

А.В. Фомичев

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ И
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Предлагаемое читателю пособие посвящено элементарному изложению основ теории бифуркаций, некоторых сопутствующих вопросов нелинейной динамики и ориентировано на студентов второго курса МФТИ, изучающих аналитическую механику. В первой части пособия изложены вопросы, входящие в обязательную программу курса аналитической механики. Вторая часть – "Дополнение" – содержит материал, предназначенный для студентов, желающих самостоятельно изучить некоторые методы исследования предельных циклов, ознакомиться с понятиями динамического хаоса, хаотического и странного аттрактора, поведением траекторий колебательной системы на торе и некоторыми другими явлениями, наблюдающимися при размерности фазового вектора системы больше двух. Ключевые понятия, впервые появляющиеся в тексте, выделяются *курсивом*, либо вводятся отдельными определениями.

Понятие о динамической системе. *Динамическая система* – объект или процесс, состояние которого в текущий момент времени определяется некоторым набором величин, а состояние в последующие моменты времени задается законом их изменения, называемом *законом эволюции*. Понятие динамической системы весьма общо и включает в себя разнородные объекты математики, механики, физики, информатики, экономики и других наук. Закон эволюции может задаваться системой дифференциальных уравнений, дискретными отображениями, алгоритмами или иными способами. Далее мы ограничимся рассмотрением систем, описываемых дифференциальными уравнениями.

Понятие о бифуркации. Дифференциальные уравнения динамических систем часто зависят не только от фазовых переменных, но и от некоторых параметров. В этом случае уравнения имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

где \mathbf{x} – фазовый вектор, α – набор параметров. Здесь и далее будем считать, что система автономна, т.е. $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha)$ не зависит явно от времени.

Иногда изменение параметров приводит к качественным перестройкам структуры фазовых траекторий системы – изменениям количества положений равновесия, характера их устойчивости, кардинальным трансформациям траекторий и т.п. В окрестности определенных значений параметров перестройки происходят при сколь угодно малом изменении параметров и называются *бифуркациями*, а соответствующие значения параметров называются *бифуркационными*. Термин "бифуркация" буквально переводится как "раздвоение" или "разветвление".

Фундамент теории бифуркаций был заложен в начале XX века в работах А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова и А.А. Андронова. Сейчас это обшир-

ная область теории динамических систем, связанная со многими разделами фундаментальной и прикладной математики, в первую очередь – с теорией дифференциальных уравнений, математическим анализом и геометрией. Ряд сравнительно современных результатов был получен благодаря постоянно растущим возможностям численных методов анализа динамических систем и вычислительной техники. Теория бифуркаций находит применение в многочисленных естественных и точных науках.

Естественно, что компактное изложение теории бифуркаций, претендующее на полноту и строгость, едва ли возможно и данное пособие – лишь возможный вариант знакомства с основами этой теории. Обретение профессиональных знаний неизбежно потребует изучения соответствующей литературы, например [1]-[6].

Простейшая ситуация: бифуркации положений равновесия в одномерной системе. Наиболее простая и наглядная ситуация реализуется в одномерном случае, когда $x, \alpha, f(x, \alpha)$ – скаляры. Однако и этот простейший случай позволяет получить многие важные результаты. Положения равновесия находятся из уравнения

$$f(x, \alpha) = 0,$$

задающего на плоскости параметров (x, α) кривую в параметрическом виде, называемую *кривой равновесий*. Кривая равновесий может состоять из множества ветвей. Например, для системы $\dot{x} = x^2 - \alpha^2$ она состоит из двух ветвей $x = \pm\alpha$.

Рассмотрим кривую равновесий, изображенную на рис. 1 (сплошные и пунктирные обозначения ее ветвей раскрыты ниже).

Кривая $f(x, \alpha) = 0$ делит плоскость (x, α) на области, в которых функция f сохраняет знак. В простейшей (и наиболее типичной) ситуации в областях, граничащих по кривой равновесий, знаки функции f различны. Знаками "+" и "-" на рисунке 1 отмечены области знакопостоянства f в предположении, что в "нижней" области $f > 0$.

