Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра дискретной математики

УДК 519.174, 519.179.1
На правах рукописи

Хузиева Алина Эдуардовна

Задачи о раскрасках разреженных гиперграфов

01.01.09 - дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Д.А. Шабанов

Москва - 2019

Оглавление

Введение

Актуальность темы

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению ряда известных задач одного из центральных разделов современной дискретной математики — теории гиперграфов. Данные задачи относятся к теории раскрасок гиперграфов, чье возникновение как самостоятельного направления принято связывать с классической работой 1961 года П. Эрдеша и А. Хайнала [1]. В ней авторы поставили первую экстремальную задачу о раскрасках гиперграфов, ныне известную как проблему Эрдеша–Хайнала. В дальнейшем Эрдеш и Хайнал ввели понятие хроматического числа гиперграфа, и в этих терминах их проблему можно сформулировать следующим образом: найти *величину* $m(n,r)$, *равную минимально возможному числу ребер гиперграфа в классе* n*-однородных гиперграфов с хроматическим числом больше* r. Отметим, что вопрос легко находит ответ в случае графов, при $n = 2$, но становится нетривиальным при любых $n > 2$ и в настоящее время является центральным в теории раскрасок гиперграфов. Изучению проблемы Эрдеша–Хайнала посвящены работы таких классиков комбинаторной математики, как Л. Ловас, Н. Алон, П. Сеймур, Й. Бек, Дж. Спенсер, А.В. Косточка и др. В последнее десятилетие задача изучалась особенно активно, тут стоит выделить работы А. Плухара, Д.А. Шабанова, Х. Гебауэр, Я. Козика. Д.Д. Черкашина и др.

В настоящее время существует очень много различных обобщений проблемы Эрдеша–Хайнала. Одна часть из них связана с изучением некоторого специального подкласса полного класса n-однородных гиперграфов с большим хроматическим числом, определяемого ограничениями на структуру гиперграфа. Второе направление рассматривает запреты на наличие других раскрасок, а не только правильных r-раскрасок. Третий класс задач изучает экстремальное значение не числа ребер, а другой характеристики гиперграфа. В последнее десятилетие появился значительный интерес к, так называемым, онлайн раскраскам, относящимся и к алгоритмическим вопросам теории гиперграфов. В общем виде проблему типа Эрдеша–Хайнала можно сформулировать следующим образом: *"найти минимально возможное значение некоторой характеристики гиперграфа (число ре-*

бер, максимальная степень вершины, т.п.) в классе n-однородных гиперграфов, не допускающих раскрасок специального вида (например, правильных r-раскрасок, полноцветных r-раскрасок, предписанных раскрасок и т.д.), а также, возможно, обладающих дополнительными структурными свойствами (b-простой гиперграф, с обхватом больше s и т.п.)".

Одной из фундаментальных работ по теории раскрасок гиперграфов является знаменитая статья 1973 года П. Эрдеша и Л. Ловаса [2], в которой они поставили ряд проблем, а также предложили один из основных вероятностных инструментов современной комбинаторики — Локальную лемму. В этой статье авторами была доказана теорема о существовании n-однородного гиперграфа с хроматическим числом больше r и обхватом больше s для любых $n \geqslant 3, r \geqslant 2, s \geqslant 2$. Более того, они показали, что число ребер и максимальную степень вершины в подобном гиперграфе можно разумно ограничить сверху. Тем самым, было положено начало изучению экстремальной величины $m(n, r, s)$, равной минимально возможному числу ребер гиперграфа в классе n-однородных гиперграфов с хроматическим числом больше r и обхватом больше s. Изучению $m(n, r, s)$ в разное время были посвящены работы З. Сабо, А.В. Косточки, Д. Мубаи, В. Рёдля, П. Тетали, А. Фриза, Т, Бомана, Д.А. Шабанова, Я. Козика и других авторов, что говорит об интересе, который представляет данная задача. Несмотря на это, зазор между известными верхними и нижними оценками этой величины все еще остается достаточно существенным, что говорит об актуальности получения новых продвижений в ней. Представленные в первой главе данной работы результаты позволяют улучшить известные нижние оценки $m(n, r, s)$ для $s > 5$.

Вторая глава диссертационной работы посвящена задаче об онлайн предписанном хроматическом числе полного r-дольного k-однородного гиперграфа $H(m, r, k)$ с равными размерами долей m. Понятие предписанного хроматического числа, как и понятие предписанной раскраски, появилось независимо в работах В.Г. Визинга [21] и П. Эрдеша, А.Л. Рубина, Г. Тейлора [22]. Одним из первых результатов относительно предписанного хроматического числа стал тот факт, что предписанное хроматическое число может быть значительно больше обычного хроматического числа. П. Эрдеш с соавторами показали, что предписанное хроматическое число полного двудольного графа $K_{m,m}$ растет как двоичный логарифм m. В недавней работе [23] Л. Дюрай, Г. Гутовский и Я. Козик доказали интересный факт, что предписанное онлайн хроматическое число имеет ту же самую асимптотику, однако разность между онлайн предписанным и предписанным хроматическими числами $K_{m,m}$ может быть сколь угодно велика.

Далее последовали работы, по-разному обобщающие результат Эрдеша и соавторов. Значительное число работ посвящено поиску асимптотического поведения предписанного хроматического числа полного r-дольного графа K_{m*r}, среди авторов выделим Н. Алона, Х. Киерстеда, М. Кривелевича, Н. Газита, Д.А. Шабанова. П. Хакселл и Ж. Верстрате отыскали асимптотику предписанного хроматического числа полного r-дольного r-однородного гиперграфа с мощностью каждой доли равной m. Совсем недавно Д.А. Шабанов и Т.М. Шайхеева обобщили предыдущие результаты и установили асимптотику предписанного хроматического числа для полного r-дольного k-однородного гиперграфа $H(m, r, k)$ с мощностью каждой доли m, каждое ребро которого содержит ровно одну вершину из некоторых $k < r$ долей. Можно смело утверждать, что представленные во второй главе данной работы результаты об асимптотическом поведении онлайн предписанного хроматического числа гиперграфа $H(m, r, k)$ являются актуальными и находятся в тренде мировых исследований.

Третье направление исследований диссертации связано с раскрасками случайных гиперграфов в биномиальной модели $H(n, k, p)$. Данная модель хорошо известна, в первую очередь, в случае графов: $G(n, p) = H(n, 2, p)$. Случайный граф $G(n, p)$ является одним из основных объектов изучения в вероятностной комбинаторике, его систематическое исследование началось с классических работ П. Эрдеша и А. Реньи [3], [4]. Основные результаты сформировавшейся в настоящее время теории могут быть найдены в великолепных монографиях [5], [6], [7]. Задача о хроматическом числе случайного графа $G(n, p)$ всегда находилась в центре интереса исследователей по теории случайных графов. Ее изучению посвящены работы таких известных математиков, как Дж. Гриммет, К. Макдиармид, Б. Боллобаш, Т. Лучак, Дж. Спенсер, Н. Алон, М. Кривелевич, Д. Ахлиоптас, А. Коджа-Оглан и многие др. В гиперграфах понятие правильной раскраски можно определить по-разному. В третьей главе изучается вопрос о возможности сильной раскраски случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ в r цветов. Изучению хроматического числа $H(n, k, p)$ и сильного хроматического числа $H(n, k, p)$ посвящены работы Дж. Шмидт, Э. Шамира, М. Кривелевича, Б. Судакова, А. Коджа-Оглана, А. Фриза, К. Гринхилл, Д.А. Шабанова и др. В третьей главе настоящей диссертации получена новая оценка точной пороговой вероятности существования сильной раскраски в r-цветов у 4-однородного случайного гиперграфа $H(n, 4, p)$.

Подведем итоги. В диссертации изучаются хорошо известные и актуальные задачи теории гиперграфов, находящиеся в центре мировых исследований по комбинаторике.

Цель работы

Целью настоящей диссертационной работы является исследование известных проблем теории раскрасок гиперграфов. Основными задачами являются:

1. исследование экстремальной проблемы комбинаторного анализа об отыскании минимально возможного количества ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом больше r и обхватом больше s;

2. исследование онлайн предписанного хроматического числа полных многодольных гиперграфов;

3. исследование онлайн аналогов экстремальных задач о раскрасках гиперграфов;

4. изучение точной пороговой вероятности существования сильной раскраски в r-цветов у 4-однородного случайного гиперграфа в биномиальной модели.

Научная новизна

Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1. получены новые оценки величины $m(n, r, s)$, равной минимальному числу ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом больше r и обхватом больше s;

2. доказан структурный результат о количественной связи характеристик однородного гиперграфа с большим обхватом и большим хроматическим числом;

3. найдена асимптотика онлайн предписанного хроматического числа полного r-дольного k-однородного гиперграфа $H(m, r, k)$;

4. обоснована новая нижняя оценка точной пороговой вероятности существования сильной раскраски в r-цветов у случайного 4-однородного гиперграфа в биномиальной модели $H(n, 4, p)$.

Методы исследования

В настоящей диссертационной работе использованы комбинаторные и вероятностные методы теории гиперграфов. В первой главе доказательства опираются на метод случайной перекраски. Во второй главе используется связь предписанных раскрасок полных многодольных графов и гиперграфов с экстремальными задачами о раскрасках гиперграфов. В третьей главе основным инструментом доказательств является метод второго момента.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертационная работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы, которыми они получены, могут найти применения в исследованиях по экстремальным и вероятностным задачам теории гиперграфов, по теории Рамсея и аддитивной комбинаторике.

Апробация результатов

Результаты работы были представлены на следующих конференциях:

1. 57-я научная конференция МФТИ, посвященная 120-летию со дня рождения П.Л. Капицы (Долгопрудный, 24-29 ноября 2014 года);

2. 59-я научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 21-26 ноября 2016 года);

3. 60-я научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 20-25 ноября 2017 года).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в работах [A1]–[A4]. Всего по теме опубликовано четыре работы, из них три в соавторстве. Работы [A1], [A2] опубликованы в изданиях, индексируемых Scopus и Web of Science. Работы [A3] и [A4] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК. Все результаты данной диссертации, включая результаты, опубликованные в совместных работах, были получены автором диссертации самостоятельно.

Структура работы

Настоящая диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и приложения. Полный объем диссертации составляет 83 страницы. Список литературы содержит 60 наименований.

Глава 1

Раскраски гиперграфов с большим обхватом и большим хроматическим числом

В данной главе исследуется экстремальная проблема комбинаторного анализа об отыскании минимально возможного количества ребер n-однородного гиперграфа с обхватом больше s и хроматическим числом больше r. Результаты главы опубликованы в работах [A1], [A2].

1.1 История задачи и основные определения

Напомним основные определения из теории гиперграфов.

Гиперграфом H называется пара множеств $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ — это некоторое конечное множество, элементы которого называются *вершинами гиперграфа*, а $E = E(H)$ — произвольная совокупность подмножеств V, которые принято называть *ребрами гиперграфа* H. Если каждое ребро $A \in E$ состоит ровно из n вершин (т.е. A — это n-подмножество V), то говорят, что гиперграф H является *n-однородным*. *Раскраской* множества вершин гиперграфа $H = (V, E)$ называется любое отображение $f : V \to C$, где C — это некоторое конечное множество, называемое множеством цветов. Раскраска f является *правильной* для гиперграфа, если в ней нет одноцветных ребер. Формально, для каждого $A \in E$ выполнено

$$|\{f(v) : v \in A\}| > 1.$$

Минимальное число цветов $|C|$, необходимое для правильной раскраски гиперграфа H, называется его *хроматическим числом* и обозначается $\chi(H)$.

Степенью вершины v гиперграфа H называется количество ребер H, содержащих v. Максимальную степень вершины гиперграфа H мы будем обозначать через $\Delta(H)$. *Циклом длины* k в гиперграфе $H = (V, E)$ называется чередующаяся последовательность $v_0, A_1, v_1, \ldots, A_k, v_k = v_0$ из k различных вершин $v_0, \ldots, v_{k-1}$ и k различных ребер $A_1, \ldots, A_k$ с условием, что для любого $i = 1, \ldots, k$ выполнено $v_{i-1} \in A_i$ и $v_i \in A_i$. Длина минимального цикла в гиперграфе называется его *обхватом.* Мы будем обозначать обхват гиперграфа H через $g(H)$.

Заметим, что в отличие от случая графов гиперграфы могут иметь обхват равный двум. Цикл длины два в гиперграфе возникает, если в нем найдутся два ребра, имеющих хотя бы две общие вершины. Если же $g(H) > 2$, то каждые два различных ребра имеют не более одной общей вершины. Подобные гиперграфы (по аналогии с графами) принято называть *простыми.*

Изучение взаимосвязи значений хроматического числа, обхвата и максимальной степени вершины у n-однородных гиперграфов началось с классической работы П. Эрдеша и Л. Ловаса [2] 1973 г. В ней Эрдеш и Ловас доказали, что для любых $n \geqslant 3$, $r \geqslant 2$, $s \geqslant 2$ существует n-однородный гиперграф H с хроматическим числом больше r и обхватом больше s. Более того, они показали, что можно разумно ограничить число ребер и максимальную степень вершины в таком гиперграфе.

Теорема 1.1. (П. Эрдеш, Л. Ловас, [2]) *Пусть $n \geqslant 3$, $r \geqslant 2$, $s \geqslant 2$. Тогда существует n-однородный гиперграф H со следующими свойствами: $\chi(H) > r$, $g(H) > s$,*

$$|E(H)| \leqslant 4 \cdot 20^s \, n^{3s-2} r^{(n+1)s},$$
$$\Delta(H) \leqslant 20 n^2 r^{n+1}.$$

Тем самым, Эрдеш и Ловас мотивировали изучение экстремальной величины $m(n,r,s)$, определяемой как *минимально возможное количество ребер гиперграфа в классе n-однородных гиперграфов с хроматическим числом больше r и обхватом больше s.* Формально,

$$m(n,r,s) = \min\{|E(H)| : \ H \text{ — } n\text{-однородный}, \ \chi(H) > r, \ g(H) > s\}.$$

При $s = 1$ условие на обхват тривиально, в этом случае мы рассматриваем весь класс n-однородных гиперграфов с большим хроматическим числом. Величина же $m(n,r,1)$ достаточно хорошо изучена, вопрос ее нахождения — это классическая проблема Эрдеша–Хайнала, подробнее об истории которой можно прочитать, например, в обзоре [8]. Последние результаты получены в недавних работах [9], [10].

В ситуации с нетривиальным обхватом наиболее хорошо изучен случай простых гиперграфов, т.е. величина $m(n,r,2)$. Заметим, что теорема 1.1 дает следующую верхнюю оценку:

$$m(n,r,2) \leqslant 1600 n^4 r^{2n+2}. \tag{1.1}$$

Однако, как оказалось позднее, данная оценка не дает правильный порядок асимптотики ни по n (при фиксированном r), ни по r (при фиксированном n). В первой ситуации наилучшую верхнюю оценку получили А.В. Косточка и В. Рёдль в работе [11]: при всех $n > n_0(r)$ выполнено

$$m(n,r,2) \leqslant 16e^{2r}n^2r^{2n}(\ln r)^2. \tag{1.2}$$

Наилучшая из известных нижних оценок при фиксированном r была обоснована в недавней работе Я. Козика и Д.А. Шабанова [12]:

$$m(n,r,2) \geqslant c\,r^{2n-4}, \tag{1.3}$$

где $c > 0$ — некоторая абсолютная константа. Отметим, что зазор между оценками (1.2) и (1.3) имеет порядок n^2 при фиксированном $r \geqslant 2$.

В обратной ситуации, когда n фиксировано, а r растет, величина $m(n,r,2)$, как показали А.В. Косточка, Д. Мубаи, В. Рёдль и П. Тетали в работе [13] имеет порядок $r^{2n-2}(\ln r)^2$. Они обосновали следующие неравенства:

$$c(n)\,r^{2n-2}(\ln r)^2 \leqslant m(n,r,2) \leqslant 8\,n^{10}r^{2n-2}(\ln r)^2, \tag{1.4}$$

где функция $c(n) > 0$ ими не была явно выписана (из доказательства следует, что $c(n)$ меньше чем n^{-n}).

В отличие от случая простых гиперграфов, задача для гиперграфов с более сильными ограничениями на обхват изучена намного хуже. Верхнюю оценку Эрдеша–Ловаса из теоремы 1.1 величины $m(n,r,s)$ для произвольного s можно уточнить следующим образом:

$$m(n,r,s) \leqslant 2e^2\,s\,e^s n^{3s-2}r^{s(n+1)}. \tag{1.5}$$

Вторая известная конструкция гиперграфов с большим обхватом и большим хроматическим числом — это результат Косточки и Рёдля из статьи [11]. Авторы [11] дают вероятностную конструкцию n-однородного гиперграфа с обхватом больше заданного s и хроматическим числом больше заданного r. Они уточняют оценку на максимальную степень вершины в подобном гиперграфе ($\lceil n\,r^{n-1}\ln r\rceil$ вместо $20n^2r^{n+1}$ в теореме 1.1), однако явно не выписывают оценку на число ребер получающегося гиперграфа. Но из используемой ими работы Сауэра [14] о регулярных гиперграфах с большим обхватом следует, что (1.5):

$$m(n,r,s) \leqslant c^s \cdot n^{3s+1}r^{ns+1}(\ln r)^s, c > 0. \tag{1.6}$$

Заметим, что (1.6) улучшает (1.5) при большом r и малом n.

Единственная же нетривиальная нижняя оценка $m(n,r,s)$ для $s>2$ была получена Косточкой и Кумбхатом в работе [15]. Они показали, что для любых $s,r\geqslant 2$, $\varepsilon>0$ найдется такое $n_0=n_0(r,s,\varepsilon)$, что при всех $n>n_0$:

$$m(n,r,s)>r^{n(\lfloor s/2\rfloor+1)}n^{1-\varepsilon}\ \text{при нечетном } s;$$

$$m(n,r,s)>r^{n(\lfloor s/2\rfloor+1)}n^{-\varepsilon}\ \text{при четном } s. \tag{1.7}$$

Заметим, что зазор между оценками (1.6) и (1.7) имеет экспоненциальный порядок роста по n при фиксированных $r\geqslant 2$, $s>2$. Тем самым в задаче об $m(n,r,s)$ неизвестна даже асимптотика логарифма $\ln(m(n,r,s,))$.

Перейдем к формулировкам новых результатов.

1.2 Новые результаты

В основе доказательства нижней оценки (1.7) для величины $m(n,r,s)$ Косточкой и Кумбхатом был использован некоторый структурный результат об устройстве простых гиперграфов. Для его точной формулировки нам понадобится ряд определений.

Пусть $H=(V,E)$ — n-однородный гиперграф, а δ — некоторое положительное число. Вершина $v\in V$ называется *δ-легкой*, если ее степень в гиперграфе H не превосходит δ. В противном случае, вершина называется *δ-тяжелой.* Ребро называется *δ-тяжелым*, если в нем более половины вершин являются δ-тяжелыми. В противном случае ребро называется *δ-легким.*

В работе Косточки и Кумбхата была доказана следующая теорема о раскрасках простых гиперграфов.

Теорема 1.2. (А.В. Косточка, М. Кумбхат, [15]) *Для любых $\varepsilon>0$ и $r\geqslant 2$ найдется такое $n_0=n_0(\varepsilon,r)$, что любого $n>n_0$ и любого n-однородного простого гиперграфа с условиями:*

(1.2.C.1) $\Delta(H)\leqslant n\cdot r^{n-1}$,

(1.2.C.2) *каждая вершина содержится в не более чем в $r^{n-1}n^{-\varepsilon}$ δ – тяжелых ребрах с $\delta=r^{n-1}n^{-\varepsilon}$,*

выполнено $\chi(H)\leqslant r$.

Смысл теоремы 1.2 состоит в том, что если гиперграф H не является r-раскрашиваемым, то либо в нем найдется вершина уж очень большой степени, не менее $n\,r^{n-1}$, либо найдется вершина, в окрестности которой найдется много, порядка $r^{n-1}n^{-\varepsilon}$, вершин просто большой степени, не меньше $r^{n-1}n^{-\varepsilon}$.

Основным результатом данной главы является следующее улучшение структурного результата Косточки и Кумбхата для случая гиперграфов с обхватом больше пяти.

Теорема 1.3. *Пусть $a_0 > 0$ — фиксированное число. Тогда существуют такие положительные $c = c(a_0)$ и $n_0 = n_0(a_0)$, что при $\delta = \delta(n) = c \cdot r^{n-1}$ и $n > n_0$ для любого n-однородного гиперграфа $H = (V, E)$ с обхватом больше пяти с условиями:*

(1.3.C.1) $\Delta(H) \leqslant n^{a_0} r^{n-1}$,

(1.3.C.2) *каждая вершина H содержится не более чем в $c \cdot r^{n-1}$ δ – тяжелых ребрах,*

выполнено $\chi(H) \leqslant r$.

Количественные оценки в теореме 1.3 достаточно близки к максимально возможным. Как уже упоминалось, Косточка и Рёдль показали (см. [11]), что существуют n-однородные гиперграфы с хроматическим числом больше r, со сколь угодно большим обхватом и максимальной степенью вершины не более $\lceil nr^{n-1} \ln r \rceil$. Тем самым, в формулировке теоремы величина δ не может превышать $nr^{n-1} \ln r$, т.е. не более чем в $n \ln r$ раз больше, чем в нашей теореме.

Выделим одно мгновенное следствие из теоремы 1.3.

Следствие 1.1. *Существует такое положительное число $c > 0$, что для любого n-однородного гиперграфа $H = (V, E)$ с обхватом больше пяти и хроматическим числом больше r выполнено*

$$\Delta(H) \geqslant c \cdot r^{n-1}.$$

Этот результат крайне интересен сам по себе, получением подобных оценок занималось большое число крупных специалистов по экстремальной комбинаторике (см., например, [8]). Однако, он не является новым, а был ранее получен в работе [12] Козика и Шабанова даже для более широкого класса простых гиперграфов.

В качестве второго следствия мы получаем улучшение нижних оценок (1.7) величины $m(n, r, s)$.

Следствие 1.2. *Существует такая абсолютная константа $c > 0$, что для $5 \leqslant s < n/2$ выполнено*

$$m(n, r, s) \geqslant c^{\lfloor s/2 \rfloor} r^{(n-s)(\lfloor s/2 \rfloor + 1)} \text{ при четном } s;$$

$$m(n, r, s) \geqslant c^{\lfloor s/2 \rfloor} n\, r^{(n-s)(\lfloor s/2 \rfloor + 1)} \text{ при нечетном } s.$$

Доказательство. Доказательство следует рассуждениям Косточки и Кумбхата. Пусть c_0 — константа из формулировки теоремы 1.3 для $a_0 = 1$. Пусть также $H = (V, E)$ — n-однородный гиперграф с условиями $\chi(H) > r$, $g(H) > s$.

Пусть x, d — положительные числа. Ребро гиперграфа мы назовем (x, d)-*тяжелым*, если в нем не менее x вершин имеют степень не меньше d. Для вершины $v \in V$ ее (x, d)-*степенью* называется количество (x, d)-тяжелых ребер, содержащих эту вершину.

Рассмотрим две операции изменения гиперграфа: если H' — гиперграф, то при фиксированных (x, d)

- $\mathcal{M}(H')$ получается из H' удалением из каждого ребра вершины максимальной степени (если есть несколько вершин максимальной степени, то выбираем любую);
- $\mathcal{D}(H')$ получается из H' удалением из каждого ребра вершины максимальной (x, d)-тяжелой степени (если есть несколько вершин максимальной (x, d)-тяжелой степени, то выбираем любую).

Заметим, что введённые операции удаляют вершины только из ребер, а не гиперграфа, тем самым, множество вершин в гиперграфах $\mathcal{M}(H')$ и $\mathcal{D}(H')$ совпадает с множеством вершин H'. Следовательно, обе операции переводят k-однородный гиперграф в $(k-1)$-однородный. Обозначим через $\mathcal{M}^t(H')$ ($\mathcal{D}^t(H')$) — гиперграф, получающийся последовательным применением первой (второй) операции к гиперграфу H'.

Обозначим $l = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$, тогда $s = 2l + 1$ для нечетных s и $s = 2l$ в случае четного s. Рассмотрим следующие гиперграфы

$$H_1 = \mathcal{M}^l(H), \quad H_2 = \mathcal{D}^{l-1}(H_1) = \mathcal{D}^{l-1}\mathcal{M}^l(H),$$

где параметры (x, d) выбраны следующим образом:

$$x = \frac{n - 2l + 1}{2}, \quad d = \delta(n - 2l + 1) = c_0 r^{n-2l}.$$

Легко видеть, что гиперграф H_2 будет $(n-2l+1)$-однородным, его хроматическое число тоже будет больше r, а обхват — больше s. Тогда согласно теореме 1.3 возможна следующая альтернатива: либо $\Delta(H_2) > (n - 2l + 1)r^{n-2l} > (n/2)r^{n-2l}$, либо в H_2 найдется вершина (x, d)-тяжелой степени не меньше $\delta(n - 2l + 1)$ (заметим, что для H_2 тяжелые ребра — это в точности $\delta(n - 2l + 1)$-тяжелые). Рассмотрим по отдельности оба варианта.

