УДК 533.6.011

*В. Н. Голубкин*[1,2], *И. С. Мануйлович*[2,3], *В. В. Марков*[2,3,4]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Центральный аэрогидродинамический институт им. профессора Н. Е. Жуковского
[3]Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова
[4]Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

# Пятый инвариант линий тока для осесимметричных закрученных течений газа

Для осесимметричных изоэнергетических течений идеального газа с закруткой в окружном направлении, которые могут быть небаротропными и вихревыми, наряду с известными четырьмя инвариантами линий тока показано существование пятого инварианта. Этот новый инвариант линий тока представляет собой комбинацию давления с компонентами скорости и завихренности. В частном случае нулевой окружной скорости новый инвариант совпадает с известным инвариантом Крокко для незакрученных течений.

**Ключевые слова:** уравнения Эйлера, закрученные осесимметричные течения газа, инвариант линий тока.

*V. N. Golubkin*[1,2], *I. S. Manuylovich*[2,3], *V. V. Markov*[2,3,4]

[1]Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
[2]Zhukovsky Central Aerohydrodynamic Institute
[3]Mechanics Institute of Moscow State University
[4]Steklov Mathematical Institute of RAS

# Fifth streamline invariant to axisymmetric swirling gas flows

In addition to well-known four streamline invariants, it is shown that the fifth invariant to axisymmetric isoenergetic ideal gas flows with circular swirling exists. It may be a nonbarotropic and vortex flow. This new invariant is represented by the combination of pressure with velocity and vorticity components. The new invariant coincides with well known Crocco's invariant to a nonswirling flow when the circular velocity is zero.

**Key words:** Euler equations, axisymmetric swirling gas flows, streamline invariant.

## 1. Введение

На сегодняшний день известны три инварианта линий тока незакрученных осесимметричных течений. Два из них – это общие инварианты течений идеального газа: полная энтальпия и энтропия (в областях без скачков уплотнения). Третий инвариант был получен Л. Крокко [1] для изоэнергетических (но, возможно, небаротропных) течений – это отношение величины завихренности к произведению давления на расстояние до оси.

Для закрученных осесимметричных течений картина иная. Кроме энтропии и полной энтальпии, известны еще два инварианта. Они существенным образом связаны с закруткой. Один из них – произведение окружной скорости на расстояние до оси симметрии [2], пропорциональное окружной циркуляции. Другой – отношение проекций векторов завихренности и скорости на меридиональную плоскость, деленное на плотность [3]. Оба эти инварианта вырождаются при отсутствии закрутки. В данной работе найден новый инвариант закрученных течений, который при отсутствии закрутки не вырождается, а совпадает с инвариантом Крокко [1].

## 2. Основные обозначения и уравнения движения

Рассмотрим осесимметричное стационарное изоэнергетическое течение идеального газа в цилиндрической системе координат $r, \varphi, z$ (ось $z$ совпадает с осью симметрии). Обозначим: $\mathbf{V}$ — вектор скорости, $\rho$ — плотность, $p$ — давление, $\mathbf{\Omega} = \mathbf{rot}\mathbf{V}$ — завихренность. Давление $p$ и плотность $\rho$ связаны соотношением $p = \sigma\rho^k$, где $k$ — показатель адиабаты, $\sigma$ — энтропийная функция, которая постоянна вдоль линий тока и может принимать разные значения на различных линиях тока (адиабатичность, небаротропность) или быть всюду одинаковой (изоэнтропичность, баротропность). Далее предполагается изоэнергетичность течения, означающая, что полная энтальпия (энергия) $\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$ одинакова всюду в потоке. Для дальнейшего анализа течения газа используем известную теорему Крокко:

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = \frac{1}{k-1}\frac{p}{\rho}\nabla \ln \sigma \tag{1}$$

и уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0. \tag{2}$$

Газодинамические функции $\mathbf{V}$, $\rho$ и $p$ координат $r$, $z$ считаем дважды непрерывно дифференцируемыми. Пусть $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ — правая тройка единичных векторов в радиальном, окружном и осевом направлениях соответственно. Вектор скорости закрученного течения имеет компоненты $V_r$, $V_\varphi$, $V_z$ по всем трем пространственным направлениям: $\mathbf{V} = V_r\mathbf{e}_r + V_\varphi\mathbf{e}_\varphi + V_z\mathbf{e}_z = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_\varphi + \mathbf{V}_z$.