Линеаризация функции f по x в окрестности произвольной точки x^* на кривой равновесий дает следующую систему линейного приближения:

$$\dot{\varepsilon} = f_x \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon = x - x^*, \quad f_x = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*}.$$

Здесь и далее для обозначения частных производных используются компактные обозначения в виде нижних индексов, например:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \Pi_{q_i q_j} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}.$$

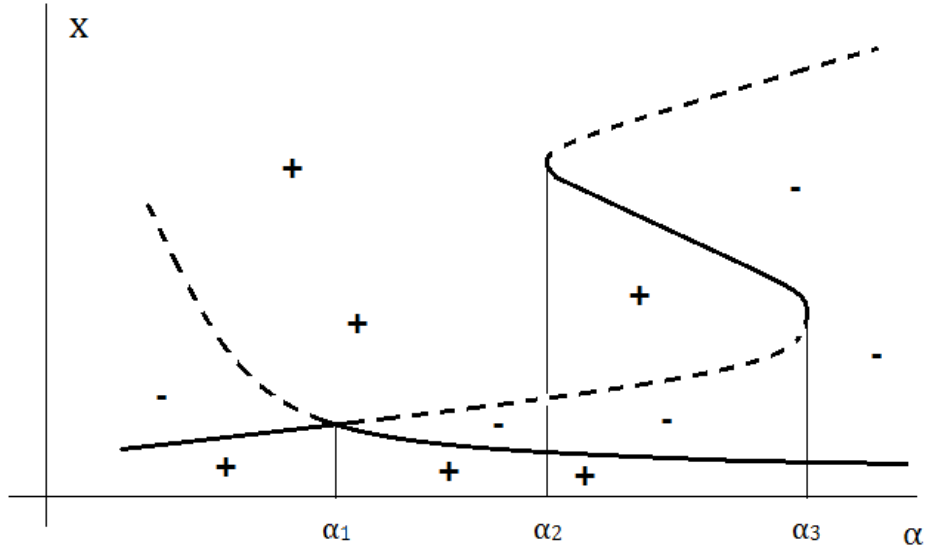


Рис. 1: Кривая равновесий.

Характер устойчивости положения равновесия в соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости по линейному приближению [7],[8] определяется знаком производной f_x , вычисленной для точки x^* , если $f_x \neq 0$.

Пусть при увеличении x точка на плоскости (x, α) переходит через кривую равновесия и знак функции f меняется с "+" на "-". Тогда в типичной ситуации (см. замечание ниже) $f_x < 0$ и положение равновесия x^* асимптотически устойчиво по теореме Ляпунова. Наоборот, при переходе от "-" к "+" производная $f_x > 0$ и положение равновесия x^* неустойчиво по той же теореме.

Таким образом, ветви кривой равновесий состоят из устойчивых или неустойчивых положений равновесия и называются устойчивыми или неустойчивыми ветвями соответственно. Устойчивые ветви на рис. 1 обозначены сплошными линиями, неустойчивые - пунктирными. Естественно, что характер устойчивости ветвей можно отмечать и другими способами. Например, распространено обозначение устойчивых ветвей последовательностью знаков "+" и неустойчивых последовательностью "минусов" - см. рис. 2.

Замечание. Легко привести примеры, когда знаки функции f в соседних областях, разделенных кривой равновесий, совпадают или когда $f_x = 0$ на кривой равновесий. Например, оба условия выполнены для $f = (x - \alpha)^4$. Можно представить и более сложные случаи, когда