1) Если $\Delta(H_2) > \frac{1}{2} n\, r^{n-2l}$, то тогда, конечно, и $\Delta(H_1) = m > \frac{1}{2} n\, r^{n-2l}$. Далее, лемма 8 из работы [15] Косточки и Кумбхата утверждает, что в этом случае исходный гиперграф H должен содержать не меньше m^l различных вершин, каждая из которых имеет степень не меньше m (достаточно восстановить ранее удаленные вершины в процессе применения оператора $\mathcal{M}$). Следовательно, общее число ребер в H можно оценить снизу следующим образом:

$$|E| \geqslant \frac{m \cdot m^l}{n} > \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} n\, r^{n-2l} \right)^{l+1} \geqslant$$

(учитывая, что $l + 1 = \lfloor s/2 \rfloor + 1 \geqslant 3$, $2l \leqslant s$)

$$\geqslant \left(\frac{1}{2} \right)^{\lfloor s/2 \rfloor + 1} n r^{(n-s)(\lfloor s/2 \rfloor + 1)}. \tag{1.8}$$

2) Осталось рассмотреть второй случай, когда H_2 содержит вершину большой тяжелой степени. Здесь мы снова воспользуемся леммой Косточки и Кумбхата из [15].

Лемма 1.1. (А.В. Косточка, М. Кумбхат, [15]) *Пусть H' — гиперграф с обхватом строго больше $2t$, а $H' = \mathcal{D}^t(H)$ с некоторыми параметрами x и d. Если H' содержит вершину v с (x, d)-тяжелой степенью не меньше m, то H содержит не менее $(m-1)^t$ различных вершин, (x, d)-тяжелая степень каждой из которых не меньше m и которые находятся на реберном расстоянии ровно t от v.*

Применим лемму 1.1 к гиперграфам H_1 и $H_2 = \mathcal{D}^{l-1}(H_1)$. Согласно ей в H_1 найдется вершина v с (x, d)-тяжелой степенью $m \geqslant c_0 r^{n-2l}$, а также $(m-1)^{l-1}$ вершин на расстоянии ровно $l - 1$ от v с тем же ограничением на (x, d)-тяжелую степень. Обозначим полученное множество вершин через W. Для каждой вершины $u \in W$ найдется ровно один реберный путь длины $l - 1$ до исходной вершины v (иначе в H_1 появился бы цикл длины не более $2l \leqslant s$). Обозначим через $A(u)$ последнее ребро в подобном пути. Если некоторое ребро $B(u) \neq A(u)$ также содержит $u \in W$, то оно не может содержать другие вершины на расстоянии не более l от v, иначе мы получаем цикл длины не более $2l \leqslant s$ в H_1. Тем самым,

$$B(u) \cap B(u') = \emptyset \text{ если } u \neq u',\ u, u' \in W,$$

$$B(u) \cap C(u) = \{u\}.$$

Для каждой вершины $u \in W$ число таких (x, d)-тяжелых ребер будет не меньше $m - 1$, в каждом из них есть не менее $(x - 1)$-й вершины степени не меньше d, которые не принадлежат другим ребрам из этого множества. Стало быть, уже в

H_1 не меньше $(x-1)(m-1)^l$ различных вершин степени не меньше d. Обозначим множество этих вершин через U.

Если $s = 2l$, то общее число ребер в H_1, а, значит, и в H, можно оценить снизу выражением

$$|E| \geqslant \frac{1}{n-l}(x-1)(m-1)^l d \geqslant$$

(подставляем значения x и d, а также оценку на m)

$$\geqslant \frac{n-2l-1}{2(n-l)}(c_0 r^{n-2l}-1)^{l+1} \geqslant c^l r^{(n-2l)(l+1)} = c^{\lfloor s/2 \rfloor} r^{(n-s)(\lfloor s/2 \rfloor + 1)},$$

где $c > 0$ — некоторая подходящая малая константа.

Если же $s = 2l+1$, то вершины из U не могут иметь общих ребер, ведь все они находятся на расстоянии l от v. В этом случае общее число ребер в H_1, а, значит, и в H, можно оценить снизу выражением

$$|E| \geqslant (x-1)(m-1)^l d \geqslant c^{\lfloor s/2 \rfloor} n r^{(n-s)(\lfloor s/2 \rfloor + 1)},$$

где $c > 0$ — это снова некоторая подходящая малая константа.

Вместе с (1.8) полученные оценки доказывают искомое утверждение следствия 1.2. □

Дальнейшая структура главы будет следующей. В параграфе 1.3 мы приводим формулировку Локальной леммы, которая необходима для доказательства теоремы 1.3. Параграф 1.4 посвящен доказательству теоремы 1.3. В заключительном параграфе 1.5 мы обсуждаем усиления теоремы 1.3.

1.3 Основные инструменты доказательства

В качестве основного метода доказательства нами используется *метод случайной перекраски*. В нем мы следуем

– идеям Косточки и Кумбхата из [15] относительно двухэтапной перекраски,

– построению раскраски из работы Купавского и Шабанова [16],

– технике вероятностного анализа из работы Козика и Шабанова [12].

В последней из перечисленных работ использовался следующий вариант, так называемой, Локальной леммы, которая позволяет доказывать положительность вероятности одновременного невыполнения ряда событий в условиях слабой зависимости.

Теорема 1.4. (Локальная лемма). *Пусть $X_1, \ldots, X_N$ — независимые случайные векторы, а $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_M$ — события из алгебры, порожденной ими. Обозначим через $vln(\mathcal{A}_j)$ — такой минимальный набор векторов X_i, что $\mathcal{A}_j \in \sigma(X_i : i \in vln(\mathcal{A}_j))$. Введем для каждого $i = 1, \ldots, N$ следующие многочлены:*

$$w_i(z) = \sum_{\mathcal{A}: X_i \in vln(\mathcal{A})} \mathsf{P}(\mathcal{A}) z^{|vln(\mathcal{A})|}.$$

Если существует такой многочлен $w(z)$, что для любого $i = 1, \ldots, N$ и любого $z \geqslant 1$ выполнено $w_i(z) \leqslant w(z)$, и, кроме того, существует такое $\tau \in (0,1)$, что

$$w\left(\frac{1}{1-\tau}\right) \leqslant \tau,$$

то $\mathsf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{M} \overline{\mathcal{A}_j}\right) > 0$.

Доказательство. Для каждого $j = 1, \ldots, M$ положим x_j равным $\mathsf{P}(\mathcal{A}_j)(1-\tau)^{-|vln(\mathcal{A}_j)|}$ и $S_j = \{l : vln(\mathcal{A}_l) \cap vln(\mathcal{A}_j) \neq \emptyset)\} \setminus \{j\}$. Тогда по определению $vln(\mathcal{A}_j)$ событие $\mathcal{A}_j$ независимо с алгеброй событий $(\mathcal{A}_l, l \notin S_j \cup \{j\})$. Для применения обычного варианта Локальной леммы (см., например, главу 5 в [17]) осталось показать, что

$$\mathsf{P}(\mathcal{A}_j) \leqslant x_j \prod_{l \in S_i} (1 - x_l).$$

Но

$$x_j \prod_{l \in S_i} (1 - x_l) = x_j \prod_{\mathcal{A}_l : vln(\mathcal{A}_l) \cap vln(\mathcal{A}_j) \neq \emptyset} (1 - x_l) \geqslant x_j \prod_{X_i \in vln(\mathcal{A}_j)} \prod_{\mathcal{A}_l : X_i \in \mathcal{A}_l} (1 - x_l) \geqslant$$

$$\geqslant x_j \prod_{X_i \in vln(\mathcal{A}_j)} \left(1 - \sum_{\mathcal{A}_l : X_i \in \mathcal{A}_l} x_l\right) = x_j \prod_{X_i \in vln(\mathcal{A}_j)} \left(1 - w_i\left(\frac{1}{1-\tau}\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant x_j \prod_{X_i \in vln(\mathcal{A}_j)} \left(1 - w\left(\frac{1}{1-\tau}\right)\right) = x_j \left(1 - w\left(\frac{1}{1-\tau}\right)\right)^{|vln(\mathcal{A}_j)|} \geqslant$$

$$\geqslant x_j (1-\tau)^{|vln(\mathcal{A}_j)|} = \mathsf{P}(\mathcal{A}_j).$$

□

В настоящей главе мы будем всегда работать с n-однородными гиперграфами и полагать $\tau = \frac{1}{n+1}$.

1.4 Доказательство теоремы 1.3

Итак, пусть n-однородный гиперграф $H = (V, E)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.3. Нам необходимо доказать существование правильной раскраски множества вершин гиперграфа H в r цветов. Для этого мы построим некоторую случайную r-раскраску V и покажем, что она является правильной с положительной вероятностью. Без ограничения общности будем считать, что $V = \{1, \ldots, N\}$. Также всюду далее δ-тяжелые (δ-легкие) вершины и ребра будем называть просто *тяжелыми* и *легкими*. Наконец, для каждого ребра A через A_R мы будем обозначать множество его тяжелых вершин, а через A_L — множество его легких вершин.

1.4.1 Построение случайной раскраски

Рассмотрим следующий набор случайных величин.

1. $\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на множестве цветов $\{1, \ldots, r\}$.

2. $\{\eta_1, \ldots, \eta_N\}$ — независимые случайные величины со следующим условным распределением на множестве цветов $\{1, \ldots, r\}$:
$$\mathsf{P}\left(\eta_v = \alpha | \xi_v = \beta\right) = \frac{1}{r-1} \text{ для любых } \alpha \neq \beta \in \{1, \ldots, r\},$$
т.е. η_v имеет равномерное условное распределение на множестве $\{1, \ldots, r\} \setminus \{\xi_v\}$.

3. $X_1, \ldots, X_N$ — независимые (независимые также с набором $(\xi_v, \eta_v, v \in V)$) случайные величины с равномерным распределением на отрезке $[0, 1]$.

Наше построение случайной раскраски и ее анализ основаны на *методе случайной перекраски*. Опишем конструкцию с помощью следующего рандомизированного алгоритма.

- Стартуем с равномерной случайной раскраски множества вершин в r цветов: вершине v присваиваем цвет ξ_v.

- В случайной раскраске $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ гиперграф H может содержать *одноцветные* и *почти одноцветные* ребра. Ребро A называется *почти одноцветным с доминирующим цветом* α в раскраске ξ, если в нем почти все вершины покрашены в цвет α, а именно, если выполнено
$$n - s \leqslant \sum_{v \in A} I\{\xi_v = \alpha\} \leqslant n - 1,$$

где $1 \leqslant s < n/2$ — первый параметр нашей конструкции.

- Будем осуществлять следующий алгоритм случайной перекраски, в рамках которого мы хотели бы исправить одноцветные ребра, но так, чтобы почти одноцветные ребра не стали одноцветными доминирующего цвета. Зададим случайный порядок вершин σ с помощью вариационного ряда случайных величин $\{X_v, v \in V\}$. Для ребра A и вершины v будем использовать обозначение $\sigma(v, A)$ для номера вершины v в ребре A. Формально:

$$\sigma(v, A) = \sum_{w \in A} I\{X_w \leqslant X_v\}.$$

- На первом этапе процесса случайной перекраски будем перекрашивать только тяжелые вершины гиперграфа H и исправлять только тяжелые одноцветные ребра. Будем рассматривать тяжелые вершины в порядке, заданном σ, и для текущей вершины v проверять следующие *условия перекраски*:

  1h во-первых, существует такое тяжелое ребро A, $v \in A$, что A — одноцветно в ξ, на момент рассмотрения v ни одна вершина A еще не сменила цвет и, кроме того, $\sigma(A_R, v) \leqslant h$ (т.е. вершина v должна иметь номер не более h среди всех тяжелых вершин ребра A, здесь $1 \leqslant h < n/2$ — второй параметр конструкции);

  2h во-вторых, не существует такого тяжелого ребра B, $v \in B$, почти одноцветного в ξ, что на момент рассмотрения v эта вершина осталась единственной, не покрашенной в α — доминирующий цвет ребра B, и $\eta_v = \alpha$.

- Если условия перекраски выполнены, то присваиваем вершине v цвет η_v. В противном случае, не перекрашиваем v и переходим к следующей вершине.

Получившуюся в результате перекраски тяжелых вершин случайную раскраску обозначим через $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$. Во время второго этапа перекраски мы будем перекрашивать только легкие вершины.

- Будем рассматривать легкие вершины в порядке, заданном σ, и для текущей вершины w проверять следующие *условия перекраски*:

  1l во-первых, существует такое легкое ребро A, $w \in A$, что A — одноцветно или почти одноцветно в ξ, одноцветно в ζ, на момент рассмотрения w ни одна легкая вершина A еще не сменила цвет и, кроме того, $\sigma(A_L, v) \leqslant h$;

2l во-вторых, не существует такого ребра B, $w \in B$, почти одноцветного в ξ, что на момент рассмотрения w эта вершина осталась единственной, не покрашенной в α — доминирующий цвет ребра B, и $\eta_w = \alpha$.

- Если условие перекраски выполнено, то присваиваем вершине v цвет η_v. В противном случае, не перекрашиваем v и переходим к следующей вершине.

Наша задача состоит в том, чтобы показать, что в условиях теоремы при подходящем выборе параметров s, h с положительной вероятностью

1. после первого этапа перекраски все одноцветные в ξ тяжелые ребра перестанут быть одноцветными того же цвета ,
2. после второго этапа перекраски все одноцветные в ζ легкие ребра, которые были одноцветными того же цвета или почти одноцветными с тем же доминирующим цветом в начальной раскраске ξ, будут исправлены,
3. в итоговой раскраске не появится одноцветных ребер, которые в ξ не были одноцветными того же цвета или почти одноцветными с тем же доминирующим цветом.

В следующем параграфе мы осуществим построение, так называемого, *дерева зависимостей* между ребрами гиперграфа в процессе перекраски.

1.4.2 Построение дерева зависимостей

Проанализируем возможности для смены цвета каждой вершиной в процессе перекраски.

Первый этап, тяжелые вершины и ребра. Согласно нашему алгоритму, условие **1h**, тяжелая вершина v может сменить свой цвет только на первом этапе. При этом должно существовать такое тяжелое ребро A, содержащее v, которое являлось одноцветным (например, цвета α) в начальной раскраске ξ, на момент рассмотрения v оно все еще одноцветно цвета α и v имеет номер не более h в этом ребре среди всех тяжелых вершин. В этом случае будем говорить, что ребро A *влияет* на вершину v. Ясно, что каждое ребро может влиять только на одну вершину — первую вершину, сменившую цвет в ребре.

Однако второе условие **2h** в некоторых случаях запрещает перекраску вершины v при выполнении первого условия **1h**. В этом случае должно существовать такое тяжелое ребро B, также содержащее v, которое являлось почти одноцветным (например, с доминирующим цветом β) в начальной раскраске ξ и на момент рассмотрения v только эта вершина осталась непокрашенной в цвет β. В такой ситуации будем говорить, что ребро B *блокирует* перекраску вершины v. Заметим, что каждое ребро может блокировать ровно одну вершину, а также в указанной ситуации должно быть выполнено $\eta_v = \beta$ (иначе смена цвета не превращала бы B в одноцветное ребро).

Пусть теперь тяжелое ребро A было одноцветным цвета α и после первого этапа перекраски таким же и осталось, т.е. ни одна вершина A не сменила свой цвет. Тогда мы можем построить дерево из ребер гиперграфа H с корнем A следующим образом.

а) Пусть $v_1, \ldots, v_h$ — первые h тяжелых вершин этого ребра. В силу того, что первое условие на перекраску для каждой из них было выполнено, но цвет они так и сменили, их перекраска была заблокирована почти одноцветными тяжелыми ребрами $B_1, \ldots, B_h$ с доминирующими цветами $\beta_1, \ldots, \beta_h$. Эти ребра назовем потомками ребра A в нашем *дереве зависимостей*.

б) Если в начальной раскраске ξ только вершина v_i не была покрашена в цвет β_i, то ветвь ребра B_i закончена. Если же нет, то пусть $v_{i,1}, \ldots, v_{i,l_i}$, $l_i \leqslant s-1$ — другие вершины ребра B_i, покрашенные изначально не в доминирующий цвет β_i. Тогда к моменту рассмотрения v_i все эти вершины должны были сменить цвет на β_i. Значит, для каждой вершины $v_{i,j}$ найдется тяжелое ребро $C_{i,j}$, одноцветное не цвета β_i, которое повлияло на вершину $v_{i,j}$. Ребра $C_{i,j}$, $j \leqslant l_i$, назовем потомками ребра B_i в дереве зависимостей.

в) Если $\sigma(v_{i,j}, (C_{i,j})_R) = 1$, то ветвь ребра $C_{i,j}$ закончена. В противном случае пусть $v_{i,j}^t$, $t = 1, \ldots, \sigma(v_{i,j}, C_{i,j}) - 1$, — те вершины $C_{i,j}$, имеющие меньший номер, чем $v_{i,j}$, $X_{v_{i,j}^1} < X_{v_{i,j}^2} < \ldots < X_{v_{i,j}}$. Для них проводим те же рассуждения, что и в п. а) для вершин $v_1, \ldots, v_h$.

Повторяем процедуру, пока не закончится набор каждой ветви дерева с корнем A из ребер гиперграфа H. В результате мы получим дерево зависимостей $\mathcal{T}$ с корнем A и со следующими свойствами.

1. Вершинами этого дерева являются тяжелые ребра H, которые являются одноцветными или почти одноцветными в начальной раскраске ξ.

2. Если две вершины C, B образуют ребро в $\mathcal{T}$, то они должны иметь общую вершину $v = C \cap B$, которую мы будем называть *узловой* вершиной дерева $\mathcal{T}$. При этом одно из этих ребер (например, C) должно быть одноцветным цвета α в ξ, а второе (B) — почти одноцветным цвета $\beta \neq \alpha$. Если C находится ближе к корню дерева, то тогда B блокирует перекраску вершины v. В этом случае, v назовем *узловой вершиной первого типа*. Если же, наоборот, B

находится ближе к корню, то тогда C должно влиять на v, и v называется *узловой вершиной второго типа*. Кроме того, в обоих случаях должно быть выполнено $\eta_v = \beta$.

3. Одноцветные ребра имеют четное реберное расстояние до корня $\mathcal{T}$, почти одноцветные — нечетное. Для вершины A дерева $\mathcal{T}$ обозначим через $\rho(A)$ его расстояние до корня.

4. Степень каждой вершины $\mathcal{T}$, являющейся почти одноцветным ребром, совпадает с количеством его вершин, покрашенных в ξ не в доминирующий цвет, и, значит, не превосходит s. При этом каждая такая вершина является узловой.

5. Степень каждой вершины $\mathcal{T}$, являющейся одноцветным ребром в ξ, не превосходит h. При этом узловые вершины этого ребра — это в точности его первые по нумерации σ тяжелые вершины.

6. Степень корня всегда равна h.

Будем называть $\mathcal{T}'$ деревом, если

1. $\mathcal{T}' = (V', E', v)$, где V' — множество вершин $\mathcal{T}'$, E' — множество ребер $\mathcal{T}'$, $v \in V$ — корень $\mathcal{T}'$;
2. пара (V', E') является ацикличным связным графом;
3. множество вершин дерева V' является подмножеством множества ребер гиперграфа H.

Обозначим через $\mathcal{A}(\mathcal{T}')$ событие, состоящее в том, что дерево $\mathcal{T}'$ является деревом зависимостей на первом этапе перекраски.

Второй этап, легкие вершины. На втором этапе перекраски мы осуществляем перекраску легких вершин. Здесь многое аналогично. Легкая вершина v может сменить свой цвет согласно **1l**, если существует такое легкое ребро A, содержащее v, что A было одноцветным (некоторого цвета α) в промежуточной раскраске ζ, а в начальной раскраске ξ оно должно было быть либо одноцветным цвета α, либо почти одноцветным с доминирующим цветом α. Тогда ребро A *влияет* на вершину v.

Второе же условие **2l** в некоторых случаях запрещает перекраску легкой вершины v. В этом случае должно существовать такое ребро B (неважно, тяжелое или легкое), также содержащее v, которое являлось почти одноцветным (например, с доминирующим цветом α) в начальной раскраске ξ и на момент рассмотрения v

только эта вершина осталась непокрашенной в цвет β. В такой ситуации будем говорить, что ребро B *блокирует* перекраску легкой вершины v. Заметим, что также должно быть выполнено $\eta_v = \beta$, иначе смена цвета не превращала бы B в одноцветное ребро.

Пусть теперь легкое ребро A является одноцветным цвета α в итоговой раскраске (после всех этапов перекраски), и при этом после первого этапа оно также было одноцветным цвета α. Тогда в начальной раскраске оно должно было быть либо одноцветным цвета α, либо почти одноцветным с доминирующий цветом α. Построение дерева зависимостей проходит аналогично построению на первом этапе перекраски, но есть некоторые отличия.

а) Пусть $v_1, \ldots, v_h$ — первые h легких вершин этого ребра. В силу того, что первое условие на перекраску для каждой из них было выполнено, но цвет они так и сменили, их перекраска была заблокирована почти одноцветными ребрами $B_1, \ldots, B_h$ с доминирующими цветами $\beta_1, \ldots, \beta_h$. Эти ребра мы назовем *новыми* потомками ребра A. Заметим, что в начальной раскраске ξ ребро A могло быть неодноцветным, а лишь почти одноцветным цвета α. В этом случае, вершины, которые не были покрашены в доминирующий цвет, должны были сменить свой цвет на α на первом этапе процесса перекраски. Это означает, что все эти вершины $w_1, \ldots, w_k$, $k \leqslant s$, являются тяжелыми и есть набор тяжелых ребер $C_1, \ldots, C_k$, повлиявших на них. Эти ребра мы назовем *старыми* потомками ребра A.

б) Дальнейший анализ ветвей, начинающихся с ребер $C_1, \ldots, C_k$, является полностью таким же, как и в предыдущем случае, ведь здесь перекрашиваются только тяжелые вершины. Все потомки будут соединяться через тяжелые вершины, а потому мы их будем называть *старыми*.

в) Далее, если в начальной раскраске ξ только вершина v_i не была покрашена в цвет β_i, то и ветвь ребра B_i закончена. Если же нет, то пусть $v_{i,1}, \ldots, v_{i,l_i}$, $l_i \leqslant s-1$ — другие вершины ребра B_i, покрашенные изначально не в доминирующий цвет β_i. Тогда к моменту рассмотрения v_i все эти вершины должны были сменить цвет на β_i. Значит, для каждой вершины $v_{i,j}$ найдется либо тяжелое (если $v_{i,j}$ — тяжелая вершина), либо легкое (если $v_{i,j}$ — легкая вершина) ребро $C_{i,j}$, одноцветное не цвета β_i, которое повлияло на вершину $v_{i,j}$. В первом случае $C_{i,j}$ назовем *старым* потомком B_i, а во втором — *новым*.

г) Если $v_{i,j}$ — тяжелая вершина, то анализ ветви $C_{i,j}$ будет тем же, что и на первом этапе. Здесь будут только старые потомки. В случае же легкого ребра $C_{i,j}$ возможны как новые, так и старые потомки. Анализ таков же, как и анализ ребра A.

Повторяем процедуру, пока не закончится набор каждой ветви дерева с корнем

A из ребер гиперграфа H. В результате мы получим дерево зависимостей $\mathcal{T}$ с корнем A и со следующими свойствами.

1. Вершинами этого дерева являются легкие и тяжелые ребра H, которые являются одноцветными или почти одноцветными в начальной раскраске ξ.

2. Если две вершины C, B образуют ребро в $\mathcal{T}$, то как ребра гиперграфа H они должны иметь общий элемент $v = C \cap B$, который мы будем называть *узловой* вершиной дерева $\mathcal{T}$. Классификация вершин в этом случае является более сложной. Возможны следующие варианты. Будем считать, что C находится ближе к корню, чем B.

    - Вершина v является тяжелой, ребро B — тяжелым одноцветным в ξ, а C — почти одноцветным легким в ξ. Это узловая вершина *нулевого типа.*
    - Вершина v является тяжелой, ребро B — тяжелым одноцветным в ξ, а C — почти одноцветным тяжелым в ξ. Это узловая вершина *первого типа.*
    - Вершина v является тяжелой, ребро B — тяжелым почти одноцветным в ξ, а C — тяжелым одноцветным в ξ. Это узловая вершина *второго типа.*
    - Вершина v является легкой, ребро B — одноцветным легким в ζ, а ребро C — почти одноцветным (легким или тяжелым) в ξ. Это узловая вершина *третьего типа.*
    - Вершина v является легкой, ребро C — одноцветным легким в ζ, а ребро B — почти одноцветным (легким или тяжелым) в ξ. Это узловая вершина *четвертого типа.*

    В первом и третьем случаях ребро B влияет на вершину v, а во втором и четвертом — блокирует его перекраску. В одном случае значение η_v должно быть равно доминирующему цвету C, а в другом — доминирующему цвету B.

