыре члена называются соответственно: *сила инерции поступательного движения*, *сила инерции вращения*, *центробежная сила*, *сила Кориолиса*.

6 Специальная теория относительности

Здесь и далее при употреблении двойных знаков $\pm, \mp$ верхний знак соответствует соглашениям принятым в лекциях и конспекте, а нижный — 2-му тому курса теоретической физики Ландау и Лифшица.

Пространство-время Минковского — 4-мерное пространство (время $x^0 = ct$ и 3 пространственных координаты $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$), в котором введёна метрика Минковского

$$g_{ij} = \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} = g^{ij}.$$

Метрика Минковского переходит в себя при сдвигах, отражениях, поворотах пространственных координат, преобразованиях Лоренца (бустах) и их комбинациях.

Преобразование Лоренца от условно неподвижной (нештрихованной) системы к системе движущейся со скоростью $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ (штрихованной) имеет вид (обратная матрица отличается знаком скорости)

$$x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} x^i, \qquad \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = \Lambda_{x,v}{}_i^{i'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Удобно параметризовать преобразования Лоренца через *быстроту* θ:

$$v = c\,\operatorname{th}\theta, \qquad \gamma = \operatorname{ch}\theta, \qquad \gamma v/c = \operatorname{sh}\theta.$$

При преобразованиях Лоренца в одном направлении быстро́ты (в отличие от скоростей) складываются.

С помощью метрики Минковского определяются аналог расстояния — *интервал* s и собственное время вдоль мировой линии τ

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j = \pm(-c\,dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) = \mp c^2\,d\tau^2.$$

Метрика и обратная метрика g^{ij} ($g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$) позволяет поднимать и опускать индексы и определить скалярное произведение 4-мерных векторов.

$$a_i = g_{ij} a^j, \quad b^i = g^{ij} b_j, \quad F^i{}_j = F_{kj} g^{ik} = F^{ik} g_{kj}, \quad (\underline{a}, \underline{b}) = a^i b_i = a_i b^i = g_{ij} a^i b^j = g^{ij} a_i b_j.$$

4-мерный вектор можно записывать через компоненты, причём пространственные компоненты часто объединют в 4-мерный вектор

$$A^i = (A^0; \underbrace{A^1; A^2; A^3}_{\mathbf{A}=A^\alpha}) = (A^0; \mathbf{A}) = (A^0; A^\alpha), \quad A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = \pm(-A^0 B^0 + (\mathbf{AB})).$$

Для безмассовой частицы $\tau = 0$ и соответствующие 4-мерные величины не определены.

Кинематические 4-мерные величины определяются с помощью дифференцирования по собственному времени частицы:
$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = (\gamma c; \gamma \mathbf{v})$ — 4-скорость, $u^i u_i = \mp c^2$,
$w^i = \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = (\gamma^4 (\mathbf{v}, \mathbf{w})/c; \gamma^4 (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mathbf{v}/c^2 + \gamma^2 \mathbf{w})$ — 4-ускорение, $w^i u_i = 0$
$p^i = m u^i = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$ — 4-импульс (определён и для безмассовой частицы, для которой u^i не определена!), $\mp p^i p_i = \mathcal{E}^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$ (позволяет вычислить эффективную массы системы и функцию Гамильтона свободной частицы),
$f^i = \frac{dp^i}{d\tau}$ — 4-сила,
m — масса не зависит от системы отсчёта, связана с энергией в системе центра инерции $E_0 = mc^2$,
$L^{ij} = x^i p^j - x^j p^i$ — 4-мерный момент импульса.

В качестве коэффициента пропорциональности между 3-мерной скоростью и 3-мерным импульсом выступает не масса, а энергия: $\mathbf{p} = \mathcal{E} \mathbf{v}/c^2$.

Для всех 4-мерных величин мы используем единицы измерения, соответствующие единицам измерения соответствующих 3-мерных величин. Это позволяет класть $c = 1$, а потом восстанавливать c из соображений размерности.

7 Электромагнитное поле

4-потенциал $A^i = (\varphi; \mathbf{A})$, φ — скалярный потенциал, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал.

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

При калибровочном (градиентном) преобразовании потенциалов

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} f \quad \Leftrightarrow \quad A_i \to A'_i = A_i \pm \nabla_i f$$

поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не меняются.

Из параметризации полей через потенциалы следуют следующие тождества

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i F_{ij} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0$$

— 1-я пара уравнений Максвелла. 2-я пара уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_k F^{ik} = \pm \frac{4\pi}{c} j^i, \quad j^i = (c\rho; \mathbf{j})$$

будет получена в весеннем семестре при рассмотрении электромагнитного поля как динамической системы.

Тензор электромагнитного поля

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}, \qquad A_i = \pm(-\varphi; \mathbf{A}),$$

$$F_{ij}=\pm\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad F^i{}_j=\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}$$

4-понециал и тензор электромагнитного поля преобразуются при замене координат так, как полагается тензорам соответствующей валентности. В частности при преобразовании Лоренца со скоростью $(v,0,0)$ получаем

$$F_{i'j'}=F_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}},$$

$$E'_x=E_x,\quad E'_y=\gamma(E_y-\frac{v}{c}H_z),\quad E'_z=\gamma(E_z+\frac{v}{c}H_y),$$

$$H'_x=H_x,\quad H'_y=\gamma(H_y+\frac{v}{c}E_z),\quad H'_z=\gamma(H_z-\frac{v}{c}E_y).$$

Уравнение движения заряженной частицы (импульс не обобщённый, а кинематический: $\mathbf{p}=\mathcal{E}\mathbf{v}/c^2$, в нерелятивистском пределе $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=q\mathbf{E}+\frac{q}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]$$

В 4-мерном виде

$$mw^i=\frac{q}{c}F^i{}_ju^j.$$

Для релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле в 4-мерной записи (l — произвольный монотонный параметр вместо времени) действие имеет вид

$$S[x^i(l)]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(-mc^2\sqrt{\mp g_{ij}\frac{dx^i}{dl}\frac{dx^j}{dl}}\pm\frac{q}{c}A_i(x)\frac{dx^i}{dl}\right)dl$$

Действие для нерелятивистской и релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле

$$S[\mathbf{r}(t)]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2}-q\varphi(\mathbf{r},t)+\frac{q}{c}(\dot{\mathbf{r}},\mathbf{A}(\mathbf{r},t))\right)dt,\quad S[\mathbf{r}(t)]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(-mc^2\sqrt{1-\dot{\mathbf{r}}^2/c^2}-q\varphi(\mathbf{r},t)+\frac{q}{c}(\dot{\mathbf{r}},\mathbf{A}(\mathbf{r},t))\right)dt.$$

Обобщённый импульс $\mathbf{P}$ отличается от кинематического на векторный потенциал

$$\mathbf{P}=\mathbf{p}+\frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t),\quad \mathbf{p}=m\mathbf{v}\ \text{(нерелятивистский случай)},\quad \mathbf{p}=\mathcal{E}\mathbf{v}/c^2\ \text{(релятивистский случай)}.$$

Функции Гамильтона имеют вид который очевиден, если помнить, что выражение $\mathbf{P}-\frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ — это просто кинематический импульс

$$H(\mathbf{r},\mathbf{P},t)=\underbrace{\frac{(\mathbf{P}-\frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t))^2}{2m}}_{\text{кинетическая энергия }\frac{mv^2}{2}}+q\varphi(\mathbf{r},t),\qquad H(\mathbf{r},\mathbf{P},t)=\sqrt{m^2c^4+c^2\left(\mathbf{P}-\frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)^2}+q\varphi(\mathbf{r},t).$$