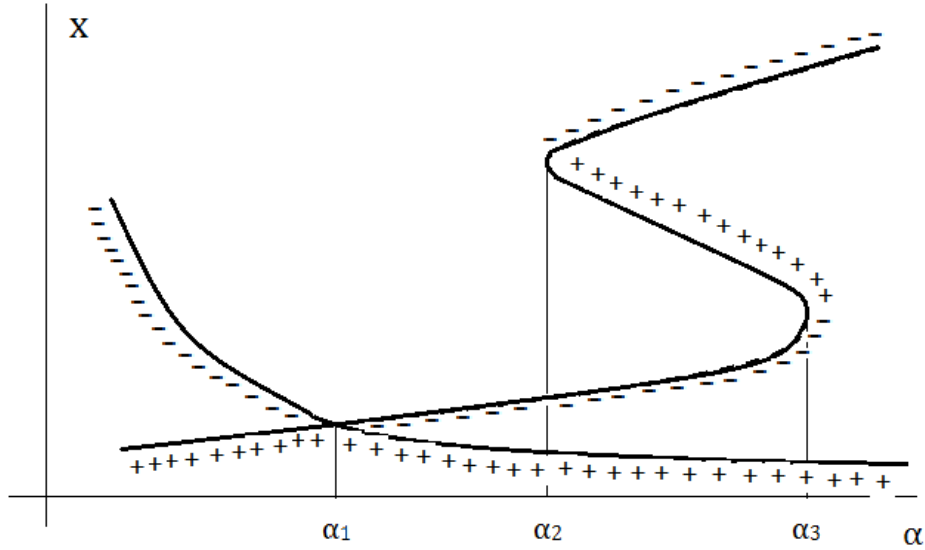


Рис. 2: Вариант обозначений устойчивости ветвей.

$f(x, \alpha)$ определена не на всей плоскости (x, α) или когда $f_x \rightarrow \infty$ вблизи положения равновесия. Анализ устойчивости в этих ситуациях для одномерной системы обычно не сложен, но далее они не рассматриваются по следующей причине.

Кривая равновесий состоит из общих точек поверхности $z = f(x, \alpha)$ и плоскости $z = 0$. Мысленно представляя себе пересечение некоторой произвольной поверхности с плоскостью $z = 0$ несложно представить, что в наиболее типичной ситуации (так называемой ситуации общего положения) эти поверхности пересекаются так, что f меняет знак на линии пересечения и $f_x \neq 0$ на ней. Случай равенства $f_x = 0$ для некоторой ветви кривой равновесий соответствует касанию поверхности $z = f(x, \alpha)$ и плоскости $z = 0$ вдоль ветви. Естественно, что такая картина в ситуации общего положения не реализуется и может классифицироваться как особая.

Точки бифуркаций. В соответствии с теоремой о неявной функции [9] уравнение

$$f(x, \alpha) = 0$$

при $f_x \neq 0$ имеет единственное решение $x(\alpha)$. В точках, где это условие не выполнено, единственность решения нарушается и именно эти точки плоскости (x, α) являются *точками бифуркаций*. Таким образом, урав-

нение, из которого находятся точки бифуркаций, следующее:

$$f_x(x, \alpha) = 0.$$

Для кривой равновесий, изображенной на рис. 1, единственность решения уравнения $f(x, \alpha) = 0$ относительно x нарушается в точке пересечения ветвей кривой равновесий $\alpha = \alpha_1$) и в точках ветвления $\alpha = \alpha_{2,3}$. Соответственно, значения параметра $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ и будут бифуркационными.

Опишем, что происходит с системой в окрестности этих точек. При переходе параметра α через значение $\alpha = \alpha_1$ устойчивая ветвь теряет устойчивость, а неустойчивая – обретает. Эта бифуркация называется *сменой устойчивости*.

При $\alpha = \alpha_{2,3}$ появляется положение равновесия, а изменение параметра вблизи $\alpha = \alpha_{2,3}$ приводит к исчезновению или к разветвлению этого положения равновесия на два новых, одно из которых устойчиво, а второе – неустойчиво. Такая бифуркация называется *складкой*.

В системах в которых в f входят четные функции фазовой переменной x встречается третий тип бифуркаций – *вилка*. В точке бифуркации происходит смена характера устойчивости ветви кривой равновесий и ответвление от нее двух новых ветвей с противоположным характером устойчивости.

Пример. Пусть $f = x(\alpha - x^2)$. Соответствующая кривая равновесий представлена на рис. 3. При переходе через бифуркационное значение параметра $\alpha = 0$ в рассматриваемой системе появляются две устойчивые ветви кривой равновесия $x = \pm\sqrt{\alpha}$, при этом ветвь $x = 0$ остается, но теряет устойчивость.

Определение. Графическое изображение кривой равновесий или фрагмента кривой равновесий с отметкой характера устойчивости ветвей при наличии бифуркаций называют *бифуркационной диаграммой*.

Если функция $f(x, \alpha)$ достаточно проста, то бифуркационная диаграмма обычно легко строится. Однако если функция $f(x, \alpha)$ сложная, то для исследования бифуркаций иногда бывают более удобны косвенные методы анализа по производным $f(x, \alpha)$ в точке бифуркации. Кроме того, доказательства этих методов показывают, что вышперечисленные типы бифуркаций для одномерной системы достаточно универсальны.