3. Степень каждой вершины $\mathcal{T}$ не превосходит $h + s$.

4. Степень корня всегда не меньше h.

Обозначим через $\mathcal{C}(\mathcal{T}')$ событие, состоящее в том, что дерево $\mathcal{T}'$ является деревом зависимостей на втором этапе перекраски.

Дальнейший вероятностный анализ зависит от того, образует ли набор вершин $\mathcal{T}'$, как набор ребер гиперграфа H, гипердерево или нет.

1.4.3 Анализ первого этапа процесса перекраски

Пусть $\mathcal{T}$ — дерево зависимостей размера T (то есть число вершин в дереве $\mathcal{T}$ равно T) на первом этапе перекраски. Оценим вероятность события $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ в зависимости от реальной структуры дерева.

Первый случай: гипердерево

Пусть набор вершин дерева $\mathcal{T}$ образует гипердерево размера T в H. Тогда одноцветные ребра нашего дерева не пересекаются, а с почти одноцветными ребрами они пересекаются только по узловым вершинам и только при условии соседства в $\mathcal{T}$.

Пусть $A_1, \dots, A_T$ — ребра гиперграфа H, они же являются вершинами $\mathcal{T}$. Если $\mathcal{T}$ является деревом зависимостей, то каждое A_i является либо одноцветным цвета α_i ребром H в раскраске ξ, либо почти одноцветным ребром с доминирующим цветом α_i в раскраске ξ. Тогда при фиксированных $\alpha_1, \dots, \alpha_T$ однозначно определён цвет любой вершины гипердерева в начальной раскраске ξ, ведь либо вершина лежит в одноцветном ребре, либо является неузловой вершиной почти одноцветного ребра и, стало быть, должна быть покрашена в его доминирующий цвет. Далее, для каждой узловой вершины v будет однозначно определено значение η_v. Наконец, номер узловой вершины, принадлежащей одноцветному ребру A, среди тяжёлых вершин этого ребра не может превосходить степени A как вершины дерева $\mathcal{T}$.

Обозначим через $\mathcal{A}_1(\mathcal{T})$ событие $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ в случае, если рассматриваемая конфигурация ребер гиперграфа является гипердеревом. Тогда вероятность подобного события оценивается следующим образом:

$$\mathsf{P}(\mathcal{A}_1(\mathcal{T})|\alpha_1, \dots, \alpha_T) =$$

$$= \left(\frac{1}{r}\right)^{T(n-1)+1} \frac{1}{(r-1)^{T-1}} \prod_{i:\rho(A_i)=0 \pmod 2} \left[\frac{1}{(|(A_i)_R|)_{\deg(A_i)}}\right], \qquad (1.9)$$

где через $\deg(A_i)$ обозначена степень вершины A_i в дереве $\mathcal{T}$, а через $(a)_b$ обозначено число размещений без повторения, $(a)_b = a(a-1)\dots(a-b+1)$.

Упростим немного формулу (1.9). Заметим, во-первых, что $\deg(A_i) \leqslant h$ для одноцветного ребра A_i. Далее, всего в конфигурации из T ребер есть ровно $T-1$ узловых вершин, каждая из которых содержится ровно в одном одноцветном и ровно в одном почти одноцветном ребре. Отсюда

$$\sum_{i:\rho(A_i)=0 \pmod 2} \deg(A_i) = T - 1.$$

Значит, выражение в (1.9) не превосходит

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{T(n-1)+1} \frac{1}{(r-1)^{T-1}} \prod_{i:\rho(A_i)=0(\mod 2)} \left[\frac{1}{(n/2-\deg(A_i)+1)^{\deg(A_i)}}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{nT-T+1} \left(\frac{1}{(r-1)(n/2-h)}\right)^{T-1}.$$

Добавив выбор цветов $r(r-1)^{T-1}$ (цвета соседей не должны совпадать), получаем следующую оценку:

$$\mathsf{P}(\mathcal{A}_1(\mathcal{T})) \leqslant r(r-1)^{T-1} \left(\frac{1}{r}\right)^{nT-T+1} \left(\frac{1}{(r-1)(n/2-h)}\right)^{T-1} =$$
$$= \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)T} \frac{1}{(n/2-h)^{T-1}}. \tag{1.10}$$

Теперь оценим вклад событий типа $\mathcal{A}_1$ в локальный многочлен. Локальную лемму (теорема 1.4) мы будем применять к случайным векторам $Y_1, \ldots, Y_N$, где $Y_j = (\xi_j, \eta_j, X_j)$. Легко понять, что для дерева зависимостей размера T выполнено

$$vln(\mathcal{A}_1(\mathcal{T})) = nT - n + 1 \leqslant nT,$$

т.е. просто равно числу вершин гиперграфа в конфигурации.

Оценим число деревьев зависимостей, в которых может поучаствовать фиксированная вершина v. Для этого мы сопоставим дереву зависимостей $\mathcal{T}$ обычное непомеченное дерево t с корнем. Для каждого такого дерева зафиксируем нумерацию вершин $\tau(t)$, начиная с корня и продолжая по возрастанию расстояния от него (корень имеет номер 1, его потомки — 2,3,... и т.д.). Пусть $\mathcal{T}$ — гипердерево из T тяжелых ребер, для которого выполнено событие $\mathcal{A}_1(\mathcal{T})$. В рамках этого события все потомки одноцветных ребер имеют свой внутренний номер, отвечающий номеру вершины в его пересечении с родителем. Например, пусть ребра $A_1, \ldots, A_x$ — потомки одноцветного ребра A, $v_i = A \cap A_i$. Тогда если $\sigma(A, v_1) < \ldots < \sigma(A, v_x)$, то ребро A_1 имеет внутренний номер 1, A_2 — номер 2 и т.д.

Тогда сопоставление дерева t гипердереву $\mathcal{T}$ должно соблюдать внутреннюю нумерацию у потомков каждого одноцветного ребра. Так если внутренний номер A_1 меньше номера A_2, то соответствующие им узлы u_1, u_2 дерева t должны идти в том же порядке по нумерации $\tau(t)$.

Дерево t размера T можно выбрать не более чем $4^T/T$ способами. Тяжелое ребро A_1, содержащее v, можно выбрать не более чем $\Delta = \Delta(H)$ способами. Место ребра A_1 в дереве зависимостей можно выбрать не более чем T способами.

Далее, каждое следующее ребро в конфигурации гиперграфа можно выбрать не более чем $n\delta$ способами (мы заполняем дерево так: сначала доходим до корня, а затем по возрастанию номеров вершин в дереве), ведь мы должны сначала выбрать тяжелую вершину в предыдущем ребре-соседе, а затем — тяжелое ребро ее содержащее. Наконец, размер T должен быть не меньше $h+1$. Следовательно, получаем следующую оценку вклада событий этого типа в локальный многочлен:

$$w_1(z) \leqslant \sum_{T=h+1}^{+\infty} \frac{4^T}{T} \Delta\, T\, (n\delta)^{T-1} \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)T} \frac{1}{(n/2-h)^{T-1}} z^{nT} \leqslant$$

(учитывая (1.3.C.1), (1.3.C.2))

$$\leqslant \sum_{T=h+1}^{+\infty} (4z^n)^T n^{a_0} c^{T-1} \left(\frac{n}{n/2-h}\right)^{T-1}.$$

При $z = z_0 = 1/(1-\tau)$, $\tau = 1/(n+1)$, и $h < n/4$, имеем

$$w_1(z_0) \leqslant \sum_{T=h+1}^{+\infty} (4e)^T n^{a_0} c^{T-1} 4^{T-1} \leqslant 4en^{a_0} \sum_{T=h+1}^{+\infty} (16e\,c)^{T-1} \leqslant$$

(при $16ec < 1$)

$$\leqslant \frac{4en^{a_0}}{1-16ec}(16e\,c)^h. \tag{1.11}$$

Второй случай: есть гиперциклы

Рассмотрим теперь случай, когда из ребер гиперграфа, входящих в дерево зависимостей $\mathcal{T}$, можно составить гиперцикл. Выберем минимальное по размеру поддерево $\mathcal{T}'$, содержащие гиперцикл. Под *поддеревом* мы понимаем вершину дерева (корень поддерева) и всех ее потомков. Все прямые поддеревья $\mathcal{T}'$, т.е. поддеревья, корнями которых являются потомки корня $\mathcal{T}'$, являются гипердеревьями в силу минимальности $\mathcal{T}'$. Введем также некоторый параметр q. Тогда возможны следующие варианты.

- Нашлось прямое поддерево зависимостей размера не менее q.
- Все прямые поддеревья имеют размер не более $q-1$. Тогда найдутся два поддерева, которые пересекаются по вершинам. Вместе с корнем $\mathcal{T}'$ получится цикл длины не более $2q$. Значит, найдется и простой цикл длины не более $2q$.

Проанализируем первый вариант. В нем мы снова имеем дерево зависимостей $\mathcal{T}$ размера не менее q, единственное отличие — это то, что при фиксированных цветах ребер $\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\mathcal{T}|}$ (для одноцветного ребра — это его цвет в ξ, для почти одноцветного — его доминирующий цвет в ξ) мы знаем все изначальные цвета вершин в корне дерева A_1 за исключением одной вершины, через которую она "соединяется" к своему предку в полном дереве зависимостей. Для подобной вершины w должно быть выполнено $\xi_w \neq \alpha_1$, а $\eta_w = \alpha_1$. Стало быть вероятность подобного события $\mathcal{A}_2(\mathcal{T})$ можно оценить, как и вероятность $\mathcal{A}_1(\mathcal{T})$ (см. (1.9)), только умноженную на n (выбор особой вершины w в корне). Вклад же таких событий в локальный многочлен тоже можно оценить аналогичным образом при $z = z_0 = 1 + 1/n$:

$$w_2(z_0) \leqslant \sum_{T=q}^{+\infty} \frac{4^T}{T} \Delta\, T\, (n\delta)^{T-1} \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)T} \frac{1}{(n/2-h)^{T-1}} n z_0^{nT} \leqslant$$

(см. (1.11))

$$\leqslant \frac{4en^{a_0+1}}{1-16ec}(16e\, c)^{q-1}. \tag{1.12}$$

Осталось разобраться с простым циклом. Пусть $(A_1, \ldots, A_t)$ — полученный простой цикл. Заметим, что каждое из ребер является либо почти одноцветным, либо одноцветным в начальной раскраске ξ. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ — доминирующие цвета этих ребер в ξ. Тогда в каждом ребре A_j найдется не более s вершин, раскрашенных в α_j в ξ, однако для каждой вершины $w \in A_j$ такой, что $\xi_w \neq \alpha_j$, выполнено $\eta_w = \alpha_j$. Тем самым, должно быть выполнено событие

$$\mathcal{B}(A_j) = \left(\bigcap_{w \in A_j} \{\{\xi_w = \alpha_j\} \cup \{\xi_w \neq \alpha_j, \eta_w = \alpha_j\}\}\right) \cap \left\{\sum_{w \in A_j} I\{\xi_w \neq \alpha_j\} \leqslant s\right\}.$$

В силу того, что цикл простой, каждое ребро содержит $n-2$ вершины, не содержащиеся в других ребрах цикла. Стало быть, обозначив через $\mathcal{B}(A_1, \ldots, A_t)$ пересечение событий $\mathcal{B}(A_j)$, получаем, что

$$\mathsf{P}\left(\mathcal{B}(A_1, \ldots, A_t) | \alpha_1, \ldots, \alpha_t\right) \leqslant \left(\sum_{i=0}^{s} \binom{n-2}{i} \left(\frac{1}{r}\right)^{n-2}\right)^t \leqslant$$

$$\leqslant r^{-(n-2)t} n^{st} \left(\sum_{i=0}^{s} \frac{1}{i!}\right)^t \leqslant r^{-(n-2)t} n^{st} e^t.$$

Учитывая выбор цветов, имеем

$$\mathsf{P}\left(\mathcal{B}(A_1, \ldots, A_t)\right) \leqslant r^{3t-nt} n^{st} e^t. \tag{1.13}$$

Осталось оценить вклад данного типа событий в локальный полином. Для каждой вершины v содержащее ее ребро цикла можно выбрать не более чем Δ способами. Далее, номер ребра j в цикле можно выбрать не более чем t способами. Если номер строго меньше t, то ребра $A_1, \ldots, A_{t-1}$, кроме j, можно выбрать не более чем $n\Delta$ способами. Ребро же A_t должно пересекать, как A_1, так и A_{t-1}, поэтому в силу простоты гиперграфа H такое ребро можно выбрать не более чем n^2 способами, ведь каждая пара вершин, одна из A_1, вторая из A_{t-1}, однозначно определяет подобное ребро. Если же $j = t$, то мы сначала выбираем $A_2, \ldots, A_{t-1}$ не более чем $(n\Delta)^{t-2}$ способами, а ребро A_1 — не более n^2 способами.

В итоге, получаем следующую оценку вклада событий $\mathcal{B}(A_1, \ldots, A_t)$ в локальный полином при $z = z_0 = 1 + 1/n$:

$$w_3(z_0) \leqslant \sum_{t=3}^{2q} t\Delta(n\Delta)^{t-2} r^{3t-nt} n^{st} e^t z_0^{nt} \leqslant$$

(учитывая ((1.3.C.1)))

$$\leqslant \sum_{t=3}^{2q} t n^{(a_0+s)t} r^{2t-n+1} e^{2t} \leqslant 2q e^{4q} n^{2q(a_0+s)} r^{2q+1-n}. \tag{1.14}$$

На этом анализ первого этапа перекраски закончен.

1.4.4 Анализ второго этапа перекраски

Пусть $\mathcal{T}$ — дерево зависимостей размера T на втором этапе перекраски. Оценим вероятность события $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ в зависимости от реальной структуры дерева. Как и в анализе первого этапа рассмотрим сначала случай, когда ребра гиперграфа, входящие в $\mathcal{T}$, образуют гипердерево.

Оценка вероятности подобного события $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ будет почти такой же, как и на первом этапе. Действительно, пусть снова $A_1, \ldots, A_T$ — ребра гиперграфа, вершины $\mathcal{T}$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_T$ — соответствующий им набор цветов (для одноцветного ребра — это его цвет в ξ, для почти одноцветного — его доминирующий цвет в ξ). Тогда при фиксированных $\alpha_1, \ldots, \alpha_T$ однозначно определен цвет любой вершины гипердерева в начальной раскраске ξ, ведь либо вершина лежит в одноцветном ребре, либо является неузловой вершиной почти одноцветного ребра и, стало быть, должна быть покрашена в его доминирующий цвет. Далее, для каждой узловой вершины v определено значение η_v. Наконец, каждая узловая вершина имеет номер не более $\deg(A)$ среди вершин того же типа в содержащем ее одноцветном ребре A (для тяжелых вершин — одноцветное в ξ тяжелое ребро, а для легких — одноцветное в ζ легкое ребро). Тогда, учитывая, что степень каждой вершины дерева не превосходит $h+s$, вероятность рассматриваемого события $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ оценивается следующим образом:

$$\mathsf{P}(\mathcal{C}(\mathcal{T})|\alpha_1,\ldots,\alpha_T) \leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{T(n-1)+1} \frac{1}{(r-1)^{T-1}} \left(\frac{1}{n/2-h-s}\right)^{T-1}.$$

Добавив выбор цветов $r(r-1)^{T-1}$ способами (цвета соседей не должны совпадать), получаем, что

$$\mathsf{P}(\mathcal{C}(\mathcal{T})) \leqslant r(r-1)^{T-1} \left(\frac{1}{r}\right)^{nT-T+1} \left(\frac{1}{(r-1)(n/2-h-s)}\right)^{T-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)T} \frac{1}{(n/2-h-s)^{T-1}}. \qquad (1.15)$$

Теперь оценим вклад в локальный полином. Дерево t размера T можно выбрать не более чем $4^T/T$ способами. Каждое ребро дерева соответствует узловой вершине, их типы можно выбрать не более чем 5^T способами. Тяжелое ребро A_1, содержащее фиксированную вершину v, можно выбрать не более чем Δ способами. Место ребра A_1 в дереве зависимостей можно выбрать не более чем T способами. Далее, каждое следующее ребро в конфигурации гиперграфа соединяется с одним из предыдущих по узловой вершине. Мы сначала поднимаемся вверх до корня, а затем идем вниз согласно нумерации вершин дерева. Каждый раз узловую вершину можно выбрать не более чем n способами. А новое ребро

- не более чем δ способами, если узловая вершина — легкая (третий и четвертый тип);
- не более чем δ способами, если узловая вершина является тяжелой первого или второго типа (мы присоединяем тяжелое ребро);
- не более чем δ способами, если узловая вершина является тяжелой нулевого типа и мы идем вниз от корня (присоединяем тяжелое ребро);
- не более чем Δ способами, если узловая вершина является тяжелой нулевого типа и мы идем вверх к корню (присоединяем легкое ребро).

Таким образом, только в последнем случае выбор ребра не оценивается сверху величиной δ. Покажем, однако, что последний вариант является крайне редким.

Утверждение 1.1. *При прямом движении от любой вершины дерева зависимостей второго этапа перекраски к корню узловая вершина нулевого уровня встречается не более одного раза.*

Доказательство. Данный факт легко вытекает из построения дерева зависимостей на втором этапе. Если двигаться вниз по дереву, начиная с корня, то, как несложно понять, первая встреченная узловая тяжелая вершина будет иметь нулевой или первый тип, это будет первая вершина, присоединяющая старого потомка. Все последующие узловые вершины также будут присоединять старых потомков и будут иметь либо первый, либо второй тип (их перекраска или блокировка происходила еще на первом этапе перекраски). $\square$

Подведем промежуточные итоги. При фиксированном выборе структуры дерева, положения в нем ребра, содержащего вершину v, и выборе типов узловых вершин все ребра гипердерева можно выбрать не более чем $\Delta(n\delta)^{T-2}(n\Delta)$ способами. Следовательно, из (1.15) получаем

$$w_4(z) \leqslant \sum_{T=h+1}^{+\infty} \frac{4^T}{T} T 5^T \Delta(n\delta)^{T-2}(n\Delta) \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)T} \frac{1}{(n/2-h-s)^{T-1}} z^{nT}.$$

При $z = z_0 = 1 + 1/n$, и $h + s < n/4$, имеем

$$w_4(z_0) \leqslant \sum_{T=h+1}^{+\infty} (20e)^T n^{2a_0} c^{T-2} 4^{T-1} \leqslant 1600 e^2 n^{2a_0} \sum_{T=h+1}^{+\infty} (80e\,c)^{T-2} \leqslant$$

(при $80ec < 1$)

$$\leqslant \frac{1600 e^2 n^{2a_0}}{1-80ec}(80e\,c)^{h-1}. \tag{1.16}$$

Осталось разобрать случай, когда ребра, входящие в $\mathcal{T}$, могут образовывать гиперцикл. Здесь, как и раньше, возможны две ситуации: либо есть поддерево без гиперциклов размера не меньше q, либо простой цикл размера не более $2q$. Второй случай был уже разобран нами в рамках анализа первого этапа перекраски (там мы использовали только изначальную одноцветность или почти одноцветность множества ребер). А анализ большого поддерева полностью повторяет рассуждения аналогичного случая первого этапа. Для оценки вклада достаточно умножить на n оценку (1.16) и заменить $h+1$ на q. Значит,

$$w_5(z_0) \leqslant \frac{1600 e^2 n^{2a_0+1}}{1-80ec}(80e\,c)^{q-2}. \tag{1.17}$$

Перейдем к анализу последнего плохого события.

1.4.5 Анализ возникновения большого числа изменений цветов

Единственный оставшийся неразобранным случай (плохое событие типа $\mathcal{D}$) состоит в том, что некоторое ребро $A \in E$ не было одноцветным или почти одноцветным цвета α в начальной раскраске ξ, но стало одноцветным цвета α к концу второго этапа перекраски. Тогда в этом ребре было изначально не менее $s+1$ вершины другого цвета и все они сменили цвет в процессе перекраски. Пусть $v_1, \ldots, v_{m_1}$ — это все подобные легкие вершины ребра A, а $v_{m_1+1}, \ldots, v_{m_1+m_2}$ — тяжелые, где $m_1 + m_2 \geqslant s$.

Вершина v_i при $i > m_1$ является тяжелой, а потому она должна была сменить свой цвет на первом этапе. Обозначим через B_i — тяжелое ребро, которое повлияло на v_i. Заметим, что B_i обязано быть одноцветным в начальной раскраске ξ. Если же $i \leqslant m_1$, то вершина v_i перекрашивалась на втором этапе, пусть ребро C_i повлияло на нее. Тогда C_i – легкое ребро, одноцветное в промежуточной раскраске ζ и почти одноцветное в ξ. Тогда в начальной раскраске оно могло иметь ряд тяжелых вершин, не более s, $w_i^1, \ldots, w_i^{x_i}$, $x_i \leqslant s$, имевших отличный от цвета v_i цвет в ξ. Обозначим через $D_i^1, \ldots, D_i^{x_i}$ — одноцветные в ξ тяжелые ребра, повлиявшие на перекраску $w_i^1, \ldots, w_i^{x_i}$.

Обозначим через $\mathcal{T} = (A, C_1, \ldots, C_{m_1}, B_{m_1+1}, \ldots, B_{m_1+m_2}, D_1^1, \ldots, D_{m_1}^{x_{m_1}})$ получившийся набор ребер. Заметим, что $\mathcal{T}$ — это гипердерево в силу того, что обхват гиперграфа H строго больше пяти. Обозначим вышеописанное событие через $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ и оценим его вероятность. При фиксированном выборе цветов ребер $\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m_1}, \beta_{m_1+1}, \ldots, \beta_{m_1+m_2}, \theta_1^1, \ldots, \theta_{m_1}^{x_{m_1}}$, где цвет ребра A — это его цвет в финальной раскраске, а для остальных — доминирующий в ξ цвет, определены изначальные цвета всех вершин гипердерева. Также однозначно определены значения случайных величин η_w для вершин, лежащих в пересечении ребер, $v_1, \ldots, v_{m_1+m_2}, w_1^1, \ldots, w_{m_1}^{x_{m_1}}$. Наконец, для этих вершин должны быть выполнены условия для перекраски, они должны иметь номер не более h в соответствующем множестве тяжелых или легких вершин:

$$\sigma(v_i, (C_i)_L) \leqslant h,\ i \leqslant m_1;$$

$$\sigma(v_i, (B_i)_R) \leqslant h,\ i > m_1;$$

$$\sigma(w_i^j, (D_i^j)_R) \leqslant h.$$

Все указанные множества вершин не пересекаются, а потому события независимы.

Стало быть,

$$\mathsf{P}(\mathcal{D}(\mathcal{T})|\alpha,\ldots,\theta_{m_1}^{x_{m_1}}) \leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)(1+m_1+m_2+x_1+\ldots+x_{m_1})+1} \times$$

$$\times(r-1)^{-(m_1+m_2+x_1+\ldots+x_{m_1})}\left(\prod_{i=1}^{m_1}\frac{h}{|(C_i)_L|}\right)\times$$

$$\times\left(\prod_{i=m_1+1}^{m_1+m_2}\frac{h}{|(B_i)_R|}\right)\left(\prod_{i=1}^{m_1}\prod_{j=1}^{x_i}\frac{h}{|(D_i^j)_R|}\right)\leqslant$$

(т.к. мощности подмножеств не меньше $n/2$)

$$\leqslant\left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)(1+m_1+m_2+x_1+\ldots+x_{m_1})+1}(r-1)^{-(m_1+m_2+x_1+\ldots+x_{m_1})}\times$$

$$\times\left(\frac{2h}{n}\right)^{m_1+m_2+x_1+\ldots+x_{m_1}}.$$

Суммируя по всем возможным выборам цветов, $r(r-1)^{m_1+m_2+x_1+\ldots+x_{m_1}}$, получаем, что

$$\mathsf{P}(\mathcal{D}(\mathcal{T}))\leqslant\left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)(1+m_1+m_2+x_1+\ldots+x_{m_1})}\left(\frac{2h}{n}\right)^{m_1+m_2+x_1+\ldots+x_{m_1}}. \tag{1.18}$$

Осталось оценить вклад в локальный полином событий типа $\mathcal{D}(\mathcal{T})$. Пусть v — фиксированная вершина гиперграфа. Если v принадлежит ребру A, то

- само A можно выбрать не более чем Δ способами;
- ребра $C_1,\ldots,C_{m_1}$ — не более чем $\binom{n\delta}{m_1}$ способами (т.к общие вершины должны быть легкими);
- ребра $B_{m_1+1},\ldots,B_{m_1+m_2}$ — не более чем $\binom{n\delta}{m_2}$ способами (все ребра – тяжелые);
- ребра $D_1^1,\ldots,D_{m_1}^{x_{m_1}}$ — не более чем $\prod_{i=1}^{m_1}\binom{n\delta}{x_i}$ способами.