В статье [4] было замечено, что в силу осевой симметрии $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} \equiv 0\right)$ меридиональная составляющая завихренности $\mathbf{\Omega}_{rz}$, равная векторной сумме радиальной и осевой составляющих ($\mathbf{\Omega}_{rz} = \mathbf{\Omega}_r + \mathbf{\Omega}_z$), является ротором окружной скорости: $\mathbf{V}_\varphi$: $\mathbf{\Omega}_{rz} = \mathbf{rot}\ \mathbf{V}_\varphi$. Аналогично, окружная составляющая завихренности $\mathbf{\Omega}_\varphi$ является ротором меридиональной составляющей скорости: $\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z$: $\mathbf{\Omega}_\varphi = \mathbf{rot}\,(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)$. Поскольку, очевидно, векторное произведение $\mathbf{\Omega}_\varphi \times \mathbf{V}_\varphi = 0$, то левая часть уравнения (1) распадается на три слагаемых:

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = \mathbf{\Omega}_{rz} \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) + \mathbf{\Omega}_\varphi \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) + \mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{V}_\varphi.$$

Здесь первое слагаемое направлено вдоль $\mathbf{e}_\varphi$, а два других лежат в меридиональной плоскости, проходящей через ось симметрии. Поэтому векторное уравнение (1) равносильно системе двух уравнений:

$$\mathbf{\Omega}_\varphi \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) + \mathbf{\Omega}_{rz} \times \mathbf{V}_\varphi = \frac{1}{k-1}\frac{p}{\rho}\nabla \ln \sigma, \tag{3}$$

$$\mathbf{\Omega}_{rz} \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) = 0. \tag{4}$$

## 3. Пятый инвариант линий тока

Если в какой-либо точке течения меридиональная скорость $\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z = 0$, то проходящая через эту точку линия тока представляет собой окружность с центром на оси симметрии, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси симметрии. На такой линии тока сохраняются все параметры осесимметричного течения. Рассмотрим более общий случай течения в области, где $\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z \neq 0$. В такой области из (4) следует, что

$$\mathbf{\Omega}_{rz} = \beta\,(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)\,, \;\; \beta = ((\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \cdot \mathbf{\Omega}_{rz})\,/(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)^2. \tag{5}$$

Поэтому уравнение (3) можно записать в виде

$$(\mathbf{\Omega}_\varphi - \beta \mathbf{V}_\varphi) \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) = \frac{1}{k-1}\frac{p}{\rho}\nabla \ln \sigma,$$

или

$$(\Omega_\varphi - \beta V_\varphi)\, \mathbf{e}_\varphi \times (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) = \frac{1}{k-1}\frac{p}{\rho}\nabla \ln \sigma, \qquad \Omega_\varphi = (\mathbf{\Omega}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi).$$

Введем обозначение:

$$I_5 = \frac{1}{rp}\left(\Omega_\varphi - \beta V_\varphi\right),$$

и, учитывая, что $\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r$, перепишем последнее уравнение в виде

$$I_5\left(r\rho V_z \mathbf{e}_r - r\rho V_r \mathbf{e}_z\right) = \frac{1}{k-1}\nabla \ln \sigma.$$

Применение операции **rot** дает

$$I_5\, \mathbf{rot}\left(r\rho V_z \mathbf{e}_r - r\rho V_r \mathbf{e}_z\right) - \left(r\rho V_z \mathbf{e}_r - r\rho V_r \mathbf{e}_z\right) \times \nabla I_5 = 0. \tag{6}$$

Первое слагаемое левой части (6) записывается в виде

$$I_5\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(r\rho V_z\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho V_r\right)\right)\mathbf{e}_\varphi,$$

и, в силу уравнения неразрывности (2), записанного в цилиндрических координатах, сумма в круглых скобках обращается в нуль, то есть первое слагаемое в левой части (6) равно нулю. Поэтому второе слагаемое также равно нулю. Поскольку его можно представить в виде $-r\rho\left(V_r\frac{\partial}{\partial r}I_5 + V_z\frac{\partial}{\partial z}I_5\right)\mathbf{e}_\varphi$, имеем $((\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)\cdot\nabla I_5) = 0$. Таким образом, величина $I_5$ сохраняется вдоль векторных линий вектора $(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)$. Для осесимметричных течений это означает сохранение величины $I_5$ вдоль линий тока.