Идея этих методов основана на разложениях $f(x, \alpha)$ в ряд Тейлора в окрестности точки бифуркации и выделении главных членов разложения. Далее для удобства записи разложений будем считать, что исследу-

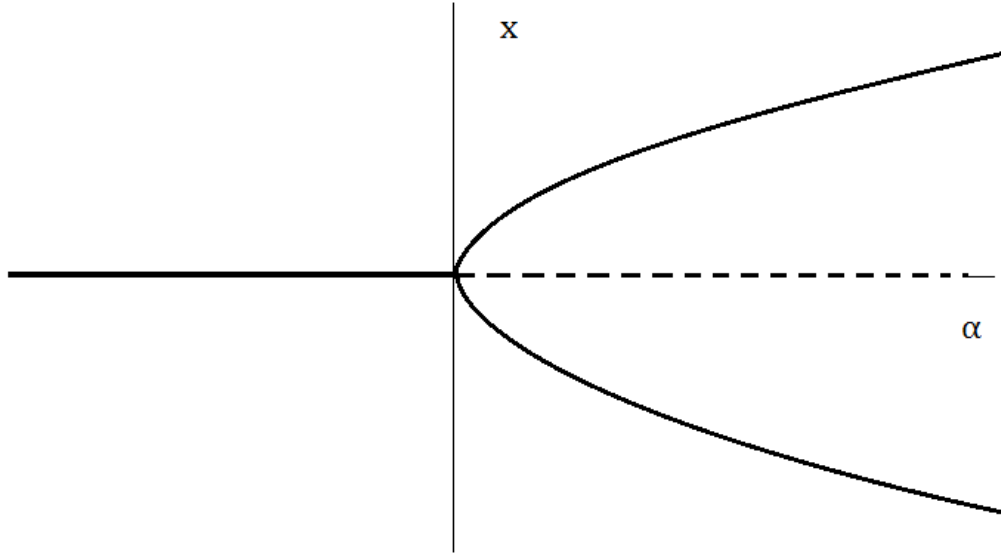


Рис. 3: Бифуркация типа вилка.

мая точка (x^*, α^*) расположена в начале координат, т.е. $(x^*, \alpha^*) = (0, 0)$, чего всегда можно добиться заменой переменных $x' = x - x^*$, $\alpha' = \alpha - \alpha^*$, и что функция $f(x, \alpha)$ гладкая и дифференцируемая необходимое число раз.

Начнем с простейшего случая неособой точки кривой равновесий. Для нее $f_x \neq 0$, $f_\alpha \neq 0$ и справедливо разложение

$$f(x, \alpha) = f_x x + f_\alpha \alpha + o(|x| + |\alpha|).$$

Отсюда следует, что в малой ε - окрестности точки $(x^*, \alpha^*) = (0, 0)$ кривая равновесий $f(x, \alpha) = 0$ в главном приближении (в данном случае – в первом) аппроксимируется прямой

$$f_x x + f_\alpha \alpha = 0. \quad (2)$$

Если точка плоскости (x, α) не лежит на прямой (2), то $f_x x + f_\alpha \alpha = O(\varepsilon)$ и этот член разложения не может быть скомпенсирован высшими членами разложения, имеющими порядок $o(\varepsilon)$. Таким образом, при $f_x \neq 0$, $f_\alpha \neq 0$ в малой ε - окрестности неособой точки кривая равновесий описывается линейным уравнением (2). Далее аналогичные соображения используются для исследования кривой равновесий по членам разложения высшего порядка. Поскольку в точке бифуркации теряется единственность решения $x(\alpha)$ уравнения $f(x, \alpha) = 0$, то вместо зависимости $x(\alpha)$ удобнее рассмотреть зависимость $\alpha(x)$.

В точке бифуркации $f_x = 0$ и для построения кривой равновесий в окрестности этой точки требуются нелинейные члены разложения $f(x, \alpha)$. Допустим, что в точке бифуркации $f_\alpha \neq 0$, $f_{xx} \neq 0 \Leftrightarrow f_\alpha \cdot f_{xx} \neq 0$ и рассмотрим следующее разложение кривой равновесия:

$$f_\alpha \alpha + \frac{1}{2}(f_{xx}x^2 + 2f_{x\alpha}x\alpha + f_{\alpha\alpha}\alpha^2) + O((|x| + |\alpha|)^3) = 0. \quad (3)$$