Если v принадлежит ребру C_j, то

- ребро C_j можно выбрать не более чем Δ способами;
- ребро A — не более чем $n\delta$ способами;
- ребра $C_1,\ldots,C_{m_1}$, кроме C_j, — не более чем $\binom{n\delta-1}{m_1-1}$ способами;

- ребра $B_{m_1+1}, \ldots, B_{m_1+m_2}$ — не более чем $\binom{n\delta}{m_2}$ способами;
- ребра $D_1^1, \ldots, D_{m_1}^{x_{m_1}}$ — не более чем $\prod_{i=1}^{m_1} \binom{n\delta}{x_i}$ способами.

Если v принадлежит ребру B_j, то

- ребро B_j можно выбрать не более чем δn способами;
- ребро A — не более чем $n\Delta$ способами;
- ребра $C_1, \ldots, C_{m_1}$ — не более чем $\binom{n\delta}{m_1}$ способами;
- ребра $B_{m_1+1}, \ldots, B_{m_1+m_2}$, кроме B_j, — не более чем $\binom{n\delta-1}{m_2-1}$ способами;
- ребра $D_1^1, \ldots, D_{m_1}^{x_{m_1}}$ — не более чем $\prod_{i=1}^{m_1} \binom{n\delta}{x_i}$ способами.

Наконец, если v принадлежит одному из ребер D_i^j, то

- ребро D_i^j можно выбрать не более чем δn способами;
- ребро C_i — не более чем $n\Delta$ способами;
- ребро A — не более чем $n\delta$ способами;
- ребра $C_1, \ldots, C_{m_1}$, кроме C_i — не более чем $\binom{n\delta-1}{m_1-1}$ способами;
- ребра $B_{m_1+1}, \ldots, B_{m_1+m_2}$ — не более чем $\binom{n\delta}{m_2}$ способами;
- ребра $D_1^1, \ldots, D_{m_1}^{x_{m_1}}$, кроме D_i^j, — не более чем $\frac{x_i}{n\delta} \prod_{k=1}^{m_1} \binom{n\delta}{x_k}$ способами.

Таким образом, получается следующая оценка числа гипердеревьев:

$$(1 + m_1 + m_2 + m_1(x_1 + \ldots + x_{m_1}))\Delta \binom{n\delta}{m_1} \binom{n\delta}{m_2} \prod_{i=1}^{m_1} \binom{n\delta}{x_i} \leqslant$$

(т.к. каждый x_i не превосходит s)

$$\leqslant (1 + m_1 + m_2 + sm_1^2)\Delta(n\delta)^{m_1+m_2+x_1+\ldots+x_{m_1}} \frac{1}{m_1!m_2!} \prod_{i=1}^{m_1} \frac{1}{x_i!}.$$

Собирая данную оценку вместе с (1.18), мы получаем следующий вклад рассматриваемых событий в локальный полином,

$$w_6(z_0) \leqslant \sum_{m=s+1}^{n} \sum_{m_1,m_2: m_1+m_2=m} \sum_{x_1,\ldots,x_{m_1}=1}^{s} \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)(1+m_1+m_2+x_1+\ldots+x_{m_1})} \times$$

$$\times \left(\frac{2h}{n}\right)^{m_1+m_2+x_1+\ldots+x_{m_1}} (1+m_1+m_2+sm_1^2)\Delta(n\delta)^{m_1+m_2+x_1+\ldots+x_{m_1}} \times$$

$$\times \frac{1}{m_1!m_2!}\left(\prod_{i=1}^{m_1}\frac{1}{x_i!}\right)\cdot z_0^{n(1+m_1+m_2+x_1+\ldots+x_{m_1})} \leqslant$$

(используем условие (1.3.C.1) и $\delta = cr^{n-1}$)

$$\leqslant \sum_{m=s+1}^{n}\sum_{m_1,m_2:m_1+m_2=m}\sum_{x_1,\ldots,x_{m_1}=1}^{s} n^{a_0}\frac{(1+m_1+m_2+sm_1^2)(2ch)^{m_1+m_2}}{m_1!m_2!}\times$$

$$\times\left(\prod_{i=1}^{m_1}\frac{(2ch)^{x_i}}{x_i!}\right) z_0^{n(1+m_1+m_2+x_1+\ldots+x_{m_1})} \leqslant$$

(т.к. $z_0 = 1+1/n$, то $z_0^n < e$)

$$\leqslant \sum_{m=s+1}^{n}\sum_{m_1,m_2:m_1+m_2=m}\sum_{x_1,\ldots,x_{m_1}=1}^{s} (en^{a_0})\frac{(1+m_1+m_2+sm_1^2)(2ech)^{m_1+m_2}}{m_1!m_2!}\times$$

$$\times\left(\prod_{i=1}^{m_1}\frac{(2ech)^{x_i}}{x_i!}\right) = \sum_{m=s+1}^{n}\sum_{m_1,m_2:m_1+m_2=m}(en^{a_0})\times$$

$$\times\frac{(1+m_1+m_2+sm_1^2)(2ech)^{m_1+m_2}}{m_1!m_2!}\prod_{i=1}^{m_1}\left(\sum_{x_i=0}^{s}\frac{(2ech)^{x_i}}{x_i!}\right) \leqslant$$

(оценим $\sum_{x_i=0}^{s}\frac{(2ech)^{x_i}}{x_i!}$ экспонентой e^{2ceh})

$$\leqslant en^{a_0}\sum_{m=s+1}^{n}\sum_{m_1,m_2:m_1+m_2=m}\frac{(1+m_1+m_2+sm_1^2)(2ech)^{m_1+m_2}}{m_1!m_2!}e^{2cehm_1} \leqslant$$

(заметим, что $1+m_1+m_2+sm_1^2 \leqslant (s+1)m^2$ и $m_1 \leqslant m$)

$$\leqslant en^{a_0}\sum_{m=s+1}^{n}\frac{(s+1)m^2(2ech)^m e^{2chm}}{m!}\sum_{m_1,m_2:m_1+m_2=m}\frac{m!}{m_1!m_2!} =$$

$$= en^{a_0}\sum_{m=s+1}^{n}\frac{(s+1)m^2(4ech)^m e^{2chm}}{m!} \leqslant |\text{т.к. } s+1\leqslant n,\ m! > (m/e)^m| \leqslant$$

$$\leqslant en^{a_0+1}(4e^2ch)^2e^{4ch}\sum_{m=s+1}^{n}\left(\frac{(4e^2ch)e^{2ch}}{m}\right)^{m-2}.$$

Если предположить, что $(4e^2ch)e^{2ch} < s/2$, то получается следующее неравенство

$$w_6(z_0) \leqslant en^{a_0+3}2^{2-s}. \tag{1.19}$$

1.4.6 Выбор параметров и завершение доказательства

Мы готовы завершить доказательство теоремы. Возьмем в качестве $w(z)$ сумму $\sum_{i=1}^{6} w_i(z)$. Для применения Локальной леммы (теорема 1.4) нам достаточно показать, что

$$w(z_0) = w\left(\frac{1}{1-\tau}\right) \leqslant \tau, \quad \text{где } \tau = \frac{1}{n+1}.$$

Осуществим следующий выбор параметров h, s, q:

$$h = q = \lceil \ln n \rceil, \quad s = \lceil n^{1/2} \rceil.$$

Тогда легко видно, что при всех достаточно больших n и $c < 1/4$ будут выполнены те условия, которые были нам необходимы для получения оценок $w_i(z_0)$:

$$h + s < n/4, \quad (4e^2ch)e^{2ch} < s/2.$$

В итоге, из оценок (1.11), (1.12), (1.14), (1.16),(1.17) и (1.19) при данном выборе параметров вытекает, что

$$w(z_0) = \sum_{i=1}^{6} w_i(z_0) \leqslant \frac{4en^{a_0}}{1-16ec}(16e\,c)^h +$$

$$+\frac{4en^{a_0+1}}{1-16ec}(16e\,c)^{q-1} + 2qe^{4q}n^{2q(a_0+s)}2^{2q+1-n} +$$

$$+\frac{1600e^2n^{2a_0}}{1-80ec}(80e\,c)^{h-1} + \frac{1600e^2n^{2a_0+1}}{1-80ec}(80e\,c)^{q-2} + en^{a_0+3}2^{2-s}. \tag{1.20}$$

Заметим, что при $h = q \sim \ln n$, а $s \sim n^{1/2}$ и подходящем выборе (в зависимости от a_0) очень маленькой константы c,

$$n^{2a_0+1}(80e\,c)^{\ln n} = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n^{a_0+3}2^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и}$$

$$qe^{4q}n^{2q(a_0+s)}2^{2q+1-n} = 2^{-n+O(\sqrt{n}(\ln n)^2)} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Стало быть, существует такая константа $c = c(a_0) > 0$, что для всех достаточно больших n правая часть (1.20) будет не превосходить $1/(n+1)$. Значит, к нашему набору плохих событий применима Локальная лемма, которая утверждает, что с положительной вероятностью ни одно из них не будет выполнено. Следовательно, с положительной вероятностью итоговая случайная раскраска будет правильной для гиперграфа H. Теорема 1.3 доказана.

1.5 Дополнение

Несмотря на то, что теорема 1.3 формально выполнена только для гиперграфов с обхватом больше пяти, ее утверждение может быть доказано и для класса простых гиперграфов, тем самым, полностью усилив теорему 1.2 Косточки и Кумбхата. Единственное место в доказательстве, где использовалось отсутствие циклов длины не более пяти — это анализ плохого события типа $\mathcal{D}$. Здесь потребовалось бы дополнительное рассмотрение ситуаций с короткими циклами (аналогичных тем, это были рассмотрены для других плохих событий), что заняло бы не одну страницу текста. Однако, для простых гиперграфов мы не получаем новых оценок для числа ребер, в связи с чем было решено оставить этот случай без доказательства.

Глава 2

Онлайн предписанное хроматическое число гиперграфов

Данная глава посвящена онлайн раскраскам гиперграфов. Результаты этой главы опубликованы в работе [A3].

2.1 Определения

Рассмотрим гиперграф $H = (V, E)$. Подмножество вершин $W \subset V$ называется независимым в гиперграфе H, если оно не содержит полностью ни одного ребра из H, т.е. для любого $A \in E, A \setminus W \neq \emptyset$.

Как уже упоминалось в первой главе, раскраской множества вершин f является отображение из множества вершин гиперграфа V в некоторое множество цветов C. Раскраска гиперграфа H называется правильной, если в данной раскраске множество E не содержит одноцветных ребер. Хроматическим числом $\chi(H)$ гиперграфа H называется такое минимальное r, для которого существует правильная раскраска гиперграфа H в r цветов. Гиперграф H при этом называется r-раскрашиваемым.

Несколько иначе формулируется определение предписанного хроматического числа. Гиперграф $H = (V, E)$ называется предписанно r-раскрашиваемым, если для каждого предложенного списка цветов $L = \{L(v) : |L(v)| = r, v \in V\}$ (такой список будем называть r-однородным вершинным предписанием), существует правильная раскраска, соответствующая предписанию, т.е. каждая вершина $v \in V$ раскрашена в цвет из $L(v)$. Предписанным хроматическим числом гиперграфа H, $\chi_l(H)$, называется такое минимальное r, что H является предписанно r-раскрашиваемым.

Не так давно в работах [18]–[20] был предложен следующий онлайн аналог предписанного хроматического числа. Пусть заданы гиперграф $H = (V, E)$ и целое число $r \geqslant 2$. Два игрока Lister и Painter играют в следующую игру $Game_1(H, r)$. Положим $X_0 = \emptyset$. В раунде игры под номером i Lister должен выбрать непустое множество вершин $V_i \subset V \setminus (X_0 \cup ... \cup X_{i-1})$, а Painter, в свою очередь, должен выбрать независимое подмножество $X_i \subset V_i$, вершины V_i, которые будут раскрашены в цвет i. После того, как сыграно i раундов, все вершины в $X_1 \cup ... \cup X_i$ являются раскрашенными. Если вершина v принадлежит ровно l множествам $V_{j_1}, \ldots, V_{j_l}, 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_l \leqslant i$, то будем говорить, что у v имеется l *допустимых* цветов после i раундов. Игра заканчивается в следующих случаях:

- если после некоторого количества раундов найдется нераскрашенная вершина с r допустимыми цветами, то выигрывает Lister;
- если после некоторого количества раундов все вершины являются раскрашенными, то выигрывает Painter.

Гиперграф $H = (V, E)$ называется онлайн предписанно r-раскрашиваемым, если у игрока Painter существует выигрышная стратегия в $Game_1(H, r)$-игре. Минимальное такое r, что H является онлайн предписанно r-раскрашиваемым, называется *онлайн предписанным хроматическим числом* и обозначается как $\chi_{ol}(H)$. Несложно заметить, что имеет место следующая связь

$$\chi(H) \leqslant \chi_l(H) \leqslant \chi_{ol}(H).$$

2.2 История задачи о раскрасках полных многодольных графов и гиперграфов

Предписанные раскраски графов и гиперграфов были введены независимо в работах В.Г. Визинга [21] и П. Эрдеша, А.Л. Рубина, Г. Тэйлора [22]. Одним из первых полученных результатов состоял в том, что предписанное хроматическое число может быть намного больше, чем обычное хроматическое число. В частности, авторы в [22] показали, что предписанное хроматическое число полного двудольного графа $K_{m,m}$ (m вершин в каждой части) растет как двоичный логарифм от m:

$$\chi_l(K_{m,m}) = (1 + o(1)) \log_2(m) \text{ при } m \to \infty. \tag{2.1}$$

Занятно, что указанная выше асимптотика сохраняется и для онлайн предписанного хроматического числа. Л. Дюрай, Г. Гутовский и Я. Козик показали в [23], что

$$\chi_{ol}(K_{m,m}) = \log_2(m) + O(1) \text{ при } m \to \infty. \tag{2.2}$$

Таким образом, мы получаем первый вариант графа, для которого разность между предписанным онлайн хроматическим числом и предписанным хроматическим числом может быть сколь угодно большой. Так как $\chi_l(K_{m,m}) = \log_2(m) - \Omega(\log_2 \log_2 m)$ (работа [23]), мы получаем, что

$$\chi_{ol}(K_{m,m}) - \chi_l(K_{m,m}) = \Omega(\log_2 \log_2 m).$$

Результат (2.1) для $K_{m,m}$ был обобщен в различных варинтах. В первом обобщении изучался полный r-дольный граф K_{m*r} с равными долями мощностью m. М. Кривелевич и Н. Газит [24] установили асимптотику $\chi_l(K_{m*r})$ для фиксированного $r \geqslant 3$ и растущего m:

$$\chi_l(K_{m*r}) = (1 + o(1)) \log_{\frac{r}{r-1}}(m) \text{ при } m \to \infty. \tag{2.3}$$

В работе [25] Д.А. Шабанов показал, что такая же асимптотика наблюдается и в случае $\ln(r) = o(\ln(m))$.

Другое обобщение связано с полными многодольными однородными гиперграфами. Обозначим через $H_{m\times r}$ полный $r-$ дольный $r-$однродный гиперграф с m вершинами в каждой доле. В работе [26] П. Хакселл и Ж. Верстрате доказали, что для фиксированного $r \geqslant 3$,

$$\chi_l(H_{m\times r}) = (1 + o(1)) \log_r(m) \text{ при } m \to \infty. \tag{2.4}$$

Результаты (2.1), (2.3), (2.4) были расширены Д.А. Шабановым и Т.М. Шайхеевой [27]. Обозначим через $H(m, r, k)$ полный k-однородный r-дольный гиперграф с m вершинами в каждой доле, в котором каждое ребро содержит ровно одну вершину из некоторых $k \leqslant r$ долей. Несложно заметить, что $H(m, r, 2) = K_{m*r}$ и $H(m, r, r) = H_{m\times r}$. Авторы показали, что для фиксированного $2 \leqslant k \leqslant r$ выполнено:

$$\chi_l(H(m, r, k)) = (1 + o(1)) \log_{\frac{r}{r-k+1}}(m) \text{ при } m \to \infty. \tag{2.5}$$

2.3 Основной результат

Основной результат второй главы диссертации устанавливает асимптотику для онлайн предписанного хроматического числа полного k-однородного r-дольного гиперграфа $H(m, r, k)$. Как и равенство (2.2) асимптотическое поведение $\chi_{ol}(H(m, r, k))$ совпадает с асимптотикой предписанного хроматического числа (2.5).

Теорема 2.1. *Для фиксированного $2 \leqslant k \leqslant r$ выполнено:*

$$\chi_{ol}(H(m, r, k)) = (1 + o(1)) \log_{\frac{r}{r-k+1}}(m) \text{ при } m \to \infty. \tag{2.6}$$

Подобное асимптотическое равенство сохраняется для любых функций $r = r(m)$, $k = k(m)$, *т.к.* $\ln r = o(\ln m)$.

В качестве следствия из теоремы мы получаем аналоги (2.2) для (2.3) и (2.4): для фиксированного $r \geqslant 3$ выполнено

$$\chi_{ol}(K_{m*r}) = (1 + o(1)) \log_{\frac{r}{r-1}}(m) \text{ при } m \to \infty;$$

$$\chi_{ol}(H_{m\times r}) = (1 + o(1)) \log_r(m) \text{ при } m \to \infty.$$

В следующем параграфе будет рассмотрена связь между онлайн предписанными раскрасками многодольных гиперграфов и экстремальными задачами о раскрасках гиперграфов. В заключительном параграфе второй главы будут даны доказательства представленных результатов.

2.4 Экстремальные задачи о раскрасках гиперграфов

2.4.1 Связь с задачей о свойстве B

Связь предписанных раскрасок полных многодольных графов с классической проблемой о свойстве B была обнаружена еще в работе Эрдеша, Рубина и Тэйлора [22]. Напомним, что задача о свойстве B состоит в нахождении величины $m(n)$, равной минимальному числу ребер в n-однородном гиперграфе, который не является 2-раскрашиваемым. Авторами было получено следующее количественное соотношение между $\chi_l(K_{m,m})$ и $m(n)$.

Утверждение 2.1. *Пусть* $n, m \geqslant 2$ *— целые числа.*

1. *Если* $2m < m(n)$, *то* $\chi_l(K_{m,m}) \leqslant n$.
2. *Если* $m \geqslant m(n)$, *то* $\chi_l(K_{m,m}) > n$.

Данные неравенства вместе с известными оценками величины $m(n)$ и дают асимптотику $\chi_l(K_{m,m})$.

Подобный подход использовался в [25] и [26] для исследования $\chi_l(K_{m*r})$ и $\chi_l(H_{m\times r})$. В случае $K_{m\times r}$ соответствующая экстремальная величина связана с полноцветными раскрасками. Напомним, что раскраска множества вершин гиперграфа $H = (V, E)$ в r цветов называется *полноцветной*, если в данной раскраске каждое ребро из E содержит вершины всех r цветов. Обозначим через $p(n, r)$ минимально возможное число ребер в n-однородном гиперграфе, для которого не существует полноцветных раскрасок в r цветов. А.В. Косточка показал в [28], что $p(n, r)$ играет ту же самую роль для $\chi_l(K_{m\times r})$, что $m(n)$ для $\chi_l(K_{m,m})$.

Хакселл и Верстрате [26] рассмотрели другое обобщение задачи о свойстве B, чтобы получить асимптотику $\chi_l(H_{m\times r})$. А именно, им пригодилась величина $m(n,r)$ — минимально возможное число ребер в n-однородном гиперграфе, который не является r-раскрашиваемым.

Д.А. Шабанов и Т.М. Шайхеева в [27] использовали свойство, находящееся "между" r- раскрашиваемостью и полноцветной r-раскрашиваемостью. Обозначим $[r] = 1,\dots,r$. Отображение $f : V \to \binom{[r]}{s}$ называется *s-покрытием r множествами*, т.е. мы присваиваем s различных цветов каждой вершине из H. Более того, f называется *s-покрытием r независимыми множествами*, если для каждого $i = 1,\dots,r$ подмножество вершин

$$V_i = \{v \in V : i \in f(v)\}$$

является независимым подмножеством в H. Несложно понять, что

- 1-покрытие r независимыми множествами — это правильная раскраска в r цветов;
- $(r-1)$-покрытие r независимыми множествами эквивалентно полноцветной r-раскраске (мы можем раскрасить вершину в оставшийся неназначенным цвет).

Авторы в [27] ввели значение $c(n,r,s)$, которое эквивалентно минимально возможному числу ребер в n-однородном гиперграфе, не допускающему s-покрытия r независимыми множествами. Они также доказали следующее количественное соотношение между $c(n,r,s)$ и $\chi_l(H(m,r,k))$.

Утверждение 2.2. (Д.А. Шабанов, Т. М. Шайхеева, [27])
Положим $n,m,r \geqslant 2$, $2 \leqslant k \leqslant r$ целые числа.

1. *Если $rm < c(n,r,r-k+1)$, то $\chi_l(H(m,r,k)) \leqslant n$.*
2. *Если $m \geqslant c(n,r,r-k+1)$, то $\chi_l(H(m,r,k)) > n$.*

Используя утверждение 2.2 и оценки величины $c(n,r,s)$, несложно вывести асимптотику предписанного хроматического числа $H(m,r,k)$ из (2.5).

2.4.2 Онлайн аналоги задачи о свойстве B

Первый онлайн вариант задачи о B свойстве был представлен Дж. Асламом и А. Дагатом в работе [29]. Пусть заданы n и N — положительные целые числа, а также имеются два игрока Lister и Painter. Они играют в следующую игру

$Game_2(N, n)$, имеющую два параметра — мощность ребер n и число ребер N. Значения этих параметров известны обоим игрокам до начала игры. В каждом раунде Lister выбирает одну вершину и сообщает номера ребер, в которых она содержится. Он не может добавлять вершины в ребра, которые уже содержат n вершин. Painter, в свою очередь, должен выбрать один из двух цветов (0 или 1), в который будет покрашена данная вершина. Игра заканчивается, когда выбраны все вершины (т.е. каждое из N ребер содержит ровно n вершин). Painter выигрывает, если в итоговом гиперграфе нет одноцветных ребер. В противном случае выигрывает *Lister*.

Обозначим через $m_{ol}(n)$ минимальное такое N, что Lister имеет выигрышную стратегию в игре $Game_2(N, n)$. Несложно заметить, что $m_{ol}(n) \leqslant m(n)$, т.к. для $N \geqslant m(n)$ Lister заведомо может построить не 2-раскрашиваемый гиперграф. Аслам и Дагат показали в [29], что

$$m_{ol}(n) \geqslant 2^{n-1}. \tag{2.7}$$

В недавней работе [23] Дюрай, Гутовский и Козик доказали, что данная оценка дает правильный порядок роста, а именно они получили верхнюю оценку, которая отличается от 2^{n-1} всего в 16 раз:

$$m_{ol}(n) \leqslant 8 \cdot 2^n. \tag{2.8}$$

Они также показали, что $m_{ol}(n)$ играет ту же роль для $\chi_{ol}(K_{m,m})$, что и $m(n)$ для $\chi_l(K_{m,m})$. Эта взаимосвязь вместе с оценками (2.7)-(2.8) и приводит к результату (2.2).

Мы рассмотрим следующее расширение игры $Game_2(N, n)$. Пусть заданы натуральные числа $n, s \leqslant r, N$, а также имеются два игрока Lister и Painter, которые играют в игру $Game_3(N, n, r, s)$, которая определяется следующими параметрами:

- n — мощность ребер;
- N — число ребер;
- r — итоговое число цветов;
- s — количество цветов, которое должно быть предписано каждой вершине.

Значения данных параметров известны игрокам до начала игры. В каждом раунде Lister выбирает одну из вершин гиперграфа и говорит, в каких ребрах она содержится. Он не может добавлять вершины в ребра, которые уже содержат n вершин. Painter должен приписать заявленной вершине s цветов из множества $[r] = 1, \ldots, r$. Игра заканчивается, когда все вершины были выбраны, т.е. все

N ребер содержат ровно n вершин. Painter выигрывает, если получившееся s-покрытие является покрытием r независимыми множествами для построенного n-однородного гиперграфа. В противном случае выигрывает $Lister$.

Обозначим через $c_{ol}(n, r, s)$ такое минимальное N, что Lister имеет выигрышную стратегию в игре $Game_3(N, n, r, s)$. Имеет место следующее обобщение утверждения 2.2.

Лемма 2.1. *Пусть $n, m, r \geqslant 2, 2 \leqslant k \leqslant r$ целые числа.*

1. *Если $rm < c_{ol}(n, r, r-k+1)$, то $\chi_{ol}(H(m, r, k)) \leqslant n$.*
2. *Если $m \geqslant c_{ol}(n, r, r-k+1)$, то $\chi_{ol}(H(m, r, k)) > n$.*

Лемма 2.1 играет важнейшую роль в оценке онлайн предписанного хроматического числа $H(m, r, k)$. Но, помимо этого, нам необходимо получить оценки экстремальной величины $c_{ol}(n, r, s)$, что и будет сделано в следующем разделе.

2.4.3 Новые результаты в экстремальной задаче об онлайн раскрасках

Следующая лемма дает разумную нижнюю границу для $c_{ol}(n, r, s)$.