В итоге приходим к следующему основному результату.

*Пусть в некоторой области осесимметричного стационарного изоэнергетического течения идеального газа отсутствуют скачки уплотнения и тангенциальные разрывы, а меридиональная скорость* $\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z$ *не обращается в нуль. Тогда в этой области величина*

$$I_5 = \frac{1}{rp}\left(\Omega_\varphi - V_\varphi\left((\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)\cdot\mathbf{\Omega}_{rz}\right)/(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)^2\right) \tag{7}$$

*сохраняется вдоль линий тока.*

Интересно, что при отсутствии закрутки ($V_\varphi = 0$) новый инвариант $I_5$ совпадает с инвариантом Крокко [1].

## 4. Другие формы записи нового инварианта

Для качественного анализа и для верификации расчетов течений путем проверки сохранения нового инварианта $I_5$ на линиях тока его представление в виде (7) является слишком громоздким. Однако с использованием других известных инвариантов $I_5$ можно представить в более обозримом виде.

Применение оператора дивергенции к уравнению (5) дает $\beta \mathrm{div}\,(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) + (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)\nabla\beta = 0$. С другой стороны, из уравнения неразрывности следует, что $\rho \mathrm{div}\,(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) + (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)\nabla\rho = 0$. Поэтому $(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)\nabla(\beta/\rho) = 0$, и отношение $I_4 = (\beta/\rho)$ сохраняется вдоль линий тока (как указано во введении, этот инвариант впервые получен в [3]). Учитывая формулу (5) для $\beta$, имеем

$$I_5 = \frac{1}{rp}\left(\Omega_\varphi - \rho V_\varphi I_4\right).$$

Наконец, с использованием третьего инварианта $I_3 = rV_\varphi$, получим

$$\Omega_\varphi = r^{-1}\rho I_3 I_4 + rpI_5.$$

Поскольку $\Omega_\varphi$ вычисляется по векторному полю меридиональной скорости $\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z$, новую закономерность можно сформулировать как свойство меридионального движения (без упоминания окружной скорости и связанных с ней компонент завихренности).

*Пусть в некоторой области осесимметричного стационарного изоэнергетического течения идеального газа отсутствуют скачки уплотнения и тангенциальные разрывы, а меридиональная скорость $\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z$ не равна нулю. Тогда в этой области окружная составляющая завихренности представима в виде*

$$|\Omega_\varphi| = |\mathbf{rot}\,(\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)| = r^{-1}\rho C_1 + rpC_2,$$

*где $C_1$ и $C_2$ суть функции линий тока.*

## 5. Пример использования нового инварианта

В качестве примера применения нового инварианта решим одну задачу теории вихревого движения для рассматриваемых течений. После работ [5, 6, 7] вихревые течения, в которых завихренность параллельна скорости ($\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = 0$), называются винтовыми течениями. Рассмотрим трубку тока в стационарном изоэнергетическом течении газа. Пусть в каком-нибудь сечении трубки $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = 0$. Тогда, согласно теореме Крокко, энтропийная функция $\sigma$ будет константой $\sigma_0$ в этом сечении. Далее, поскольку энтропийная функция постоянна вдоль линий тока, заключаем, что $\sigma = \sigma_0$ во всех точках трубки тока. Снова, используя теорему Крокко, приходим к выводу, что $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = 0$ во всей трубке тока. Аналогичное рассуждение неприемлемо в случае, если известно только то, что равенство $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = 0$ выполнено в одной точке, а про значение $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}$ в остальных (соседних) точках ничего не известно. Будет ли линия тока, проходящая через такую точку, винтовой линией (линией, во всех точках которой $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = 0$)? До настоящего времени этот вопрос был открыт для всех типов течений. Новый инвариант $I_5$ позволяет дать положительный ответ для осесимметричных стационарных изоэнергетических течений.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}| = |\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z| \left|\Omega_\varphi - V_\varphi \left((\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{rz}\right) / (\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z)^2\right|.$$