Линейные функции типа $\alpha = \lambda x$ уравнению (3) не удовлетворяют. Будем искать решение уравнения (3) в ε -окрестности точки $(0, 0)$ в виде $\alpha = \lambda x^2$. Подстановка $\alpha = \lambda x^2$ в (3) показывает, что при

$$\lambda = -\frac{f_{xx}}{2f_\alpha}.$$

первые два члена (3) сокращаются, а оставшиеся члены будут иметь порядок $O(\varepsilon^3)$ и выше. Таким образом, при $f_x = 0$, $f_\alpha \cdot f_{xx} \neq 0$ кривая равновесий аппроксимируется параболой и реализуется бифуркация типа складки.

Замечание. Задача поиска приближенного решения $\alpha(x)$ уравнения $f(x, \alpha) = 0$ в виде ряда по рациональным степеням x рассматривалась Ньютоном. Им был разработан метод решения задачи, получивший название метода диаграммы Ньютона. Читатель может ознакомиться с ним по книге [10].

Теперь рассмотрим бифуркацию, для которой разложение начинается с квадратичных членов, т.е. когда $f_x = f_\alpha = 0$, $f_{xx} \cdot f_{x\alpha} \cdot f_{\alpha\alpha} \neq 0$. Разложение уравнения кривой равновесий имеет вид

$$f_{xx}x^2 + 2f_{x\alpha}x\alpha + f_{\alpha\alpha}\alpha^2 + o((|x| + |\alpha|)^3) = 0.$$

Приравнивая нулю квадратичную часть, получим решение

$$\alpha_{1,2} = -\frac{f_{\alpha x} \pm \sqrt{f_{\alpha x}^2 - f_{\alpha\alpha}f_{xx}}}{f_{\alpha\alpha}}x,$$

из которого следует, что поведение кривой равновесий определяется знаком величины $D = f_{\alpha x}^2 - f_{\alpha\alpha}f_{xx}$.

При $D > 0$ имеется два решения, в главном приближении – две пересекающиеся прямые. В этом случае реализуется бифуркация типа смены устойчивости. Если $f_{\alpha\alpha} = 0$, то также имеются две ветви $x = 0$ и $\alpha = -x f_{xx} / (2f_{\alpha x})$ и тоже реализуется смена устойчивости. Если $f_{xx} = 0$, то одним из решений в квадратичном приближении будет $\alpha = 0$, однако далее показано, что в этом случае необходим более точный анализ.

При $D = 0$ решение – прямая $\alpha = -xf_{\alpha x}/f_{\alpha\alpha}$ – в рассматриваемом приближении единственно (в [11] показано, что в этом случае через точку бифуркации проходят две кривые, имеющие общую касательную в точке бифуркации).

При $D < 0$ в точке $(x, \alpha) = (0, 0)$ находится изолированное положение равновесия.

Исследуем подробнее случай $f_x = f_\alpha = f_{xx} = 0$ с помощью разложения кривой равновесия до членов третьего порядка:

$$f(x, \alpha) = f_{\alpha x}x\alpha + \frac{1}{2}f_{\alpha\alpha}\alpha^2 + \frac{1}{6}(f_{xxx}x^3 + 3f_{xx\alpha}x^2\alpha + 3f_{x\alpha\alpha}x\alpha^2 + f_{\alpha\alpha\alpha}\alpha^3) + o((|x| + |\alpha|)^3) = 0. \quad (4)$$

Из квадратичной части разложения (4) следуют решения $\alpha = -2xf_{\alpha x}/f_{\alpha\alpha}$ (или $x = 0$ при $f_{\alpha\alpha} = 0$) и $\alpha = 0$. Уточним вид последнего решения с привлечением членов высшего порядка разложения: выясним какими должны быть производные в точке бифуркации чтобы было справедливо приближение следующего порядка $\alpha = \lambda x^2$. Подставляя его в (4), можно получить:

$$(\lambda f_{x\alpha} + \frac{1}{6}f_{xxx})x^3 + o((|x| + |\alpha|)^3) = 0.$$

Таким образом, для существования решения вида $\alpha = \lambda x^2$ необходимо потребовать чтобы $f_{xxx} \cdot f_{x\alpha} \neq 0$ и тогда $\lambda = -f_{xxx}/6f_{x\alpha}$. В этом случае через точку бифуркации проходит ветвь, в первом приближении аппроксимируемая прямой, и вместе с этим происходит бифуркация типа складки, что в совокупности образует бифуркацию типа вилки.