Лемма 2.2. *Для всех $n \geqslant 2$, $r > s \geqslant 1$,*

$$c_{ol}(n, r, s) \geqslant \frac{r^{n-1}}{s^n}. \tag{2.9}$$

Заметим, что при $r = 2, s = 1$ оценка (2.9) совпадает с оценкой (2.7) для $m_{ol}(n)$.

Напомним, что $c_{ol}(n, r, s)$ не может быть больше, чем его "офлайн" вариант $c(n, r, s)$. В работе [27] с помощью вероятностного подхода было доказано, что для всех $n > r > s \geqslant 1$ выполнено, что

$$c(n, r, s) \leqslant \frac{e}{2} n^2 \left(\frac{r}{s}\right)^n \ln \binom{r}{s} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{s}{r}\right)\right). \tag{2.10}$$

Таким образом, мы можем использовать оценку (2.10) в качестве верхней границы для $c_{ol}(n, r, s)$. Однако, как было показано в работе Дюрая, Гутовского и Козика [23], для $c_{ol}(n, r, s)$ потенциально можно получить гораздо более сильные результаты. В рамках второй главы настоящей диссертации мы рассмотрим только крайний случай: $s = r - 1$.

Значение $c(n, r, 1)$ хорошо известно в математической литературе как $m(n, r)$ — минимально возможное число ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом больше r. Задача о нахождении такой величины является классической задачей Эрдеша-Хайнала, предложенной ими в 60-ых годах прошлого века. С тех пор она активно изучается, последние результаты были получены в течение последних пяти лет. Очевидно, что $m(n,2) = m(n)$, а про последнюю известно следующее:

$$c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} 2^n \leqslant m(n) \leqslant \frac{e\ln 2}{4} n^2 2^n (1+o(1)), \tag{2.11}$$

где $c > 0$ — некоторая абсолютная константа. Верхняя оценка была получена П. Эрдешем в [30], а нижняя — в работе Радхракришнана и Сринивасана [31]. Заметим, что приведенные выше соотношения означают, что $m(n)$ в асимптотике имеет больший порядок, чем его онлайн аналог $m_{ol}(n)$ (см. (2.7) и (2.8)). Подобные оценки в случае произвольного числа цветов r (нижнюю оценку берем из работы Черкашина и Козика [9]) имеют вид:

$$c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{(r-1)/r} r^{n-1} \leqslant m(n,r) \leqslant \frac{e}{2} n^2 r^n \ln r \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{2.12}$$

Поскольку $m_{ol}(n,r) = c_{ol}(n,r,1)$ не превосходит $m(n,r)$, то верхняя оценка из (2.12) выполняется для $m_{ol}(n,r)$. Про нижнюю же было известно лишь, что ([29])

$$m_{ol}(n,r) \geqslant r^{n-1}. \tag{2.13}$$

В работе [A3] Д.А. Шабановым и П.О. Святокум были получены усиления перечисленных оценок. Во-первых, они показали, что

$$m_{ol}(n,r) \leqslant n(r-1)^2 r^n,$$

что заметно улучшает 2.12 для фиксированного r и растущего n. Во-вторых, они установили неравенство

$$m_{ol}(n,r) \geqslant \left((n-1)\left\lceil\frac{r}{n}\right\rceil + 1\right)\left\lfloor\frac{n-1}{n}r\right\rfloor^{n-1},$$

которое усиливает 2.13, наоборот, в случае фиксированного n и растущего r. Отметим, что последнее неравенство является аналогом оценки Алона [32] для $m(n,r)$ и даже ее несколько усиливает.

Наконец рассмотрим онлайн полноцветные раскраски, т.е. задачу о нахождении величины $c_{ol}(n,r,s)$ при $s = r-1$. Обозначим $p_{ol}(n,r) = c_{ol}(n,r,r-1)$. “Офлайн” вариант данной задачи о величине $p(n,r)$ впервые появился в работе Косточки [28], и с тех пор изучался в ряде работ. Например, в [25] и [33] было показано, что

$$c_1\frac{1}{r}\left(\frac{n}{r^2\ln n}\right)^{1/2}\left(\frac{r}{r-1}\right)^n \leqslant p(n,r) \leqslant c_2 n^2 \left(\frac{r}{r-1}\right)^n \ln r, \tag{2.14}$$

где $c_1, c_2 > 0$ - некоторые абсолютные константы. Данные оценки были улучшены в различных ситуациях в работах [34] и [35].

Нижняя оценка $r^{-1}(r/r-1)^n$ для $p_{ol}(n,r)$ была получена в лемме 2.2. Оценка сверху (2.14) может быть улучшена в онлайн варианте следующим образом.

Лемма 2.3. *Пусть $n > r$. Тогда*

$$p_{ol}(n,r) \leqslant 3r(r-1)^2 n \left(\frac{r}{r-1}\right)^{n+1}. \tag{2.15}$$

Для фиксированного r и растущего n оценка (2.15) заметно усиливает верхнюю оценку из (2.14).

В следующем параграфе мы переходим к доказательствам представленных выше результатов.

2.5 Доказательства

2.5.1 Доказательство леммы 2.1

Будем следовать идеям из работ [23] и [27].

1) Нам необходимо показать, что $\chi_{ol}(H(m,r,k)) \leqslant n$, т.е. нам нужно доказать, что Painter обладает выигрышной стратегией в игре $Game_1(H(m,r,k),n)$.

Обозначим через $W = W_1 \sqcup \ldots \sqcup W_r$ множество вершин r-дольного гиперграфа $H(m,r,k)$, где $W_1,\ldots,W_r$ и являются долями гиперграфа. Наша стратегия в игре $Game_1(H(m,r,k),n)$ будет использовать выигрышную стратегию для игры $Game_3(rm,n,r,r-k+1)$.

- Пусть $X_1,\ldots,X_{i-1}$ уже выбраны. В раунде под номером i игрок Lister выбирает множество вершин $V_i \subset W \setminus (X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_{i-1})$.

- Параллельно играем в игру $Game_3(rm,n,r,r-k+1)$, и в ней Lister выбрал ребра с номерами V_i, в качестве содержащих вершину под номером i.

- В силу того, что $rm < c_{ol}(n,r,r-k+1)$, Painter обладает выигрышной стратегией в игре $Game_3(rm,n,r,r-k+1)$. Пусть $\{\widetilde{j}_1,\ldots,\widetilde{j}_{r-k+1}\}$ — это выбранные цвета для вершины i, соответствующие данной стратегии.

- Обозначим через $\{j_1,\ldots,j_{k-1}\} = [r]/\{\widetilde{j}_1,\ldots,\widetilde{j}_{r-k+1}\}$ дополнительный набор цветов.

- Тогда Painter выбирает независимое множество X_i следующим образом:

$$X_i = V_i \cap \left(W_{j_1} \sqcup \ldots \sqcup W_{j_{k-1}}\right).$$

Поскольку X_i содержится в объединении некоторых $k-1$ долей гиперграфа $H(m,r,k)$, то оно будет независимым в $H(m,r,k)$ в силу построения гиперграфа.

Пусть $w \in W_j$ — вершина гиперграфа $H(m,r,k)$. Каждый раз, когда Lister выбирает w в качестве элемента множества V_i в игре $Game_1(H(m,r,k),n)$, i становится вершиной в ребре w в игре $Game_3(rm,n,r,r-k+1)$. Выигрышная стратегия в игре $Game_3(rm,n,r-k+1)$ подразумевает, что после того, как ребро w будет выбрано n раз, найдется такая вершина $i \in w$, что цвет j не будет присвоен i (иначе полученное покрытие не будет покрытием независимыми множествами). Для данного i независимое множество X_i будет содержать все вершины $V_i \cap W_j$, т.е. $w \in X_i$. Таким образом, каждая вершина $H(m,r,k)$ будет покрашена до того, как получит n допустимых цветов. Существование выигрышной стратегии для игрока Painter доказано.

2) Необходимо показать, что $\chi_{ol(H(m,r,k))} > n$, т.е. теперь Lister имеет выигрышную стратегию в игре $Game_1(H(m,r,k),n)$. Наша стратегия и в этом случае будет следовать выигрышной стратегии для игры $Game_3(m,n,r,r-k+1)$. Напомним, что через $W = W_1 \sqcup \ldots \sqcup W_r$ обозначается множество вершин из $H(m,r,k)$. Каждое W_j содержит ровно m вершин, поэтому можно обозначить $W_j = w_{1j}, \ldots, w_{mj}$.

- Предположим, что множества $V_1, X_1, \ldots, V_{i-1}, X_{i-1}$ уже выбраны. В раунде игры под номером i нам необходимо выбрать множество вершин $V_i \subset W \setminus (X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_{i-1})$.

- Мы снова параллельно играем в игру $Game_3(m,n,r,r-k+1)$, в которой есть выигрышная стратегия у игрока Lister, т.к. $m \geqslant c_{ol}(n,r,r-k+1)$.

- Обозначим через $a_1, \ldots, a_q \in \{1, \ldots, m\}$ множество ребер, которые в данной стратегии приписаны вершине i.

- Lister выбирает множество V_i следующим образом:

$$V_i = \bigcup_{j=1}^{r} \bigcup_{y=1}^{q} \{w_{a_y,j}\} \setminus (X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_{i-1}).$$

Грубо говоря, Lister выбирает множество строк в матрице $(w_{l,j}, l = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, r)$, и формирует V_i как множество из всех доступных элементов в выбранных строках.

Предположим, Painter выбрал X_i в качестве независимого подмножества V_i. В действительности, Painter выбрал вершины из некоторых $k-1$ частей множеств $W_{j_1}, \ldots, W_{j_{k-1}}$, т.е. он выбрал $k-1$ столбец в матрице $(w_{l,j})$ и построил X_i как пересечение V_i с этими столбцами. Можно представить это как выбор игроком Painter цветов $[r] \setminus \{j_1, \ldots, j_{k-1}\}$ для вершины i в игре $Game_3(m, n, r, r-k+1)$. Покажем, что Lister всегда выигрывает, используя данную стратегию в игре $Game_1(H(m, r, k), n)$. Выигрышная стратегия в игре $Game_3(m, n, r, r-k+1)$ предполагает, что после некоторого количества раундов найдется такой цвет j, который будет присвоен всем n вершинам некоторого ребра $q \in 1, \ldots, m$. В игре $Game_1(H(m, r, k), n)$ это соответствует следующей ситуации:

1. столбец j никогда не будет выбран в качестве части независимого множества X_i, пока Lister выбирает строку q,
2. вершина $w_{q,j}$ не была раскрашена,
3. вершина $w_{q,j}$ была выбрана n раз в качестве элемента V_i, т.е. у нее есть n допустимых цветов.

Таким образом, Lister всегда выигрывает, используя описанную стратегию. Лемма 2.1 доказана.

2.5.2 Доказательство леммы 2.2

Доказательство следует идеям из работы [29]. Нам необходимо доказать, что при $N < \frac{r^{n-1}}{s^n}$ игрок Painter обладает выигрышной стратегией в $Game_3(N, n, r, s)$ игре.

Предположим, что первые l вершин $v_1, \ldots, v_l$ уже были покрашены — каждая в s цветов. Для каждого цвета $j \in \{1, \ldots, r\}$ обозначим через $V_j(l)$ множество вершин, покрашенных в j после раунда l. Каждое ребро A можно рассматривать как функцию от l, где через $A(l)$ обозначается множество вершин ребра, уже выявленные после раунда l. Если $A(l) \subset V_j(l)$, то будем говорить, что A одноцветно в цвете j в данный момент. Считаем также, что пустое ребро одноцветно во всех цветах. Определим вес ребра A в цвете j после раунда l следующим образом:

$$w_j(A, l) = \left(\frac{r}{s}\right)^{|A(l)|}.$$

Опишем стратегию игрока Painter. Предположим, что Lister заявляет, что вершина v_{l+1} лежит в ребрах $A_1, \ldots, A_q$. Painter вычисляет r чисел $b_j(v_{l+1}), j = 1, \ldots, r$ следующим образом:

$$b_j(v_{l+1}) = \sum_{u: A_u(l) \subset V_j(l)} w_j(A_u, l) = \sum_{A: A(l) \subset V_j(l), v_{l+1} \in A} w_j(A, l).$$

Пусть $b_{j_1}(v_{l+1}), \ldots, b_{j_s}(v_{l+1})$ — это наименьшие s чисел среди вычисленных. Тогда Painter присваивает вершине v_{l+1} цвета $j_1, \ldots, j_s$.

Докажем, что это выигрышная стратегия. После каждого раунда l мы можем посчитать общий вес одноцветных ребер:

$$w(l) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{A: A(l) \subset V_j(l)} w_j(A, l).$$

Покажем, что $w(l) \geqslant w(l+1)$, т.е. общий вес не увеличивается. Пусть $j_1, \ldots, j_s$ — это цвета, приписанные вершине v_{l+1} в раунде под номером $l+1$. Тогда

$$w(l+1) = w(l) - \sum_{j=1}^{r} \sum_{A: A(l) \subset V_j(l), v_{l+1} \in A} w_j(A, l) +$$

$$+ \sum_{u=1}^{s} \sum_{A: A(l) \subset V_{j_u}(l), v_{l+1} \in A} w_{j_u}(A, l+1) =$$

$$= w(l) - \sum_{j=1}^{r} b_j(v_{l+1}) + \frac{r}{s} \sum_{u=1}^{s} b_{j_u}(v_{l+1}) \leqslant w(l),$$

т.к. согласно стратегии $b_{j_1}(v_{l+1}), \ldots, b_{j_s}(v_{l+1})$ — это минимальные s чисел среди $b_j(v_{l+1}), j = 1, \ldots, r$.

Теперь завершим доказательство. Пусть наша стратегия провалилась, и в конце игры мы получили ребро A, являющееся одноцветным в цвете j. Тогда общий вес одноцветных ребер к концу игры должен быть хотя бы $(r/s)^n$. Но в начале игры суммарный вес был равен rN, что меньше, чем $(r/s)^n$, противоречие. Лемма 2.2 доказана.

2.5.3 Доказательство теоремы 2.1

Найдем асимптотику для онлайн предписанного хроматического числа гиперграфа $H(m, r, k)$. Обозначим $n = \chi_l(H(m, r, k))$, тогда Лемма 2.1 утверждает следующее:

$$c_{ol}(n-1, r, r-k+1) \leqslant m \text{ and } c_{ol}(n, r, r-k+1) > mr.$$

Используя оценки (2.9) и (2.10) для $c_{ol}(n, r, r-k+1)$, мы получаем, что

$$(n-2) \ln\left(\frac{r}{r-k+1}\right) - \ln(r-k+1) \leqslant \ln m; \tag{2.16}$$

$$\ln m + \ln r < n \ln\left(\frac{r}{r-k+1}\right) + 2\ln n + \ln\ln\left(\frac{r}{r-k+1}\right) + O(1). \tag{2.17}$$

Пусть функция $r = r(m)$ удовлетворяет условию $\ln r = o(\ln m)$ при $m \to \infty$. Тогда неравенство (2.16) утверждает, что

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{n\ln\left(\frac{r}{r-k+1}\right)}{\ln m} \leqslant 1 + \lim_{m\to\infty} \frac{\ln r}{\ln m} = 1 \tag{2.18}$$

Более того, из (2.16) следует, что $\ln n = O(\ln\ln m) = o(\ln m)$. Таким образом, из (2.17) получаем:

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{n\ln\left(\frac{r}{r-k+1}\right)}{\ln m} \geqslant 1 - \lim_{m\to\infty} \frac{O(\ln r + \ln n)}{\ln m} = 1. \tag{2.19}$$

.

Наконец, используя (2.18) и (2.19), получаем асимптотику онлайн предписанного хроматического числа гиперграфа $H(m, r, k)$:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\chi_{ol}(H(m,r,k))\ln\left(\frac{r}{r-k+1}\right)}{\ln m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\chi_{ol}(H(m,r,k))}{\log_{\frac{r}{r-k+1}} m} = 1.$$

Теорема 2.1 доказана.

2.5.4 Доказательство леммы 2.3

Нам необходимо показать, что при $N \geqslant 3r(r-1)^2 n(\frac{r}{r-1})^{n+1}$ Lister обладает выигрышной стратегией в игре $Game_3(N, n, r, r-1)$.

Разделим множество всех ребер на r частей $E_1, \ldots, E_r$, в каждой из которых ровно $3n(r-1)\cdot a_n$ ребер. Значение a_n определяется следующим образом:

$$a_0 = 1,\ a_m = \left\lceil \frac{r}{r-1} a_{m-1} \right\rceil,\ m = 1, \ldots, n.$$

Несложно заметить, что $a_n \leqslant \frac{r}{r-1}a_{n-1} + 1$. Таким образом $a_n \leqslant \sum_{i=0}^{n}(\frac{r}{r-1})^i \leqslant (r-1)(\frac{r}{r-1})^{n+1}$. В силу того, что $N \geqslant 3rn(r-1)\cdot a_n$ такое разделение ребер возможно. Все остальные ребра мы опускаем.

Предположим, что первые l вершин $v_1, \ldots, v_l$ уже раскрашены. Для каждого цвета $j \in 1, \ldots, r$ через $V_j(l)$ обозначим вершины, которые не раскрашены в цвет j после раунда l. Каждое ребро A рассматривается как функция от l, через $A(l)$ обозначим множество вершин A, раскрашенных после раунда под номером l. Если $A(l) \subset V_j(l)$ и $A \in E_j$, то говорим, что A не раскрашено в цвет j. Пустые ребра также удовлетворяют данному свойству. Если дополнительно $|A(l)| = i$, $i = 0, \ldots, n-1$, то будем говорить, что ребро A находится на уровне i после раунда l. Наконец, (j, i)- блоком будем называть множество из a_{n-i} ребер, не раскрашенных в цвет j на уровне i.

Выигрышная стратегия игрока Lister состоит в следующем:

- Для каждого цвета $j = 1, \ldots, r$, он выбирает наибольшее $i = i(j)$ такое, что существует (j, i)-блок B_j.

- Он выбирает объединение $B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_r$, как множество ребер, содержащих следующую вершину v_{l+1}.

Несложно заметить, что Lister выигрывает, если после некоторого количества раундов найдется ребро на уровне n, потому что подобное ребро не будет иметь некоторых цветов. Суммарное число блоков в начале равно $3rn(r-1)$. При любом выборе игрока Painter цвета для v_{l+1} суммарное число блоков не может уменьшиться. Действительно, для выбранного цвета количество блоков, которые не покрашены в этот цвет, уменьшится на один, но т.к. $a_m \geqslant (1 + 1/(r-1))a_{m-1}$, число блоков не раскрашенных в какой-либо другой цвет j возрастет хотя бы на $1/(r-1)$ (надо удалить один блок на текущем уровне $i(j)$ и добавить $r/(r-1)$ блоков на следующем уровне). Таким образом, общее число блоков не уменьшиться.

Игра продолжается, пока не останется ни одного блока, не раскрашенного в какой-либо цвет или пока не выиграет игрок *Lister*. В действительности, в первом случае Painter не обязательно выиграет, однако мы покажем, что даже такая ситуация невозможна. Предположим это случилось и нет ни одного блока, не раскрашенного в некоторый цвет q. Согласно стратегии для всех $j \neq q$ число блоков, не раскрашенных в цвет j,

- не превосходит 3 на каждом уровне от 1 до $n-1$ (т.к. мы всегда выбираем наибольший уровень и добавляем не больше 2 новых блоков на следующий уровень);

- не превосходит $3n(r-1) - 1$ на нулевом уровне.

Следовательно, суммарное число оставшихся блоков не более

$$(r-1)\left(3(n-1) + 3n(r-1) - 1\right) = (r-1)\left(3nr - 4\right),$$

что меньше, чем $3nr(r-1)$. Противоречие, т.к. мы показали, что суммарное число блоков не возрастает. Таким образом, Lister всегда выигрывает.

Глава 3

Сильные раскраски 4-однородных гиперграфов

В третьей главе настоящей диссертационной работы рассматривается задача об асимптотическом поведении сильного хроматического числа в случайных гиперграфах. Результаты главы опубликованы в работе [A4].

3.1 Основные определения и изучаемая модель

Пусть $H = (V, E)$ — некоторый гиперграф. Как уже упоминалось в предыдущих главах, раскраска множества вершин гиперграфа V называется *правильной*, если она не порождает одноцветных ребер в E. Если существует правильная раскраска гиперграфа H в r цветов, то H называется *r-раскрашиваемым.* Хроматическим числом гиперграфа H, $\chi(H)$, называют такое минимальное r, что H является r-раскрашиываемым.

В данной главе мы концентрируемся на изучении сильного хроматического числа гиперграфов. Раскраска множества вершин гиперграфа называется *сильной*, если любые вершины $u \neq v$, лежащие в одном ребре, имеют различные цвета. Если существует сильная раскраска гиперграфа H в r цветов, то будем говорить, что H является *r-сильно раскрашиваемым. Сильным хроматическим числом* гиперграфа H, $\chi_{str}(H)$, называется такое минимальное r, что H является r-сильно раскрашиваемым. Очевидно, что сильная раскраска является и правильной, а потому $\chi_{str}(H) \geqslant \chi(H)$.

Основным объектом изучения третьей главы является случайный k-однородный гиперграф в биномиальной модели $H(n, k, p)$, в которой каждое k-подмножество некоторого множества из n вершин включается в $H(n, k, p)$ в качестве ребра независимо от других с вероятностью $p \in (0, 1)$. Целью является получение асимптотических результатов относительно $\chi_{str}(H(n, k, p))$ при фиксированном $k \geqslant 3$,

$p = p(n)$ и растущем n.

3.2 История результатов

Отметим, что в случае графов понятия сильного хроматического числа и обычного хроматического числа совпадают. Изучение хроматического числа случайного графа $G(n, p) = H(n, 2, p)$ началось еще с вопроса, поставленного Эрдешем в 60-е годы прошлого века. Первые результаты здесь были получены в работе Дж. Гриммета и К. Мардиармида [36], которые получили оценки $\chi(G(n, p))$, отличающиеся в 2 раза. Точная асимптотика $\chi(G(n, p))$ при фиксированном $p \in (0, 1)$ была найдена заметно позднее Б. Боллобашем в [37]: выполнен следующий закон больших чисел

$$\chi(G(n, p)) \cdot \frac{2 \log_{1/(1-p)} n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1 \text{ при } n \to +\infty.$$

В случае, когда вероятность появления ребра p ведет себя, как стремящаяся к нулю функция от n, асимптотика хроматического числа $G(n, p)$ была получен Т. Лучаком в [38]: если $p = p(n) \to 0$, но $pn \to +\infty$, то

$$\chi(G(n, p)) \cdot \frac{2 \ln(np)}{np} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1 \text{ при } n \to +\infty.$$

Теорема Лучака не покрывала лишь только так называемый разреженный случай, когда $np = c$ для фиксированного $c > 0$. Из приведенного выше результата следует, что в этом случае хроматическое число ограничено по вероятности, а из второй работы Лучака [39] вытекает, что в этом случае имеет место двухточечное предельное распределение $\chi(G(n, p))$: если $p \leqslant n^{-5/6}$, то существует такая функция $h = h(n, p)$, что

$$\mathsf{P}\left(\chi(G(n, p)) \in \{h, h + 1\}\right) \longrightarrow 1 \text{ при } n \to +\infty. \tag{3.1}$$

Другие результаты о концентрации хроматического числа случайного графа в неразреженном случае были получены, например, в работах К. Макдиармида [40], Н. Алона и М. Кривелевича [41], А. Коджа-Оглана, К. Панагиоту и А. Штегер [43], К. Панагиоту и А. Штегер [42], А. Хеккель [44].

Наиболее же точные результаты удалось получить именно в разреженном случае. Здесь фундаментальным утверждением является следующая теорема Д. Ахлипотаса и А. Наора из [45].