Сравнивая это выражение с (7), получаем

$$|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}| = |\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z|\, rpI_5. \tag{8}$$

Осевая линия тока ($r = 0$) всегда либо безвихревая, либо винтовая. На остальных линиях тока сохранение равенства $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = 0$ вытекает из (8) (для областей, в которых меридиональная скорость $\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z$ не обращается в нуль).

Если $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = 0$ в какой-либо точке, то это равенство будет верным на окружности, проходящей через эту точку, имеющей центр на оси симметрии и лежащей в плоскости, перпендикулярной оси симметрии. То есть винтовыми будут все линии тока, начинающиеся на этой окружности. Таким образом, приходим к следующему выводу.

*Пусть в осесимметричном стационарном изоэнергетическом течении есть точка $P$, лежащая не на оси течения, в которой $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = 0$. И пусть в рассматриваемой области меридиональная скорость $\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_z$ не обращается в нуль. Тогда во всех точках поверхности тока, образованной вращением вокруг оси симметрии течения векторной линии $\mathbf{V_r} + \mathbf{V_z}$, проходящей через точку $P$, выполняется равенство $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = 0$. То есть указанная поверхность является винтовой поверхностью.*

## 6. Заключение

При исследовании уравнений Эйлера для стационарных закрученных осесимметричных изоэнергетических течений найден новый инвариант линий тока (формула (7)). Тем самым обнаружена еще одна закономерность в сложной связи окружного и меридионального движений в закрученных осесимметричных течениях газа. Приведен пример качественного вывода, полученного с использованием нового инварианта.

---

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ (соглашение №14.G39.31.0001 от 13.02.2017).

## Литература

1. *Crocco L.* Eine neue Stromfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1937. V. 17, I. 1. P. 1–7.
2. *Голубкин В.Н., Марков В.В., Сизых Г.Б.* Интегральный инвариант уравнений движения вязкого газа // ПММ. 2015. Т. 79, вып. 6. С. 808–816.
3. *Голубкин В.Н., Сизых Г.Б.* О некоторых свойствах газовых течений с осевой симметрией // ТРУДЫ МФТИ. 2017. Т. 9, № 1. С. 64–70.
4. *Сизых Г.Б.* Эволюция завихренности в закрученных осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости // Ученые записки ЦАГИ. 2015. Т. 46, № 3. С. 14–20.
5. *Громека И.С.* Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости // Ученые записки Казанского университета. 1881.
6. *Громека И.С.* Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. Собрание сочинений. М., 1952. С. 76–148.
7. *Beltrami E.* Considerazioni idrodinamiche // Rend. Inst. Lombardo Acad. Sci. Lett. 1889. V. 22. P. 122–131.

## References

1. *Crocco L.* A new Stream function for Researching the Movement of Gases with Rotation. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1937. V. 17, I. 1. P. 1–7. (in German).
2. *Golubkin V.N., Markov V.V., Sizykh G.B.* Integral invariant of the equations of motion of viscous gas. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2015. V. 79, I. 6. P. 566–571.
3. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* Some Properties of Gas Flows with Axial Symmetry. Proceedings of MIPT. 2017. V. 9, N 1. P. 64–70. (in Russian).
4. *Sizykh G.B.* Evolution of vorticity in swirling axisymmetric flows of a viscous incompressible fluid. TsAGI Science Journal. 2015. V. 46, I. 3. P. 209–217.
5. *Gromeka I.S.* Some Cases of Incompressible Fluid Flow. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. 1881. (in Russian).
6. *Gromeka I.S.* Some Cases of Incompressible Fluid Flow. Collected works. Moscow, 1952. P. 76–148. (in Russian).
7. *Beltrami E.* Hydrodynamic considerations. Rend. Inst. Lombardo Acad. Sci. Lett. 1889. V. 22. P. 122–131. (in Italian).

*Поступила в редакцию 22.05.2018*