Для удобства восприятия полученных результатов приведем их в виде отдельных утверждений.

Утверждение 1. Если в некоторой точке кривой равновесий выполнены условия $f_x = 0$, $f_\alpha \cdot f_{xx} \neq 0$, то в этой точке реализуется бифуркация типа складки.

Утверждение 2. Если в некоторой точке кривой равновесий выполнены условия $f_x = 0$, $f_\alpha = 0$, $f_{xx} \neq 0$, $f_{x\alpha}^2 - f_{\alpha\alpha}f_{xx} > 0$, то в этой точке реализуется бифуркация типа смены устойчивости.

Утверждение 3. Если в некоторой точке кривой равновесий выполнены условия $f_x = 0$, $f_\alpha = 0$, $f_{xx} = 0$, $f_{x\alpha} \cdot f_{xxx} \neq 0$, то в этой точке реализуется бифуркация типа вилка.

Явление гистерезиса. Рассматриваемая простейшая одномерная система при наличии нескольких бифуркаций типа складка может об-

ладать *гистерезисом* – явлением, при котором состояние системы при изменении параметров зависит не только от мгновенных значений параметров, но и от "предыстории" их изменения.

Пусть кривая равновесий имеет вид, представленный на рисунке 4. Асимптотически устойчивые ветви отмечены сплошными линиями,

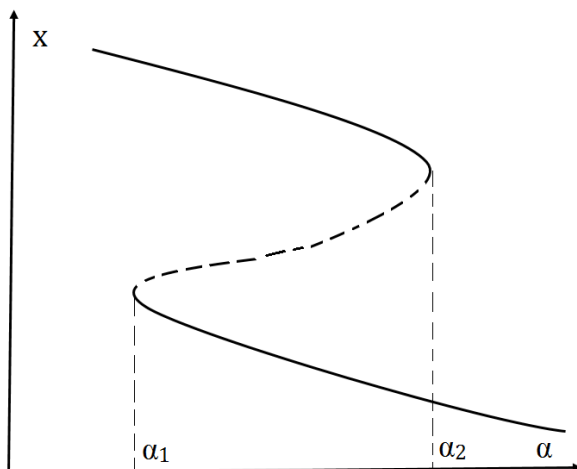


Рис. 4: Кривая равновесий.

неустойчивые - пунктиром. Для любых начальных условий, не принадлежащих кривой равновесий, решение дифференциального уравнения системы стремится к асимптотически устойчивому положению равновесия на одной из ветвей кривой равновесий. Поэтому можно считать, что предельное состояние системы (т.е. при фиксированном α и при $t \rightarrow \infty$) практически всегда (т.е. за исключением положений равновесий, находящихся в точности на неустойчивых ветвях кривой равновесий) будет находиться на асимптотически устойчивых ветвях кривой равновесий.

Допустим, что система достигла предельного состояния и находится на верхней ветви кривой равновесий. Если параметр α бесконечно медленно изменять в сторону увеличения, то положение равновесия на верхней ветви кривой равновесий будет смещаться вправо и при переходе параметром бифуркационного значения α_2 исчезнет. После этого система в пределе перейдет на нижнюю асимптотически устойчивую ветвь и будет оставаться на ней при дальнейшем увеличении параметра. Если после этого изменять α в обратном направлении, то при переходе значения α_1 система покинет положение равновесия на нижней ветви кривой равновесий и займет положение равновесия на верхней ветви. Объединяя на одном рисунке "прямой" и "обратный" пути изменения параметра, получаем характерную петлю гистерезиса, представленную на рисунке 5.

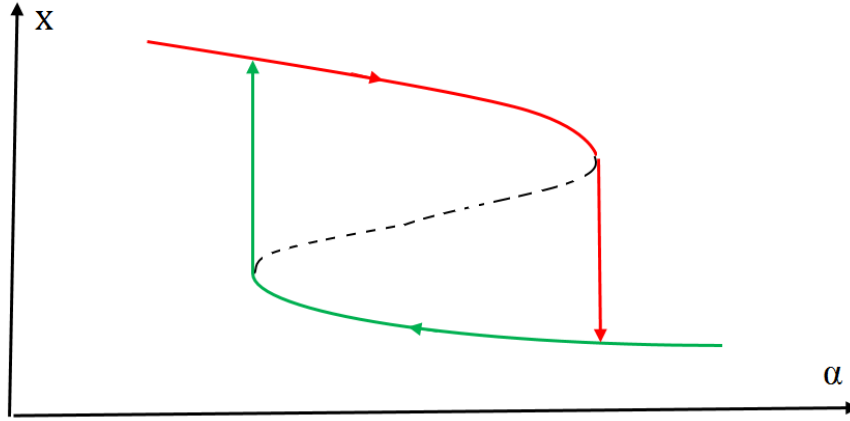


Рис. 5: Петля гистерезиса.