Теорема 3.1. (Д. Ахлипотас, А. Наор, [45]) *Пусть* $np = c$, *где* $c > 0$ — *фиксировано. Обозначим* $r_c = \min\{r : c < 2r \ln r\}$. *Тогда*

$$\mathsf{P}\left(\chi(G(n, c/n)) \in \{r_c, r_c + 1\}\right) \longrightarrow 1 \text{ *при* } n \to +\infty.$$

Отметим, что теорема отвечает на вопрос о значении функции h из (3.1), а также дает следующую границу пороговой вероятности r-раскрашиваемости $G(n, p)$ для заданного $r > 2$: если $c < 2(r-1)\ln(r-1)$, то

$$\mathsf{P}\left(\chi(G(n, c/n)) \leqslant r\right) \longrightarrow 1 \text{ при } n \to +\infty.$$

В свою очередь несложно проверить, что $c > 2r \ln r - \ln r$, наоборот, выполнено

$$\mathsf{P}\left(\chi(G(n, c/n)) \leqslant r\right) \longrightarrow 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Учитывая, что $2(r-1)\ln(r-1) = 2r\ln r - 2\ln r + o_r(1)$, мы получаем достаточно точные оценки пороговой вероятности r-раскрашиваемости, $\widehat{c}_r = \widehat{c}_r(n)$, существование которой было обосновано Ахлиоптасом и Фридгутом в 1999 году [46]. Наилучшие в настоящее время оценки пороговой вероятности r-раскрашиваемости были получены А. Коджа-Огланом (верхняя оценка, [47]), а также А. Коджа-Огланом и Д. Виленчиком (нижняя оценка, [48]):

$$2r\ln r - \ln r - 2\ln 2 - o_r(1) < \widehat{c}_r < 2r\ln r - \ln r - 1 + o_r(1).$$

Подробное изучение хроматического числа случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ началось в 80-х годах XX века. Асимптотическое поведение $\chi(H(n, k, p))$ изучали, например, Дж. Шмидт-Прузан, Э. Шамир, Э. Упфал [49], а также Э. Шамир [50]. Ими были получены асимптотика $\chi(H(n, k, p))$ для фиксированного $k > 2$ и $p > n^{-\varepsilon}$ для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$. Эти результаты были дополнены М. Кривелевичем и Б. Судаковым для почти всех остальных значений $p = p(n)$ в работе [51]. Суммируя эти результаты, можно заключить, что если $p = p(n) \to 0$ с ростом n, но $n^{k-1}p \to +\infty$, то выполнен следующий закон больших чисел:

$$\chi(H(n, k, p)) \cdot \left(\frac{d}{k \ln d}\right)^{-\frac{1}{k-1}} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1$$

при $n \to +\infty$, где $d = (k-1)\binom{n-1}{k-1}p$. Указанный выше результат снова не распространяется лишь на так называемый разреженный случай, когда $p = cn/\binom{n}{k}$ для фиксированного $c > 0$. Как и в случае графов, в разреженном случае хроматическое число случайного гиперграфа ограничено, и здесь также можно получать очень точные результаты, связанные с оценками пороговых вероятностей r-раскрашиваемости.

Изучение хроматического числа разреженного случайного гиперграфа началось в неопубликованной работе Н. Алона и Дж. Спенсера ([52], текст доступен на личном сайте Н. Алона), в которой они рассматривали пороговую вероятность для свойства 2-раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n,k,p)$. Алон и Спенсер с помощью метода первого момента доказали, что при

$$c > 2^{k-1}\ln 2 - \frac{\ln 2}{2} + o_k(1)$$

$H(n,k,cn/\binom{n}{k})$ с вероятностью, стремящейся к 1, не является 2-раскрашиваемым. А при $c = O(2^k/k^2)$, наоборот, хроматическое число гиперграфа $H(n,k,cn/\binom{n}{k})$ равно двум с вероятностью, стремящейся к 1. Их результаты были в дальнейшем улучшены в работах [53] Д. Ахлиоптаса, М. Кривелевича, Дж. Кима и П. Тетали, а также Д. Ахлиоптаса и К. Мура [54]. Последние показали, что при

$$c < 2^{k-1}\ln 2 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + o_k(1)$$

гиперграф $H(n,k,cn/\binom{n}{k})$ является 2-раскрашиваемым с вероятностью, стремящейся к 1. Тем самым, им удалось найти пороговую вероятность свойства 2-раскрашиваемости как пороговое значение для параметра разреженного случая c с точностью до аддитивной константы. А. Коджа-Огланом и Л. Здеборовой в [55] нижняя граница 2-раскрашиваемости была усилена до $2^{k-1}\ln 2 - \ln 2 + o_k(1)$, также они предположили, что пороговая константа должна равняться $2^{k-1}\ln 2 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} + o_k(1)$.

В последние годы активно шли исследования по поиску пороговой вероятности r-раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ для заданного $r \geqslant 3$. Так, М. Дайер, А Фриз и К. Гринхилл в работе [56] получили следующие результаты:

1. если $k \geqslant 3, r \geqslant 2, k, r \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ фиксированы, $p = cn/\binom{n}{k}$, то при $c > r^{k-1}\ln r - \ln r/2$ выполнено $\mathsf{P}(\chi(H(n,k,p) \geqslant r+1)) \to 1$ при $n \to \infty$;

2. если же $c < r^{k-1}\ln r - \frac{r-1}{r}(1+\ln r) - O(\frac{k^2\ln r}{r^{k-1}})$, то, наоборот, выполнено $\mathsf{P}(\chi(H(n,k,p)) \leqslant r) \to 1$ при $n \to \infty$.

Вышеприведенные результаты были в дальнейшем усилены в работах П. Эйра, А. Коджа-Оглана, К. Гринхилл [57] и Д.А. Шабанова [58], в которых авторы уменьшили интервал неопределенности для параметра c до $\ln 2 + o_r(1)$ при фиксированном k и $r \to \infty$ (работа [57]) и до $\frac{r-1}{r} + o_k(1)$ при фиксированном r и $k \to \infty$ (работа [58]).

Исследования сильного хроматического числа случайного гиперграфа также велись весьма активно. В неразреженных случаях асимптотическое поведение $\chi_{str}(H(n,k,p))$ было изучено в работе Дж. Шмидт [59], а также в уже упоминавшихся работах Э. Шамира [50], М. Кривелевича и Б. Судакова [51]: пусть $d = (k-1)\binom{n-1}{k-1}p$ и $d = o(n)$, но $d \to +\infty$ с ростом n, тогда выполнен следующий закон больших чисел:

$$\chi_{srt}(H(n,k,p)) \cdot \left(\frac{d}{2\ln d}\right)^{-1} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1$$

при $n \to +\infty$. Но снова данный результат неприменим в разреженном случае, когда $p = cn/\binom{n}{k}$ для фиксированного $c > 0$. В разреженном случае известно гораздо меньше. Единственный содержательный результат был получен в недавней работе А.Е. Балобанова и Д.А. Шабанова [60], где авторы рассмотрели частный случай $k = 3$. Они показали, что при достаточно больших r и

$$c < \frac{r\ln r}{6} - \frac{5}{18}\ln r - \frac{1}{3} - r^{-1/6}$$

сильное хроматическое число $H(n,3,cn/\binom{n}{3})$ с вероятностью, стремящейся к 1, не превосходит r, а при

$$c > \frac{r\ln r}{6} - \frac{5}{18}\ln r + O(\ln r/r)$$

оно, наоборот, строго больше r с вероятностью, стремящейся к 1. Случай $k > 3$ ранее детально не исследовался.

3.3 Новый результат

Основной результат данной главы состоит в получении нижней оценки пороговой вероятности для сильной r-раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ для $k = 4$.

Теорема 3.2. *Существует такое r_0, что для любого $r > r_0$ и любого $c > 0$, удовлетворяющего неравенству*

$$c < \frac{r\ln r}{6} - \frac{13}{36}\ln r - \frac{1}{6} - r^{-1/9}, \tag{3.2}$$

выполнено

$$\mathsf{P}\left(\chi_{str}\left(H\left(n,4,cn/\binom{n}{4}\right)\right) \leqslant r\right) \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Заметим, что наш результат весьма близок к максимально возможному. Проанализируем результат из работы [51]: авторы показали, что при достаточно большом $d > d_0$ (d_0 — некоторая абсолютная константа) с вероятностью, стремящейся к 1, при $p = cn/\binom{n}{4}$ выполнено

$$\chi_{str}(H(n,4,p)) \leqslant \frac{d}{2\ln d}\left(1 + \frac{1}{\ln^{0.1} d}\right)$$

при $d = 3\binom{n-1}{3}p$. Тем самым, при $\frac{d}{2\ln d}\left(1 + \frac{1}{\ln^{0.1} d}\right) \leqslant r$ и $cn = p\binom{n}{4} = 12dn$ будет выполнено

$$c < \frac{r\ln r}{6} - \frac{r(\ln r)^{0.9}}{6}(1 + o_r(1))$$

Значит, наш результат заметно усиливает предыдущие. Кроме того, если ограничиться только так называемыми сильными сбалансированными раскрасками, т.е. сильными раскрасками с мощностями цветовых классов, отличающимися не более чем на 1, то видно, что наш результат очень близок к оптимальному.

Утверждение 3.1. *Существует такое r_0, что для любого $r > r_0$ и любого $c > 0$, удовлетворяющего неравенству*

$$c > \frac{r\ln r}{6} - \frac{7}{36}\ln r - O\left(\frac{\ln r}{r}\right), \tag{3.3}$$

с вероятностью, стремящейся к 1, случайный гиперграф $H\left(n, 4, cn/\binom{n}{4}\right)$ не обладает сильной сбалансированной раскраской в r цветов.

Доказательство утверждения 3.1 весьма просто, достаточно рассмотреть равномерную модель случайного гиперграфа и применить метод первого момента. Все это будет сделано в параграфе 3.4.

Далее мы докажем теорему 3.2.

3.4 Доказательство теоремы 3.2

Доказательство теоремы основывается на применении метода второго момента и следует идеям и структуре работ [56], [58], [60].

3.4.1 Точная пороговая вероятность

Существование точной пороговой вероятности для свойства сильной r-раскрашиваемости случайных гиперграфов является одним из основных моментов нашего доказательства. Напомним, что функция $\hat{p}_{r,k} = \hat{p}_{r,k}(n) \in [0,1]$ называется *точной пороговой вероятностью* для свойства сильной r-раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n, k, p)$, если для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ выполнено:

$$\mathsf{P}(\chi_{str}(H(n,k,p)) \leqslant r) \to \begin{cases} 0, \text{ если } p = p(n) \geqslant (1+\varepsilon)\hat{p}_{r,k} \\ \text{ для всех достаточно больших } n; \\ 1, \text{ если } p = p(n) \leqslant (1-\varepsilon)\hat{p}_{r,k} \\ \text{ для всех достаточно больших } n. \end{cases}$$

Доказательство существования точной пороговой вероятности для классического свойства r -раскрашиваемости было произведено в работе [56] в лемме 1.2. Аналогичные рассуждения дают нам доказательство существования точной пороговой вероятности для свойства сильной r-раскрашиваемости.

Существование точной пороговой вероятности позволяет нам проверять, что вероятность $\mathsf{P}(\chi_{str}(H(n, 4, cn/\binom{n}{4})) \leqslant r)$ отделена от нуля при выполнении условия (3.2):

$$\liminf_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\chi_{str}\left(H\left(n, 4, \frac{cn}{\binom{n}{4}}\right)\right) \leqslant r\right) > 0. \tag{3.4}$$

Если (3.4) выполнено, то $\mathsf{P}(\chi_{str}(H(n, 4, \frac{c'n}{\binom{n}{4}})) \leqslant r) \to 1$ для всех $c' < c$. Таким образом, для доказательства теоремы 3.2 достаточно показать выполнение (3.4) при условии (3.2).

3.4.2 Равномерная модель

Нам понадобится также другая модель случайного гиперграфа: $H(n, 4, m)$, в котором m ребер выбираются случайно и независимо. Четыре вершины в каждом ребре также выбираются случайно и независимо с равномерным распределением на множестве всех вершин. Подобный гиперграф $H(n, 4, m)$ может содержать повторяющиеся ребра с одинаковым набором вершин и неправильные ребра с повторяющимися вершинами. В [56] авторы показали, что достаточно доказать выполнение неравенства (3.4) для гиперграфа $H(n, 4, \lceil cn \rceil)$ вместо $H(n, 4, \frac{cn}{\binom{n}{4}})$ для классического хроматического числа гиперграфа. Доказательство данного факта использует два свойства рассматриваемого события: монотонность и асимптотику математического ожидания числа ребер в двух моделях. Данные свойства выполнены и для события сильной $r-$раскрашиваемости.

3.4.3 Сбалансированная раскраска

Мы будем искать искомую сильную раскраску во множестве сбалансированных раскрасок. Напомним, что раскраска гиперграфа на n вершинах в r цветов называется *сбалансированной*, если количество вершин каждого цвета равняется $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ или $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$.

В работе [56] (лемма 1.4) авторы показали, что достаточно рассмотреть случай, когда n делится на r. В частности, они доказали, что если $t = \lfloor n/r \rfloor$, то

$$\mathsf{P}(\chi(H(n,k,\lceil cn \rceil)) \leqslant r) \geqslant \mathsf{P}(\chi(H(tr,k,\lceil cn \rceil)) \leqslant r) - o_n(1). \tag{3.5}$$

Данная лемма дословно переносится на наш случай сильного хроматического числа. Таким образом , нам достаточно доказать неравенство:

$$\liminf_{t\to\infty} \mathsf{P}(\chi_{str}(H(tr,4,\lceil c(t+1)r \rceil)) \leqslant r) > 0.$$

Пусть n делится на r, обозначим через X_n число сильных сбалансированных раскрасок в r цветов случайного гиперграфа $H(n,4,\lceil c(n+r) \rceil)$. Несложно заметить, что

$$\mathsf{P}(\chi_{str}(H(n,k,\lceil c(n+r) \rceil)) \leqslant r) \geqslant \mathsf{P}(X_n > 0). \tag{3.6}$$

Если мы покажем, что $\liminf\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(X_n > 0) > 0$ при условии (3.2), то неравенства(3.6) и (3.5) обеспечивают выполнение (3.4). Далее, раз X_n — неотрицательная случайная величина с целыми значениями, то согласно неравенству Пэли–Зигмунда получаем:

$$\mathsf{P}(X_n > 0) = \mathsf{P}(X_n \geqslant 1) \geqslant \frac{(\mathsf{E}X_n)^2}{\mathsf{E}X_n^2}.$$

Таким образом, нам достаточно показать, что для всех достаточно больших n выполнено

$$\mathsf{E}X_n^2 = O_r((\mathsf{E}X_n)^2) \tag{3.7}$$

при условии (3.2) и в предположении, что n делится на r.

3.4.4 Вычисление первого и второго моментов

Напомним, что X_n — это число сильных сбалансированных раскрасок $H(n,4,m)$ в r цветов. Тогда при $m = \lceil c(n+r) \rceil$ имеем:

$$\mathsf{E}X_n = \frac{n!}{((n/r)!)^r} \left(\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{r^4} + \right.$$

$$+6\frac{r(r-1)(r-2)}{r^3 n}+10\frac{r(r-1)}{r^2n^2}+\frac{1}{n^3}\Bigg)^m =$$

$$= \Theta_r\left(n^{(1/2-r/2)} r^n \left(\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{r^4}\right)^{cn}\right) =$$

$$= \Theta_r\left(n^{(1/2-r/2)}\exp\left[n\left(\ln r + c\ln\left(\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{r^3}\right)\right)\right]\right).$$

Замечание 3.1. Заметим, что при $c > \frac{-\ln r}{\ln\left(\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{r^3}\right)}$ выполнено $\mathsf{E}X_n \to 0$, что и дает оценку в утверждении 3.1.

Используя метод из работы Д.А. Шабанова [58], посчитаем второй момент X_n с помощью суммы по матрицам $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^r$, в которых $a_{ij} \geqslant 0$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, и сумма по любой строке и любому столбцу равна $\frac{n}{r}$.

$$\mathsf{E}X_n^2 = \sum_A \frac{n!}{\prod\limits_{i,j=1}^r a_{ij}!}\left(\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3,i_4\}|=4;\\ |\{j_1,j_2,j_3,j_4\}|=4}} \frac{a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}a_{i_3j_3}a_{i_4j_4}}{n^4} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{cn} =$$

(применяя выражение для первого момента и формулу Стирлинга для факториалов)

$$= O_r\left((\mathsf{E}X_n)^2 n^{r-1/2}\sum_A \frac{1}{\prod\limits_{i,j=1}^r \sqrt{a_{i,j}+1}}\exp[n(g(A)-f(A))]\right),$$

где

$$f(A) = \sum_{i,j=1}^r \frac{a_{ij}}{n}\ln(r^2 a_{ij}),$$

$$g(A) = c\ln\left(\left[\frac{r^3}{(r-1)(r-2)(r-3)}\right]^2 \sum_{\substack{\{i_1,i_2,i_3,i_4\}=4;\\ \{j_1,j_2,j_3,j_4\}=4}} \frac{a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}a_{i_3j_3}a_{i_4j_4}}{n^4}\right).$$

Введем $\varepsilon_{ij} = \frac{a_{i,j}}{n} - \frac{1}{r^2}$, $i,j = 1,\ldots,r$. Тогда для матрицы $\Upsilon = (\varepsilon_{ij}, i, j = 1, ..., r)$ выполнено: сумма по любой строке и любому столбцу равна нулю, при этом каждое $\varepsilon_{ij} \in [-1/r^2, 1/r - 1/r^2]$. Тогда

$$f(A) = f(\Upsilon) = \sum_{i,j=1}^{r} \frac{a_{i,j}}{n} \ln(r^2 a_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{r} \left(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{ij}\right) \ln(1 + r^2 \varepsilon_{ij});$$

$$g(A) = g(\Upsilon) =$$

$$= c \ln\left(\left(\frac{r^3}{(r-1)(r-2)(r-3)}\right)^2 \left(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{i_2 j_2}\right) \left(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{i_3 j_3}\right) \left(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{i_4 j_4}\right)\right). \quad (3.8)$$

В условиях теоремы 3.2 верна следующая лемма (доказательство будет представлено в параграфе 3.5).

Лемма 3.1. *Существует такая функция $b = b(r) > 0$, что для любой матрицы $\Upsilon = (\varepsilon_{ij} : i, j = 1, .., r)$ с указанными свойствами, выполнено следующее неравенство:*

$$f(\Upsilon) - g(\Upsilon) \geqslant b \sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^2.$$

Завершим доказательство теоремы, используя лемму 3.1.

$$\mathsf{E}X_n^2 \leqslant O_r\left((\mathsf{E}X_n)^2 n^{r-1/2} \sum_A \frac{1}{\prod_{i,j=1}^{r} \sqrt{a_{ij}+1}} e^{-bn \sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^2}\right) =$$

$$= O_r\left((\mathsf{E}X_n)^2 n^{r-1/2} \sum_A \frac{1}{\prod_{i,j=1}^{r} \sqrt{a_{ij}+1}} e^{-bn \sum_{i,j=1}^{r} (\frac{a_{ij}}{n} - \frac{1}{r^2})^2}\right) =$$

(несложно заметить, что $(a+1)^{-1/2} e^{-bn(a/n - 1/r)^2} = O_r(n^{-1/2})$ для всех $a = 0, ..., n/r$. Оценим таким образом соответствующий множитель для a_{ij} при $max(i,j) = r$)

$$= O_r\left((\mathsf{E}X_n)^2 n^{r-1/2} n^{-(r^2-(r-1)^2)/2} \sum_A \frac{1}{\prod_{i,j=1}^{r-1} \sqrt{a_{ij}+1}} e^{-bn \sum_{i,j=1}^{r-1} (\frac{a_{ij}}{n} - \frac{1}{r^2})^2}\right) =$$

$$= O_r\left((\mathsf{E}X_n)^2 \sum_A \frac{1}{\prod_{i,j=1}^{r-1} \sqrt{a_{ij}+1}} e^{-bn \sum_{i,j=1}^{r-1} (\frac{a_{ij}}{n} - \frac{1}{r^2})^2}\right) =$$

$$= O_r\left((\mathsf{E}X_n)^2 \sum_{i,j=1}^{r-1} \sum_{a_{ij}=0}^{n/r} \frac{1}{\prod\limits_{i,j=1}^{r-1} \sqrt{a_{ij}+1}} e^{-bn\sum\limits_{i,j=1}^{r-1}(\frac{a_{ij}}{n}-\frac{1}{r^2})^2} \right) =$$

$$= O_r\left((\mathsf{E}X_n)^2 \left(\sum_{a=0}^{n/r} \frac{1}{\sqrt{a+1}} e^{-bn(\frac{a}{n}-\frac{1}{r^2})^2} \right)^{(r-1)^2} \right).$$

Для $a \leqslant n/2r^2$ выполнено:

$$\sum_{a=0}^{n/2r^2} \frac{1}{\sqrt{a+1}} e^{-bn(\frac{a}{n}-\frac{1}{r^2})^2} = O_r(n \cdot e^{-\frac{bn}{4r^4}}) = O_r(1).$$

Оставшаяся сумма может быть оценена следующим образом:

$$\sum_{a=\frac{n}{2r^2}}^{\frac{n}{r}} \frac{1}{\sqrt{a+1}} e^{-bn(\frac{a}{n}-\frac{1}{r^2})^2} = O_r\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{a=\frac{n}{2r^2}}^{\frac{n}{r}} e^{-bn(\frac{a}{n}-\frac{1}{r^2})^2} \right) =$$

$$= O_r\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bn(\frac{x}{n}-\frac{1}{r^2})^2} dx \right) = O_r\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{bx^2}{n}} dx \right) = O_r(1).$$

Таким образом, получаем, что

$$\mathsf{E}X_n^2 = O_r((\mathsf{E}X_n)^2).$$

Равенство (3.7) выполнено, и теорема 3.2 доказана.

3.5 Доказательство леммы 3.1

Рассмотрим сумму под логарифмом в (3.8) подробнее:

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3,i_4\}|=4;\\ |\{j_1,j_2,j_3,j_4\}|=4}} (\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{i_1j_1})(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{i_2j_2})(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{i_3j_3})(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{i_4j_4}) =$$

$$= \frac{r^2(r-1)^2(r-3)^2(r-3)^2}{r^8} + 4\sum_{i_1,j_1=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1} \frac{(r-1)^2(r-2)^2(r-3)^2}{r^6} +$$

$$+6 \sum_{\substack{|\{i_1,i_2\}|=2;\\ |\{j_1,j_2\}|=2}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2} \frac{(r-2)^2(r-3)^2}{r^4} + 4 \sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3\}|=3;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3} \frac{(r-3)^2}{r^2} +$$

$$+\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3,i_4\}|=4;\\ |\{j_1,j_2,j_3,j_4\}|=4}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_4j_4}.$$

Несложно понять, что (подробное доказательство мы приведем в приложении)

$$\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}=0;\ \sum_{\substack{|\{i_1,i_2\}|=2;\\ |\{j_1,j_2\}|=2}}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}=\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2;\ \sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3\}|=3;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}}\varepsilon_{i_1,j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3}=4\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^3;$$

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3,i_4\}|=4;\\ |\{j_1,j_2,j_3,j_4\}|=4}}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_4j_4}=3\left(\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{i,j}^2\right)^2-18\sum_{i_1,i_3,j=1}^{r}\varepsilon_{i_1j}^2\varepsilon_{i_3j}^2-$$

$$-18\sum_{i;j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{i,j_1}^2\varepsilon_{i,j_3}^2+36\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{i,j}^4+6\sum_{i_1,i_3;j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_3j_1}\varepsilon_{i_1,j_3}\varepsilon_{i_3j_3}. \tag{3.9}$$

Тогда

$$g(\Upsilon)=c\ln\left(1+6\left(\frac{r}{r-1}\right)^2\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2+16\frac{r^4}{(r-1)^2(r-2)^2}\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^3+\right.$$

$$+3\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\left(\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2\right)^2-18\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i_1,i_3,j=1}^{r}\varepsilon_{i_1j}^2\varepsilon_{i_3j}-$$

$$-18\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i,j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{ij_1}^2\varepsilon_{ij_3}^2+36\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^4+$$

$$\left.+6\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i_1,i_3,j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_3j_1}\varepsilon_{i_3j_3}\right). \tag{3.10}$$

Утверждение 3.2. *Для любого* $i=1,\ldots,r$*:*

$$\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2\leqslant\frac{1}{r^2}$$

Доказательство. Если $\varepsilon_{ij}<0$, то $|\varepsilon_{ij}|\leqslant\frac{1}{r^2}$. Таким образом, получаем, что $\sum\limits_{j:\varepsilon_{ij}<0}\varepsilon_{ij}^2\leqslant\frac{1}{r^4}r=\frac{1}{r^3}$. Кроме того, $\sum\limits_{j:\varepsilon_{ij}>0}\varepsilon_{ij}\leqslant\frac{r-1}{r^2}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}$. В итоге $\sum\limits_{j:\varepsilon_{ij}>0}\varepsilon_{ij}^2\leqslant$ $\big(\sum\limits_{j:\varepsilon_{ij}>0}\varepsilon_{ij}\big)^2\leqslant\big(\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}\big)^2<\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^3}$. Стало быть, $\sum\limits_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2\leqslant\frac{1}{r^2}$.

□

Рассмотрим каждое слагаемое в (3.10) по отдельности:

1. $6\left(\dfrac{r}{(r-1)^2}\right)\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2 = 6\left(1+\frac{2}{r}+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2;$

2. $\left|16\dfrac{r^4}{((r-1)(r-2))^2}\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^3\right| \leqslant \frac{1}{r}16\left(1+\frac{6}{r}+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2;$

3. Используя утверждение 3.2, получаем:
$3\dfrac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2 \leqslant \frac{1}{r}3\left(1+\frac{12}{r}+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2;$

4. Используя утверждение 3.2, получаем:
$18\dfrac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum\limits_{i_1,i_3,j=1}^{r}\varepsilon_{i_1j}^2\varepsilon_{i_3j}^2 \leqslant 18\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{12}{r}+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2;$

5. Используя утверждение 3.2, получаем:
$18\dfrac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum\limits_{i,j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{ij_1}^2\varepsilon_{ij_3}^2 \leqslant 18\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{12}{r}+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2;$

6. $36\dfrac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^4 \leqslant 36\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{12}{r}+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2;$

7. Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем:
$\left|6\dfrac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum\limits_{i_1,i_3,j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_3j_1}\varepsilon_{i_3j_3}\right| \leqslant$
$\leqslant 6\left(1+\frac{12}{r}+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2 = 6\frac{1}{r}\left(1+\frac{12}{r}+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)\sum\limits_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2.$

Таким образом,

$$g(\Upsilon) \leqslant c\left(6+\frac{37}{r}+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2. \tag{3.11}$$

Введем следующие обозначения:

$$f_i(\Upsilon) = \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{ij}\right)\ln(1+r^2\varepsilon_{ij}), \tag{3.12}$$

$$g_i(\Upsilon) = c\left[6\left(\frac{r}{r-1}\right)^2\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2 + 16\frac{r^4}{(r-1)^2(r-2)^2}\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^3 + \right.$$

$$+3\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2\sum_{i_3,j=1}^{r}\varepsilon_{i_3j}^2 + 18\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i_3,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2\varepsilon_{i_3j}^2 +$$

$$+18\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{ij_1}^2\varepsilon_{i,j_3}^2+36\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^4+$$

$$+6\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i_3,j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{ij_1}\varepsilon_{ij_3}\varepsilon_{i_3j_1}\varepsilon_{i_3j_3}\Bigg]. \tag{3.13}$$

Заметим, что при этом $f(\Upsilon)=\sum\limits_{i=1}^{r}f_i(\Upsilon)$, а $g(\Upsilon)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{r}g_i(\Upsilon)$. Наша стратегия будет состоять в оценивании разностей $f_i(\Upsilon)-g_i(\Upsilon)$ в разных случаях.

3.5.1 Анализ различных вариантов: хорошие строчки

Назовем строчку i матрицы Υ *хорошей*, если для каждого $j=1,\ldots,r$ выполнено $\varepsilon_{ij}\leqslant\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}-\frac{2}{r\ln r}$. Используя (3.11) и (3.13), получаем

$$g_i(\Upsilon)\leqslant c\left(6+\frac{37}{r}+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2$$

Далее, применяя оценку сверху $c<\frac{r\ln r}{6}-\frac{13}{36}\ln r$, получаем

$$g_i(\Upsilon)\leqslant\left(r\ln r+\frac{30}{6}\ln r-\frac{259}{36}\frac{\ln r}{r}+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2.$$

Теперь рассмотрим (3.12) в случае хороших строк.

- Если $\varepsilon_{ij}<0$, то

$$\left(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{ij}\right)\ln(1+r^2\varepsilon_{ij})\geqslant\varepsilon_{ij}+\frac{1}{r^2}\frac{(r^2\varepsilon_{ij})^2}{2}=\varepsilon_{ij}+\frac{r^2}{2}\varepsilon_{ij}^2.$$

- Если $\varepsilon_{ij}>0$, но $\varepsilon_{ij}\leqslant\frac{1}{r\ln r}-\frac{1}{r^2}$, то используем оценку функции $\phi(x)=(1+x)\ln(1+x)$. Известно, что $\phi(x)>x+\dfrac{x^2}{2\left(1+\frac{x}{3}\right)}$ для $x>0$. Положим $x=r^2\varepsilon_{ij}$ и получим следующую оценку:

$$\left(\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{ij}\right)\ln(1+r^2\varepsilon_{ij})\geqslant\varepsilon_{ij}+\frac{r^2\varepsilon_{ij}^2}{2\left(1+\frac{r^2\varepsilon_{ij}}{3}\right)}\geqslant$$

(оценим знаменатель $1+\frac{r^2\varepsilon_{ij}}{3}<1+\frac{r}{3\ln r}$)

$$\geqslant\varepsilon_{ij}+\frac{3r\ln r}{2}\left(1+O\left(\frac{\ln r}{r}\right)\right)\varepsilon_{ij}^2.$$

- Далее, если $\varepsilon_{ij} \in (\frac{1}{r\ln r} - \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - 2\frac{\ln\ln r}{r\ln r})$, то оценим слагаемое следующим образом:
$$\left(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{ij}\right)\ln(1 + r^2\varepsilon_{ij}) \geqslant \left(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{ij}\right)\ln\left(\frac{r}{\ln r}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}(\ln r - \ln\ln r - 1) \geqslant$$
(используем следующее неравенство: $1 \geqslant r\varepsilon_{ij}(1 - \frac{1}{r} - \frac{2\ln\ln r}{\ln r})^{-1}$)
$$\geqslant \varepsilon_{ij} + r\varepsilon_{ij}^2\left(1 - \frac{1}{r} - \frac{2\ln\ln r}{\ln r}\right)^{-1}(\ln r - \ln\ln r - 1) =$$
$$= \varepsilon_{ij} + r\ln r\varepsilon_{ij}^2\left(1 + \frac{2\ln\ln r}{\ln r} + O\left(\frac{\ln\ln r}{\ln r}\right)^2\right)\left(1 - \frac{\ln\ln r}{\ln r} - \frac{1}{\ln r}\right) =$$
$$= \varepsilon_{ij} + r\ln r\varepsilon_{ij}\left(1 + \frac{\ln\ln r}{\ln r} + O\left(\frac{\ln\ln r}{\ln r}\right)^2\right).$$

- Наконец, если $\varepsilon_{ij} \in (\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - 2\frac{\ln\ln r}{r\ln r}, \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r\ln r})$, то оценим слагаемое следующим образом:
$$\left(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{ij}\right)\ln(1 + r^2\varepsilon_{ij}) \geqslant \left(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{ij}\right)\left(\ln r + \ln\left(1 - \frac{2\ln\ln r}{\ln r}\right)\right) \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}(\ln r - o(1) - 1) \geqslant$$
(воспользуемся тем, что $1 \geqslant r\varepsilon_{ij}(1 - \frac{1}{r} - \frac{2}{r\ln r})^{-1}$)
$$\geqslant \varepsilon_{ij} + r\varepsilon_{ij}^2\left(1 - \frac{1}{r} - \frac{2}{\ln r}\right)^{-1}(\ln r - o(1) - 1) =$$
$$= \varepsilon_{ij} + r\ln r\varepsilon_{ij}^2\left(1 + \frac{2}{\ln r} + O\left(\frac{1}{\ln r}\right)^2\right)\left(1 - o\left(\frac{1}{\ln r}\right) - \frac{1}{\ln r}\right) =$$
$$= \varepsilon_{ij} + r\ln r\varepsilon_{ij}^2\left(1 + \frac{1}{\ln r} + o\left(\frac{1}{\ln r}\right)\right).$$

Таким образом для хорошей строки при всех достаточно больших r получаем:
$$f_i(\Upsilon) - g_i(\Upsilon) \geqslant \frac{r^2}{4}\sum_{j:\varepsilon_{ij}<0}\varepsilon_{ij}^2 + \frac{r}{2}\sum_{j:\varepsilon_{ij}>0}\varepsilon_{ij}^2. \tag{3.14}$$

3.5.2 Анализ различных вариантов: нормальные строчки

Строчку i матрицы Υ назовем *нормальной*, если существует j_0 с условием $\varepsilon_{ij_0} \in [\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r\ln r}, \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - r^{-\frac{7}{4}}]$. Заметим, что подобный j_0 может быть только один, а все остальные ε_{ij} должны быть меньше $\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r\ln r}$, $j \neq j_0$. Будем считать, что $j_0 = i$, и обозначим $\delta_{ii} = \delta_i = \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \varepsilon_{ii}$, тогда $\delta_i \in [r^{-\frac{7}{4}}, \frac{2}{r\ln r}]$. Также обозначим $\delta_{ij} = \frac{1}{r^2} + \varepsilon_{ij}$ при $j \neq i$. Тогда все δ_{ij} неотрицательны, и их сумма по $j \neq i$ равна δ_i.

Оценим (3.12) в этом случае:

$$f_i(\Upsilon) = \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{1}{r^2} + \varepsilon_{ij}\right) \ln\left(1 + r^2\varepsilon_{ij}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{r} - \delta_i\right) \ln\left(r - r^2\delta_i\right) + \sum_{j\neq i}^{r} \delta_{ij} \ln(r^2\delta_{ij}) =$$

$$= \frac{\ln r}{r} - \delta_i \ln r + \left(\frac{1}{r} - \delta_i\right) \ln\left(1 - r\delta_i\right) + 2\left(\ln r\right) \sum_{j\neq i}^{r} \delta_{ij} + \sum_{j\neq i}^{r} \delta_{ij} \ln \delta_{ij} \geqslant$$

($\sum\limits_{j\neq i}^{r} \delta_{ij} = \delta_i$, поэтому последняя сумма по нервенству Йенсена не меньше, чем $\delta_i \ln \delta_i - \delta_i \ln(r-1)$)

$$\geqslant \frac{\ln r}{r} + \delta_i \ln r + \left(\frac{1}{r} - \delta_i\right) \ln\left(1 - r\delta_i\right) + \delta_i \ln \delta_i - \delta_i \ln\left(r-1\right) \geqslant$$

(воспользуемся тем, что $\ln(1 - r\delta_i) > \dfrac{-r\delta_i}{1 - r\delta_i}$)

$$\geqslant \frac{\ln r}{r} + \delta_i \ln \delta_i + \delta_i \ln\left(\frac{r}{r-1}\right) - \delta_i. \tag{3.15}$$

Теперь оценим (3.13). Необходимо рассмотреть и оценить сумму $\sum\limits_{j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^2$.

$$\sum_{j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^2 = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \delta_i\right)^2 + \sum_{j\neq i} \left(\frac{1}{r^2} - \delta_{ij}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} - \frac{2}{r^3} - \frac{2\delta_i}{r} + \frac{2\delta_i}{r^2} + \delta_i^2 + \frac{r-1}{r^4} - \frac{2\delta_i}{r^2} + \sum_{j\neq i} \delta_{ij}^2 \leqslant$$

(воспользуемся тем, что $\sum\limits_{j\neq i}\delta_{ij}^2 \leqslant \delta_i^2$)

$$\leqslant \frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^3}-\frac{2\delta_i}{r}+2\delta_i^2. \qquad (3.16)$$

Используя эту оценку и (3.11), получаем, что

$$g_i(\Upsilon)\leqslant 6c\left(1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right)\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2 = 6c\left(\frac{1}{r^2}-\frac{2\delta_i}{r}+2\delta_i^2+O\left(\frac{1}{r^3}\right)\right)\leqslant$$

(воспользуемся оценкой $c<\frac{r\ln r}{6}$)

$$\leqslant \frac{\ln r}{r}-2\delta_i\ln r+2\delta_i^2(r\ln r)+O\left(\frac{\ln r}{r^2}\right).$$

Заметим, что $r\delta_i=o(1)$ и $\delta_i\gg r^{-2}$, из чего следует, что

$$g_i(\Upsilon)\leqslant\frac{\ln r}{r}-2\delta_i\ln r(1+o(1)). \qquad (3.17)$$

Применяя одновременно (3.15) и (3.17), получаем, что при $\delta_i\to 0$ выполнено

$$f_i(\Upsilon)-g_i(\Upsilon)\geqslant \delta_i\ln\delta_i-\delta_i+\delta_i\ln\left(\frac{r}{r-1}\right)+2\delta_i\ln r\,(1+o(1))\geqslant$$

(т.к. $\ln\delta_i\geqslant -\frac{7}{4}\ln r$)

$$\geqslant\frac{1}{4}\delta_i\ln r(1+o(1))\geqslant\frac{1}{8}r^{-\frac{7}{4}}\ln r. \qquad (3.18)$$

3.5.3 Анализ различных вариантов: плохие строчки

Остается разобрать последний случай. Строчку i матрицы Υ будем называть *плохой* в том случае, если существует такое j_0, что $\varepsilon_{ij_0}>\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}-r^{-\frac{7}{4}}$. Без ограничения общности считаем, что $j_0=i$ и обозначим $\delta_i=\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}-\varepsilon_{ii}$, $\delta_{ij}=\frac{1}{r^2}+\varepsilon_{ij}$ для $j\neq i$.

Пусть I – набор индексов плохих строчек, т.е. тех индексов, которые приходятся на плохие строчки. Тогда рассмотрим $g'(\Upsilon)$ и $f'(\Upsilon)$, где

$$f'(\Upsilon)=\sum_{i\in I}f_i(\Upsilon),$$

а

$$g'(\Upsilon)=c\ln\left(1+\sum_{i\in I}\left[6\left(\frac{r}{r-1}\right)^2\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2+16\frac{r^4}{(r-1)^2(r-2)^2}\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{i,j}^3+\right.\right.$$

$$+3\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2\sum_{i_3,j=1}^{r}\varepsilon_{i_3j}^2-18\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i_3,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2\varepsilon_{i_3j}^2+$$

$$-18\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{ij_1}^2\varepsilon_{ij_3}^2+36\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^4+$$

$$+6\frac{r^6}{((r-1)(r-2)(r-3))^2}\sum_{i_3,j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{ij_1}\varepsilon_{ij_3}\varepsilon_{i_3j_1}\varepsilon_{i_3j_3}\Bigg]\Bigg). \tag{3.19}$$

Далее, используя (3.11),(3.16),(3.19) и обозначив $x=|I|$, получаем

$$g'(\Upsilon)\leqslant c\ln\left(1+\sum_{i\in I}\left[\frac{6}{r^2}+\frac{31}{r^3}-\frac{12\delta_i}{r}+O(r^{-\frac{7}{2}})\right]\right)=$$

$$=c\ln\left(1+\frac{6x}{r^2}+\frac{31x}{r^3}-\sum_{i\in I}\frac{12\delta_i}{r}+O(xr^{-\frac{7}{2}})\right)\leqslant$$

$$\leqslant c\left[\frac{6x}{r^2}+\frac{31x}{r^3}-\sum_{i\in I}\frac{12\delta_i}{r}+O(xr^{-\frac{7}{2}})-\frac{36x^2}{2r^4}+O(x^2r^{-\frac{19}{4}})\right]=$$

$$=c\left(\frac{6x}{r^2}+\frac{31x}{r^3}-\frac{18x^2}{r^4}-\sum_{i\in I}\frac{12\delta_i}{r}+O(r^{-\frac{5}{2}})\right).$$

Подставим $c=\frac{r\ln r}{6}-\frac{13}{36}\ln r-\frac{1}{6}-r^{-1/9}$.

$$g'(\Upsilon)=\left(\frac{r\ln r}{6}-\frac{13}{36}\ln r-\frac{1}{6}-r^{-1/9}\right)\left(\frac{6x}{r^2}+\frac{31x}{r^3}-\frac{18x^2}{r^4}-\sum_{i\in I}\frac{12\delta_i}{r}+O(r^{-\frac{5}{2}})\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{x\ln r}{r}+3\frac{x\ln r}{r^2}-\frac{6x}{r^{2+1/9}}-3x^2\frac{\ln r}{r^3}-\frac{x}{r^2}-2\left(\ln r\right)\sum_{i\in I}\delta_i+O\left(\frac{\ln r}{r^{\frac{3}{2}}}\right). \tag{3.20}$$

Выпишем оценку $f'(\Upsilon)$:

$$f'(\Upsilon)=\sum_{i\in I}f_i(\Upsilon)\geqslant\frac{x\ln r}{r}+\sum_{i\in I}\left[\delta_i\ln\delta_i+\delta_i\ln\left(\frac{r}{r-1}\right)-\delta_i\right]. \tag{3.21}$$

Собирая вместе (3.20) и (3.21), получаем, что

$$f'(\Upsilon)-g'(\Upsilon)\geqslant-3\frac{x\ln r}{r^2}+\frac{6x}{r^{2+1/9}}+3x^2\frac{\ln r}{r^3}+O\left(\frac{\ln r}{r^{\frac{3}{2}}}\right)+\frac{x}{r^2}+$$

$$+\sum_{i\in I}\left[\delta_i\ln\delta_i+\delta_i\ln\left(\frac{r}{r-1}\right)+2\delta_i\ln r-\delta_i\right]. \tag{3.22}$$

Выражение $\delta_i\ln\delta_i+\delta_i\ln\left(\frac{r}{r-1}\right)+2\delta_i\ln r-\delta_i$ минимизируется при $\delta_i=\frac{r-1}{r^2}$. Таким образом получаем, что

$$f'(\Upsilon)-g'(\Upsilon)\geqslant -3\frac{x\ln r}{r^2}+\frac{6x}{r^{2+1/9}}+3x^2\frac{\ln r}{r^3}+O\left(\frac{\ln r}{r^{3/2}}\right)=$$

$$=3\frac{x\ln r}{r^2}\left(\frac{x}{r}-1\right)+\frac{6x}{r^{2+1/9}}+O\left(\frac{\ln r}{r^{3/2}}\right). \tag{3.23}$$

3.5.4 Анализ различных вариантов: перебор случаев

Обозначим через J множество индексов нормальных строчек, а через T — множество индексов хороших строчек. Также обозначим $z=|J|$ — число нормальных строчек, соответственно, число хороших строчек будет равно $r-x-z$.

1. Если $x=0$ и $z=0$, то получаем, что для оценки разности $f(\Upsilon)$ и $g(\Upsilon)$ нам достаточно оценки (3.14).

2. Если $x=0$ и $z>0$ нам достаточно оценки (3.18).

3. Случай $x\neq 0$ разбивается на следующие варианты:

   (a) $x\geqslant r-\frac{r^{1-1/9}}{\ln r}$, тогда, используя (3.23), получаем

   $$f'(\Upsilon)-g'(\Upsilon)\geqslant\frac{3}{2r^{1+1/9}}.$$

   (b) $x< r-\frac{r^{1-1/9}}{\ln r}$, тогда, используя (3.23), получаем,что

   $$f'(\Upsilon)-g'(\Upsilon)\geqslant -\frac{3\ln r}{r}. \tag{3.24}$$

   В этом случае возможны следующие варианты:

   i. $z\geqslant r^{4/5}$. Тогда, используя (3.18) и (3.24), получаем:

   $$f(\Upsilon)-g(\Upsilon)\geqslant\sum_{i\in J}(f_i(\Upsilon)-g_i(\Upsilon))+f'(\Upsilon)-g'(\Upsilon)\geqslant$$

   $$\geqslant r^{4/5}\frac{1}{8}r^{-\frac{7}{4}}\ln r-\frac{3\ln r}{r}\geqslant\frac{1}{9}r^{-19/20}\ln r$$

ii. $z < r^{4/5}$. Пусть $i \in I$ — плохая строчка, тогда

$$\sum_{i' \in T} \varepsilon_{i'i} = -\varepsilon_{ii} - \sum_{\substack{h' \in J \cup I; \\ h' \neq i}} \varepsilon_{h'i} \leqslant$$

($\varepsilon_{ii} \geqslant \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - r^{-7/4}$, а все остальные не меньше $-r^{-2}$)

$$\leqslant -\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + r^{-\frac{7}{4}} + \frac{1}{r^2}(|J| + |I|) \leqslant -\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + r^{-\frac{7}{4}} +$$

$$+\frac{1}{r^2}\left(r^{4/5} + r - \frac{r^{1-1/9}}{\ln r}\right) = -\frac{r^{-10/9}}{\ln r}(1 + o(1)) \equiv y.$$

По неравенству Коши-Буняковского получаем, что

$$\sum_{i' \in T : \varepsilon_{i'i} < 0} \varepsilon_{i'i}^2 \geqslant \frac{1}{r} y^2. \tag{3.25}$$

Суммируя (3.14), (3.18), (3.23) и (3.25), получаем:

$$f(\Upsilon) - g(\Upsilon) \geqslant \sum_{i \in T} (f_i(\Upsilon) - g_i(\Upsilon)) + f'(\Upsilon) - g'(\Upsilon) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i \in T} \left(\frac{r^2}{4} \sum_{j : \varepsilon_{ij} < 0} \varepsilon_{ij}^2\right) - 3\frac{x \ln r}{r^2} + O\left(\frac{\ln r}{r^{3/2}}\right) \geqslant x\frac{r}{4}y^2 - 3\frac{x \ln r}{r^2} + O\left(\frac{\ln r}{r^{3/2}}\right) =$$

$$= \frac{x}{4r^{11/9}(\ln r)^2}(1 + o(1)) - 3\frac{x \ln r}{r^2} + O\left(\frac{\ln r}{r^{3/2}}\right).$$

Т.к. $x \geqslant 1$, полученное выражение превосходит $\frac{1}{8r^{11/9}(\ln r)^2} \sum\limits_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^2$. Таким образом, лемма 3.1 доказана.

3.6 Приложение

Рассмотрим подробнее как получаются равенства (3.9) .

1. Тождество $\sum\limits_{i,j} \varepsilon_{ij} = 0$ следует из определения ε_{ij}: сумма по любой строке и любому столбцу равна нулю, при этом каждое $\varepsilon_{ij} \in [-1/r^2, 1/r - 1/r^2]$.

2. Несложными преобразованиями получаем, что

$$\sum_{\substack{i_1 \neq i_2;\\ j_1 \neq j_2}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} = \sum_{\substack{i_1, i_2;\\ j_1 \neq j_2}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} - \sum_{\substack{i;\\ j_1 \neq j_2}} \varepsilon_{i j_1} \varepsilon_{i j_2} =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, j_1, j_2 = 1}^{r} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} - \sum_{i_1, i_2, j = 1}^{r} \varepsilon_{i_1 j} \varepsilon_{i_2 j} - \sum_{i, j_1, j_2 = 1}^{r} \varepsilon_{i j_1} \varepsilon_{i j_2} + \sum_{i, j = 1}^{r} \varepsilon_{ij}^2.$$

Первые три суммы в силу определения ε_{ij} равны нулю. Таким образом, получаем второе тождество:

$$\sum_{\substack{i_1 \neq i_2;\\ j_1 \neq j_2}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} = \sum_{i, j = 1}^{r} \varepsilon_{ij}^2.$$

3. Аналогичным способом раскроем $\sum\limits_{\substack{|\{i_1, i_2, i_3\}| = 3;\\ |\{j_1, j_2, j_3\}| = 3}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} \varepsilon_{i_3 j_3}$.

$$\sum_{\substack{|\{i_1, i_2, i_3\}| = 3;\\ |\{j_1, j_2, j_3\}| = 3}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} \varepsilon_{i_3 j_3} = \sum_{\substack{|\{i_1, i_2\}| = 2, i_3;\\ |\{j_1, j_2, j_3\}| = 3}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} \varepsilon_{i_3 j_3} -$$
$$- 2 \sum_{\substack{|\{i_1, i_2\}| = 2, i_1 = i_3;\\ |\{j_1, j_2, j_3\}| = 3}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} \varepsilon_{i_1 j_3}. \tag{3.26}$$

Распишем вторую сумму:

$$\sum_{\substack{|\{i_1, i_2\}| = 2, i_1 = i_3;\\ |\{j_1, j_2, j_3\}| = 3}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} \varepsilon_{i_1 j_3} = \sum_{\substack{i_1, i_2;\\ |\{j_1, j_2, j_3\}| = 3}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_1 j_3} \varepsilon_{i_2 j_2} -$$
$$- \sum_{\substack{i;\\ |\{j_1, j_2, j_3\}| = 3}} \varepsilon_{i j_1} \varepsilon_{i j_2} \varepsilon_{i j_3} = \sum_{\substack{i_1, i_2;\\ |\{j_1, j_2\}| = 2, j_3}} \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_1 j_3} \varepsilon_{i_2 j_2} - 2 \sum_{\substack{i_1, i_2;\\ |\{j_1, j_2\}| = 2, j_3 = j_1}} \varepsilon_{i_1 j_1}^2 \varepsilon_{i_2 j_2} -$$
$$- \sum_{\substack{i;\\ |\{j_1, j_2\}| = 2, j_3}} \varepsilon_{i j_1} \varepsilon_{i j_2} \varepsilon_{i j_3} + 2 \sum_{\substack{i;\\ |\{j_1, j_2\}| = 2, j_3 = j_2}} \varepsilon_{i j_1} \varepsilon_{i j_2}^2. \tag{3.27}$$

Раскроем каждую из четырех сумм.