Бифуркации в механических системах с одной степенью свободы. Кривые равновесия и бифуркационные диаграммы могут быть построены и для механических систем с одной степенью свободы, описываемых дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, \alpha), \quad (5)$$

где q – обобщенная координата, α – некоторый параметр задачи, который будет считаться скаляром.

Заметим, что для механических систем, описываемых уравнениями Лагранжа, уравнения движения всегда приводятся к виду (5) по теореме о разрешимости уравнений Лагранжа относительно старших производных [7],[8].

Между положениями равновесия и точками вида $(q, \dot{q}) = (q^*, 0)$ в фазовом пространстве имеется взаимно-однозначное соответствие и поэтому для нахождения положений равновесия получаем уравнение $f(q, 0, \alpha) = 0$, которое также задает кривую равновесий на плоскости параметров (q, α) . Эта кривая равновесий может разветвляться, что соответствует различным типам бифуркаций, в том числе – всем рассмотренным выше типам. Однако в отличие от уравнения первого порядка устойчивость ветвей может не быть асимптотической (например, для консервативной системы). Как и в случае уравнения первого порядка при определенной структуре кривой равновесий механической системы в ней может наблюдаться явление гистерезиса.

При исследовании устойчивости ветвей кривой равновесий системы (5) нужно учитывать, что система описывается дифференциальным

уравнением второго порядка и использовать адекватные методы анализа устойчивости положений равновесий таких систем (например, теоремы об устойчивости консервативных систем, если изучаемая система консервативна и т.п.) – см. [7], [8]. Характерный пример исследования одномерной механической системы и подходы к анализу устойчивости одномерных систем общего вида описаны далее.

Пример. Гладкая окружность радиуса r вращается относительно вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью ω . По окружности может двигаться колечко массы m . Найти положения относительного равновесия колечка, пренебрегая его размерами, исследовать их на устойчивость и построить бифуркационную диаграмму, соответствующую изменению параметра ω .

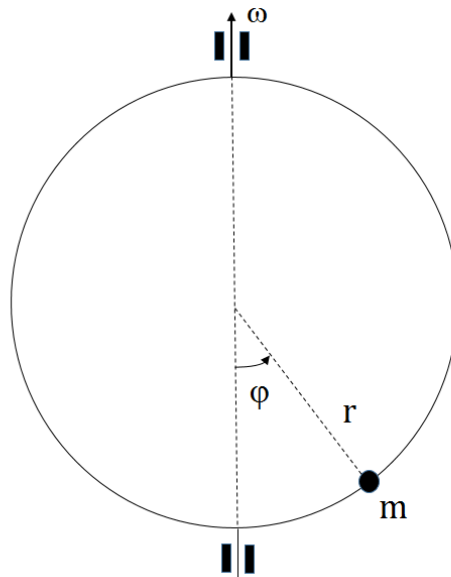


Рис. 6: Механическая система.

В системе отсчета, связанной с окружностью, кинетическая и потенциальная энергии системы равны

$$T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2, \quad \Pi = mgr(1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2}m\omega^2r^2 \sin^2 \varphi$$

и уравнения движения приводятся к виду (5). Для нахождения положений равновесия и исследования их устойчивости воспользуемся известными теоремами о равновесии, устойчивости и неустойчивости консервативных систем [7],[8]. При этом положительный постоянный множитель mr в выражении потенциальной энергии можно опустить, заменив $\Pi \rightarrow \Pi = g(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2}\omega^2r \sin^2 \varphi$. Положения равновесия находятся из

уравнения

$$\Pi_\varphi = 0,$$

имеющего решения $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_{3,4} = \pm \arccos(g/\omega^2 r)$, причем решения $\varphi_{3,4}$ существуют, если $\omega \geq \sqrt{g/r}$ и $\varphi_{3,4} \rightarrow \varphi_1 = 0$ при $\omega \rightarrow \sqrt{g/r}$, откуда следует, что в рассматриваемой динамической системе имеется бифуркация типа вилка.