- $$\sum_{\substack{i_1,i_2;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_2j_2} = \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2,j_3=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_2j_2} -$$
$$- \sum_{i_1,i_2,j_1,j_3=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_2j_1} = 0$$
- $$\sum_{\substack{i_1,i_2;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3=j_1}} \varepsilon_{i_1j_1}^2\varepsilon_{i_2j_2} = \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}^2\varepsilon_{i_2j_2} - \sum_{i_1,i_2,j=1}^{r} \varepsilon_{i_1j}^2\varepsilon_{i_2j} = 0$$
- $$\sum_{\substack{i;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3}} \varepsilon_{ij_1}\varepsilon_{ij_2}\varepsilon_{ij_3} = \sum_{i,j_1,j_2,j_3=1}^{r} \varepsilon_{ij_1}\varepsilon_{ij_2}\varepsilon_{ij_3} - \sum_{i,j_1=j_2,j_3=1}^{r} \varepsilon_{ij_1}^2\varepsilon_{ij_3} = 0$$
- $$\sum_{\substack{i;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3=j_2}} \varepsilon_{ij_1}\varepsilon_{ij_2}^2 = \sum_{i,j_1,j_2=1}^{r} \varepsilon_{ij_1}\varepsilon_{ij_2}^2 - \sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^3 = -\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^3$$

Подставляя полученные выражения в (3.27), получим:

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_2\}|=2,i_1=i_3;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_1j_3} = -2\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^3. \tag{3.28}$$

Раскроем первую сумму в (3.26):

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_2\}|=2,i_3;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3} = \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3} - \sum_{\substack{i_1,i_2;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_2j_2} =$$
$$= \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3} - 2\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_1=j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_3j_1}\varepsilon_{i_2j_2} -$$
$$- \sum_{\substack{i_1,i_2;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_2j_2} + 2\sum_{\substack{i_1,i_2;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_1=j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}^2\varepsilon_{i_2j_2}. \tag{3.29}$$

Рассмотрим каждую из четырех сумм.

- $$\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3} = \sum_{i_1,i_2,i_3,j_1,j_2,j_3=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3} -$$
$$- \sum_{i_1,i_2,i_3,j_1,j_3=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_1}\varepsilon_{i_3j_3} = 0$$

- $$\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_1=j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_3j_1}\varepsilon_{i_2j_2} = \sum_{i_1,i_2,i_3,j_1,j_2=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_1}$$
$$- \sum_{i_1,i_2,i_3,j=1}^{r} \varepsilon_{i_1j}\varepsilon_{i_2j}\varepsilon_{i_3j} = 0$$

- $$\sum_{\substack{i_1,i_2;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_2j_2} = \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2,j_3=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_2j_2} -$$
$$- \sum_{i_1,i_2,j_1,j_3=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_2j_1} = 0$$

- $$\sum_{\substack{i_1,i_2;\\ |\{j_1,j_2\}|=2,j_1=j_3}} \varepsilon^2_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2} = \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2=1}^{r} \varepsilon^2_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2} - \sum_{i_1,i_2,j=1}^{r} \varepsilon^2_{i_1j}\varepsilon_{i_2j} = 0$$

Подставляя полученные значения в (3.29), а затем (3.29) и (3.27) в (3.26), получаем третье тождество в (3.9):

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3\}|=3;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3} = 4\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon^3_{ij}.$$

4. Сумма $\sum\limits_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3,i_4\}|=4;\\ |\{j_1,j_2,j_3,j_4\}|=4}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_4j_4}$ раскрывается аналогичным образом.

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3,i_4\}|=4;\\ |\{j_1,j_2,j_3,j_4\}|=4}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_4j_4} = \sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3,\}|=3,i_4;\\ |\{j_1,j_2,j_3,j_4\}|=4}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_4j_4}$$

$$-3\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3\}|=3,i_4=i_3;\\|\{j_1,j_2,j_3,j_4\}|=4}}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_3j_4}=-3\left[\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3\}|=3,i_4=i_3;\\|\{j_1,j_2,j_3\}|=3,j_4}}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_3j_4}-\right.$$

$$\left.-\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3\}|=3,i_4=i_3;\\|\{j_1,j_2,j_3\}|=3,j_4=j_3}}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3}^2-2\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3\}|=3,i_3=i_4;\\|\{j_1,j_2,j_3\}|=3,j_1=j_4}}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_3j_1}\right]. \qquad (3.30)$$

Несложно заметить, что первое слагаемое в (3.30) обнуляется благодаря свойству ε_{ij}. Распишем далее раскрытие второго и третьего слагаемых в (3.30). Начнем со второго, обозначим его через A, третье слагаемое обозначим через B. Получаем:

$$A=\sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2,i_2;\\|\{j_1,j_2,j_3\}|=3,}}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3}^2-\sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2,i_1=i_2;\\|\{j_1,j_2,j_3\}|=3,}}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_2}\varepsilon_{i_3j_3}^2-$$

$$-\sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2,i_3=i_2;\\|\{j_1,j_2,j_3\}|=3,}}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_3j_2}\varepsilon_{i_3j_3}^2. \qquad (3.31)$$

Первое слагаемое в (3.31) обнуляется. Раскроем далее второе и третье. Раскрывая второе, получаем:

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2,i_1=i_2;\\|\{j_1,j_2,j_3\}|=3}}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_2}\varepsilon_{i_3j_3}^2=\sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2;\\|\{j_1,j_3\}|=2,j_2}}\varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_2}\varepsilon_{i_3j_3}^2-$$

$$-\sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2;\\|\{j_1,j_3\}|=2,j_2=j_1}}\varepsilon_{i_1j_1}^2\varepsilon_{i_3j_3}^2-\sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2;\\|\{j_2,j_3\}|=2,j_3=j_1}}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_1j_2}\varepsilon_{i_3j_3}^2.$$

Первое слагаемое обнуляется, второе раскрываем дальше:

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2;\\|\{j_1,j_3\}|=2,j_2=j_1}}\varepsilon_{i_1j_1}^2\varepsilon_{i_3j_3}^2=\sum_{\substack{i_1,i_3;\\|\{j_1,j_3\}|=2}}\varepsilon_{i_1j_1}^2\varepsilon_{i_3j_3}^2-\sum_{\substack{i_1=i_3;\\|\{j_1,j_3\}|=2}}\varepsilon_{i_3j_1}^2\varepsilon_{i_3j_3}^2=$$

$$=(\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^2)^2-\sum_{i_1,i_3,j=1}^{r}\varepsilon_{i_1j}^2\varepsilon_{i_3j}^2-\sum_{i,j_1,j_3=1}^{r}\varepsilon_{ij_1}^2\varepsilon_{ij_3}^2+\sum_{i,j=1}^{r}\varepsilon_{ij}^4. \qquad (3.32)$$

Третье раскрывается следующим образом:

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2;\\|\{j_2,j_3\}|=2,j_3=j_1}}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_1j_2}\varepsilon_{i_3j_3}^2=\sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2;\\j_2,j_3}}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_1j_2}\varepsilon_{i_3j_3}^2-\sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2;\\j_2=j_3}}\varepsilon_{i_1j_3}^2\varepsilon_{i_3j_3}^2=$$

$$= -\sum_{i_1,i_3,j=1}^{r} \varepsilon_{i_1 j}^2 \varepsilon_{i_3 j}^2 + \sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^4. \tag{3.33}$$

Третье слагаемое в (3.31) распишем:

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2, i_3=i_2;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1 j_1}\varepsilon_{i_3 j_2}\varepsilon_{i_3 j_3}^2 = \sum_{\substack{i_1,i_3;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1 j_1}\varepsilon_{i_3 j_2}\varepsilon_{i_3 j_3}^2 - \sum_{\substack{i_1=i_3;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_3 j_1}\varepsilon_{i_3 j_2}\varepsilon_{i_3 j_3}^2 =$$

$$= -\sum_{\substack{i_1=i_3;\\ |\{j_1,j_3\}|=2, j_2}} \varepsilon_{i_3 j_1}\varepsilon_{i_3 j_2}\varepsilon_{i_3 j_3}^2 + \sum_{\substack{i_1=i_3;\\ |\{j_1,j_3\}|=2, j_2=j_3}} \varepsilon_{i_3 j_1}\varepsilon_{i_3 j_3}^3 + \sum_{\substack{i_1=i_3;\\ |\{j_1,j_3\}|=2, j_2=j_1}} \varepsilon_{i_3 j_1}^2\varepsilon_{i_3 j_3}^2 =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^4 + \sum_{i,j_1,j_3=1}^{r} \varepsilon_{i j_1}^2 \varepsilon_{i j_3}^2 - \sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^4. \tag{3.34}$$

Суммируя (3.32), (3.33) и (3.34) и подставляя в (3.31) получаем, что

$$A = (\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^2)^2 + 4\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^4 - 2\sum_{i_1,i_3,j=1}^{r} \varepsilon_{i_1 j}^2 \varepsilon_{i_3 j}^2 - 2\sum_{i,j_1,j_3=1}^{r} \varepsilon_{i j_1}^2 \varepsilon_{i j_3}^2. \tag{3.35}$$

Распишем теперь слагаемое B из (3.30):

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3\}|=3, i_3=i_4;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3, j_1=j_4}} \varepsilon_{i_1 j_1}\varepsilon_{i_2 j_2}\varepsilon_{i_3 j_3}\varepsilon_{i_3 j_1} = \sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=3, i_2;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1 j_1}\varepsilon_{i_2 j_2}\varepsilon_{i_3 j_3}\varepsilon_{i_3 j_1}. -$$

$$- \sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2, i_2=i_3;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1 j_1}\varepsilon_{i_3 j_2}\varepsilon_{i_3 j_3}\varepsilon_{i_3 j_1} - \sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=3, i_2=i_1;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1 j_1}\varepsilon_{i_1 j_2}\varepsilon_{i_3 j_3}\varepsilon_{i_3 j_1} \tag{3.36}$$

Первое слагаемое в (3.36) обнуляется в соответствии со свойствами ε_{ij}. Распишем второе:

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2, i_2=i_3;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1 j_1}\varepsilon_{i_3 j_2}\varepsilon_{i_3 j_3}\varepsilon_{i_3 j_1} = \sum_{\substack{i_1,i_3;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1 j_1}\varepsilon_{i_3 j_2}\varepsilon_{i_3 j_3}\varepsilon_{i_3 j_1} -$$

$$- \sum_{\substack{i_1=i_3;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_3 j_1}\varepsilon_{i_3 j_2}\varepsilon_{i_3 j_3}\varepsilon_{i_3 j_1} = -\sum_{\substack{i;\\ |\{j_1,j_2\}|=2, j_3}} \varepsilon_{i j_1}^2 \varepsilon_{i j_2}\varepsilon_{i j_3} +$$

$$+ \sum_{\substack{i;\\ |\{j_1,j_2\}|=2, j_3=j_1}} \varepsilon_{i j_1}^3 \varepsilon_{i j_2} + \sum_{\substack{i;\\ |\{j_1,j_2\}|=2, j_3=j_2}} \varepsilon_{i j_1}^2 \varepsilon_{i j_2}^2 =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^4 + \sum_{i,j_1,j_2=1}^{r} \varepsilon_{i j_1}^2 \varepsilon_{i j_2}^2 - \sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^4. \tag{3.37}$$

Теперь распишем третье слагаемое из (3.36):

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2, i_2=i_1;\\ |\{j_1,j_2,j_3\}|=3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_2}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_3j_1} = \sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2;\\ |\{j_1,j_3\}|=2, j_2}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_2}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_3j_1} -$$

$$- \sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2;\\ |\{j_1,j_3\}|=2, j_2=j_1}} \varepsilon_{i_1j_1}^2\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_3j_1} - \sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2;\\ |\{j_1,j_3\}|=2, j_2=j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_3j_1}.$$

Все так же первое слагаемое обнуляется, расписываем второе:

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2;\\ |\{j_1,j_3\}|=2, j_2=j_1}} \varepsilon_{i_1j_1}^2\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_3j_1} = \sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2;\\ j_1,j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}^2\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_3j_1} - \sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2;\\ j_1=j_3}} \varepsilon_{i_1j}^2\varepsilon_{i_3j}^2 =$$

$$= - \sum_{i_1,i_3,j=1}^{r} \varepsilon_{i_1j}^2\varepsilon_{i_3j}^2 + \sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^4. \tag{3.38}$$

И расписываем третье слагаемое:

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_3\}|=2;\\ |\{j_1,j_3\}|=2, j_2=j_3}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_3j_1} = \sum_{\substack{i_1,i_3;\\ |\{j_1,j_3\}|=2}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_3j_1} - \sum_{\substack{i_1=i_3;\\ |\{j_1,j_3\}|=2}} \varepsilon_{ij_1}^2\varepsilon_{ij_3}^2 =$$

$$= \sum_{i_1,i_3,j_1,j_3=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_3j_1} - \sum_{i_1,i_3,j=1}^{r} \varepsilon_{i_1j}^2\varepsilon_{i_3j}^2 - \sum_{i,j_1,j_3=1}^{r} \varepsilon_{ij_1}^2\varepsilon_{ij_3}^2 + \sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^4. \tag{3.39}$$

Суммируя (3.37), (3.38), (3.39) и подставляя в (3.36), получаем:

$$B = 4\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^4 - 2\sum_{i_1,i_3,j=1}^{r} \varepsilon_{i_1j}^2\varepsilon_{i_3j}^2 - 2\sum_{i,j_1,j_3=1}^{r} \varepsilon_{ij_1}^2\varepsilon_{ij_3}^2 + \sum_{i_1,i_3,j_1,j_3=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_3j_1}. \tag{3.40}$$

Подставляя полученные (3.35) и (3.40) в (3.30), получаем:

$$\sum_{\substack{|\{i_1,i_2,i_3,i_4\}|=4;\\ |\{j_1,j_2,j_3,j_4\}|=4}} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_2j_2}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_4j_4} = 3\left[(\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^2)^2 + 12\sum_{i,j=1}^{r} \varepsilon_{ij}^4 - 6\sum_{i_1,i_3,j=1}^{r} \varepsilon_{i_1j}^2\varepsilon_{i_3j}^2 - \right.$$

$$\left. -6\sum_{i,j_1,j_3=1}^{r} \varepsilon_{ij_1}^2\varepsilon_{ij_3}^2 + 2\sum_{i_1,i_3,j_1,j_3=1}^{r} \varepsilon_{i_1j_1}\varepsilon_{i_1j_3}\varepsilon_{i_3j_3}\varepsilon_{i_3j_1}\right].$$

Заключение

В диссертационной работе были исследованы актуальные задачи экстремальной комбинаторики и теории гиперграфов. Основные полученные результаты состоят в следующем:

- получены новые оценки величины $m(n, r, s)$, равной минимальному числу ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом больше r и обхватом больше s;
- доказан структурный результат о количественной связи характеристик однородного гиперграфа с большим обхватом и большим хроматическим числом;
- найдена асимптотика онлайн предписанного хроматического числа полного r-дольного k-однородного гиперграфа $H(m, r, k)$;
- обоснована новая нижняя оценка точной пороговой вероятности существования сильной раскраски в r-цветов у случайного 4-однородного гиперграфа в биномиальной модели $H(n, 4, p)$.

Перспективы дальнейших исследований очевидны. Было бы интересно дополнительно улучшить полученные оценки числа ребер в n-однородном гиперграфе с большим хроматическим числом и большим обхватом. Требуют тщательного изучения величины $c_{ol}(n, r, s)$ из параграфа 2.3, было бы интересно получить содержательные верхние оценки для них. Кроме того, в диссертации получена нижняя оценка точной пороговой вероятности существования сильной раскраски в r-цветов у случайного 4-однородного гиперграфа, в то время как усиление верхней оценки остается открытой проблемой.

Список цитируемой литературы

[1] P. Erdős, A. Hajnal, “On a property of families of sets”, *Acta Mathematica of the Academy of Sciences*, Hungary, **12**:1-2 (1961), 87–123.

[2] P. Erdős, L. Lovász, “Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions”, *Infinite and Finite Sets*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, **10**, Amsterdam: North Holland, 1973, 609–627.

[3] P. Erdős, A. Rényi, “On random graphs I”, *Publ. Math. Debrecen*, **6** (1959), 290–297.

[4] P. Erdős, A. Rényi, “On the evolution of random graphs”, *Publications of the Mathematical Institute of of the Hungarian Academy of Sciences*, **5**:1–2 (1960), 17–61.

[5] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[6] S. Jansen, T. Łuczak, A. Rucinski, *Random graphs*, Wiley-Interscience, New York, 2000.

[7] A. Frieze, M. Karonski, *Introduction to random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[8] А.М. Райгородский, Д.А. Шабанов, “Задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы”, *Успехи математических наук*, **66**:5 (2011), 109–182.

[9] D. Cherkashin, J. Kozik, “A note on random greedy coloring of uniform hypergraphs”, *Random Structures and Algorithms*, **47**:3 (2015), 407–413.

[10] I.A. Akolzin, D.A. Shabanov, “Colorings of hypergraphs with large number of colors”, *Discrete Mathematics*, **339**:12 (2016), 3020–3031.

[11] A.V. Kostochka, V. Rödl, “Constructions of sparse uniform hypergraphs with high chromatic number”, *Random Structures and Algorithms*, **36**:1 (2010), 46–56.

[12] J. Kozik, D.A. Shabanov, “Improved algorithms for colorings of simple hypergraphs and applications”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **116** (2016), 312–332.

[13] A.V. Kostochka, D. Mubayi, V. Rödl, P. Tetali, “On the chromatic number of set systems”, *Random Structures and Algorithms*, **19**:2 (2001), 87–98.

[14] N. Sauer, “On the existence of regular n-graphs with given girth”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **9** (1970), 144–147.

[15] A.V. Kostochka, M. Kubmhat, “Coloring uniform hypergraphs with few edges”, *Random Structures and Algorithms*, **35**:3 (2009), 348–368.

[16] A.B. Kupavskii, D.A. Shabanov, "Colourings of uniform hypergraphs with large girth and applications", *Combinatorics, Probability and Computing*, **27**:2 (2018), 245–273.

[17] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007.

[18] U. Schauz, "Mr. Paint and Mrs. Correct", *Electronic Journal of Combinatorics*, **16**:1 (2009), Research Paper №R77.

[19] U. Schauz, "A paintability version of the combinatorial nullstellensatz, and list colorings of k-partite k-uniform hypergraphs", *Electronic Journal of Combinatorics*, **17** (2010), Research Paper №R176.

[20] X. Zhu, "On-line list colouring of graphs", *Electronic Journal of Combinatorics*, **16**:1 (2009), Research Paper №R127.

[21] В.Г. Визинг, "Раскраска вершин графа в предписанные цвета", *Методы дискретного анализа в теории кодов и схем: сборник научных трудов*, Изд-во Института математики СО АН СССР, Новосибирск, **29** (1976), 3–10.

[22] P. Erdős, A. L. Rubin and H. Taylor, "Choosability in graphs", *Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, 1979, Congr. Numer. **26** (1980), 125–157.

[23] L. Duraj, G. Gutowski, J. Kozik, "Chip games and paintability", *Electronic Journal of Combinatorics*, **23**:3 (2016), Paper №P3.3.

[24] N. Gazit and M. Krivelevich, "On the asymptotic value of the choice number of complete multi-partite graphs", *Journal of Graph Theory*, **52** (2006), 123–134.

[25] D.A. Shabanov, "On a generalization of Rubin's theorem", *Journal of Graph Theory*, **67**:3 (2011), 226–234.

[26] P. Haxell, J. Verstraëte, "List coloring hypergraphs", *Electronic Journal of Combinatorics*, **17** (2010), Research paper N 129.

[27] D.A. Shabanov, T.M. Shaikheeva, "On the list chromatic number of the complete multi-partite hypergraphs and multiple coverings by independent sets", preprint, https://mipt.ru/education/chairs/dm/laboratoriya-prodvinutoy-kombinatoriki-i-setevykh-prilozheniy/preprinty

[28] A. V. Kostochka, "On a theorem by Erdős, Rubin and Taylor on choosability of complete bipartite graphs", *Electronic Journal of Combinatorics*, **9** (2002).

[29] J. Aslam, A. Dhagat, "On-line algorithms for 2-coloring hypergraphs via chip games", *Theoretical Computer Science*, **112**:2 (1993), 355–369.

[30] P. Erdős, “On a combinatorial problem, II”, *Acta Mathematica of the Academy of Sciences*, Hungary, **15**:3–4 (1964), 445–447.

[31] J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, “Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring”, *Random Structures and Algorithms*, **16**:1 (2000), 4–32.

[32] N. Alon, “Hypergraphs with high chromatic number”, *Graphs and Combinatorics*, **1**:1 (1985), 387–389.

[33] А. П. Розовская, Д. А. Шабанов, “Экстремальные задачи для полноцветных раскрасок равномерных гиперграфов”, *Дискретная математика*, **24**:2 (2012), 104–122.

[34] Д. А. Шабанов, “О существовании полноцветных раскрасок для равномерных гиперграфов”, *Математический сборник*, **201**:4 (2010), 137–160.

[35] D. Cherkashin, “Note on panchromatic colorings”, *Discrete Mathematics*, **341**:13, (2018), 652–657.

[36] G. Grimmett, C. McDiarmid, “On colouring random graphs”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **77**:2 (1975), 313–324.

[37] B. Bollobás, “The chromatic number of random graphs”, *Combinatorica*, **8**:1 (1988), 49–56.

[38] T. Łuczak, “The chromatic number of random graphs”, *Combinatorica*, **11**:1 (1991), 45–54.

[39] T. Łuczak, “A note on the sharp concentration of the chromatic number of random graphs”, *Combinatorica*, **11**:3 (1991), 295–297.

[40] C. McDiarmid, “On the chromatic number of random graphs”, *Random Structures and Algorithms*, **1**:4 (1990), 435–442.

[41] N. Alon, M. Krivelevich, “The concentration of the chromatic number of random graphs”, *Combinatorica*, **17**:3 (1997), 303–313.

[42] K. Panagiotou, A. Steger, “A note on the chromatic number of a dense random graph”, *Discrete Mathematics*, **309**:10 (2009), 3420–3423.

[43] A. Coja–Oghlan, K. Panagiotou, A. Steger, “On the chromatic number of random graphs”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **98** (2008), 980–993.

[44] A. Heckel, “The chromatic number of dense random graphs”, *Random Structures and Algorithms*, **53**:1 (2018), 140–182.

[45] D. Achlioptas, A. Naor, “The two possible values of the chromatic number of a random graph”, *Annals of Mathematics*, **162**:3 (2005), 1335–1351.

[46] D. Achlioptas, E. Friedgut, “A sharp threshold for k-colorability”, *Random Structures and Algorithms*, **14**:1 (1999), 63–70.

[47] A. Coja-Oghlan, "Upper-bounding the k-colorability threshold by counting covers", *Electronic Journal of Combinatorics*, **20**:3 (2013), Research paper №32.

[48] A. Coja-Oghlan, D. Vilenchik, "The Chromatic Number of Random Graphs for Most Average Degrees", *International Mathematics Research Notices*, **2016**:19 (2015), 5801–5859.

[49] J. Schmidt-Pruzan, E. Shamir, E. Upfal, "Random hypergraph coloring algorithms and the weak chromatic number", *Journal of Graph Theory*, **8** (1985), 347–362.

[50] E. Shamir, "Chromatic number of random hypergraphs and associated graphs", *Adv. Comput. Res.*, **5** (1989), 127–142.

[51] M. Krivelevich, B. Sudakov, "The chromatic numbers of random hypergraphs", *Random Structures and Algorithms*, **12**:4 (1998), 381–403.

[52] N. Alon, J. Spencer, "A note on coloring random k-sets", Unpublished manuscript.

[53] D. Achlioptas, J.H. Kim, M. Krivelevich, P. Tetali, "Two-colorings random hypergraphs", *Random Structures and Algorithms*, **20**:2 (2002), 249–259.

[54] D. Achlioptas, C. Moore, "Random k-SAT: two moments suffice to cross a sharp threshold", *SIAM Journal on Computing*, **36**:3 (2005), 740–762.

[55] A. Coja-Oghlan, L. Zdeborová, "The condensation transition in random hypergraph 2-coloring", *Proc. 23rd Annual ACM SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SIAM, 2012, 241–250.

[56] M. Dyer, A. Frieze, C. Greenhill, "On the chromatic number of a random hypergraph", *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **113** (2015), 68–122.

[57] P. Ayre, A. Coja-Oghlan, C. Greenhill, "Hypergraph coloring up to condensation", *Random Structures and Algorithms*, early view, https://doi.org/10.1002/rsa.20824.

[58] Д.А. Шабанов, "О концентрации хроматического числа случайного гиперграфа", *Доклады Академии Наук*, **475**:1 (2017), 24–28.

[59] J. Schmidt, "Probabilitic analysis of strong hypergraph coloring algorithms and the strong chromatic number", *Discrete Mathematics*, **66** (1987), 258–277.

[60] A.E. Balobanov, D.A. Shabanov, "On the strong chromatic number of a random 3-uniform hypergraph", препринт, http://ru.discrete-mathematics.org/preprints/2018/20181117_shabanov.pdf

Список работ автора по теме диссертации

[A1] А. Э. Хузиева, Д. А. Шабанов, “Об однородных гиперграфах с большим обхватом и большим хроматическим числом”, *Дискретная математика*, **27**:2 (2015), 112–133.

[A2] А. Э. Хузиева, Д. А. Шабанов, “Количественные оценки характеристик в гиперграфах с большим обхватом и большим хроматическим числом”, *Математические заметки*, **98**:6 (2015), 948–951.

[A3] Alina Khuzieva, Dmitry Shabanov, Polina Svyatokum, “On-line and list on-line colorings of graphs and hypergraphs”, *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, **7**:4 (2017), 39–57.

[A4] А.Э. Хузиева, “О сильных раскрасках 4-однородных случайных гиперграфов”, *Труды МФТИ*, **11**:2 (2019), 91–107.