Вторая производная потенциальной энергии по φ равна

$$\Pi_{\varphi\varphi} = g \cos \varphi - \omega^2 r \cos 2\varphi$$

Подставляя значения $\varphi_{1,2}$ или $\cos \varphi_{3,4}$ в последнее выражение, получим:

$$\Pi_{\varphi\varphi}(0) = g - \omega^2 r, \quad \Pi_{\varphi\varphi}(\pi) = -g - \omega^2 r, \quad \Pi_{\varphi\varphi}(\varphi_{3,4}) = \omega^2 r \left(1 - \frac{g^2}{\omega^4 r^2}\right).$$

Следовательно:

$\Pi_{\varphi\varphi}(0) > 0$ при $\omega < \sqrt{g/r}$ и положение равновесия $\varphi_1 = 0$ устойчиво по теореме Лагранжа-Дирихле;

$\Pi_{\varphi\varphi}(0) < 0$ при $\omega > \sqrt{g/r}$ и положение равновесия $\varphi_1 = 0$ неустойчиво по первой теореме Ляпунова;

$\Pi_{\varphi\varphi}(\pi) < 0$ при $\forall \omega$ и положение равновесия $\varphi_2 = \pi$ всегда неустойчиво по первой теореме Ляпунова;

$\Pi_{\varphi\varphi}(\varphi_{3,4}) > 0$ при $\omega > \sqrt{g/r}$ и положения равновесия $\varphi_{3,4} = 0$ устойчивы по теореме Лагранжа-Дирихле, поскольку они существуют лишь при $\omega > \sqrt{g/r}$.

При $\omega = \sqrt{g/r}$ положения равновесия $\varphi_{3,4}$ сливаются с положением равновесия $\varphi_1 = 0$ и при этом $\Pi_{\varphi\varphi}(0) = 0$. Исследование устойчивости при вырождении квадратичной части разложения потенциальной энергии требует разложения до членов более высокого порядка. Нетрудно убедиться, что при $\omega = \sqrt{g/r}$ первым существенным членом разложения окажется

$$\Pi(\varphi) \approx \frac{1}{8} g \varphi^4,$$

откуда следует, что потенциальная энергия имеет минимум в точке $\varphi_1 = 0$ и это положение равновесия устойчиво по теореме Лагранжа-Дирихле.

Проведенное исследование приводит к бифуркационной диаграмме, представленной на рисунке 7. Очевидно, что положение равновесия $\varphi_2 = \pi$ совпадает с положением равновесия $-\varphi_2 = -\pi$, однако для симметрии бифуркационной диаграммы целесообразно формально изобразить две ветви кривой $\varphi_2 = \pi$ и $-\varphi_2 = -\pi$.

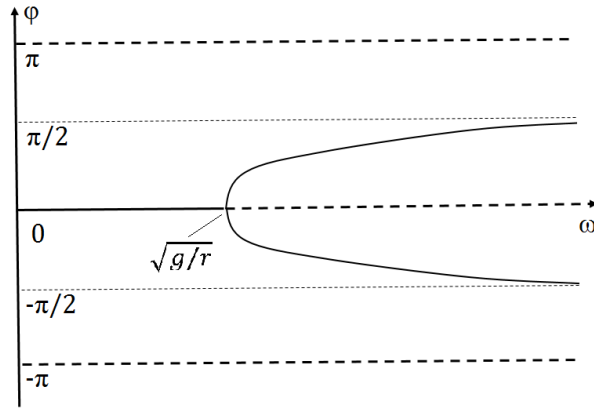


Рис. 7: Бифуркационная диаграмма.

Замечание. По описанному алгоритму исследуется класс уравнений

$$\ddot{q} = f(q, \alpha),$$

поскольку любое такое уравнение можно трактовать как уравнение движения материальной точки единичной массы в потенциале $\Pi(q, \alpha) = -\int f(q, \alpha) dq$. По теоремам Лагранжа-Дирихле и Ляпунова устойчивость точки q^* на кривой равновесий определяется из условий $\Pi_{qq} = -f_q > 0$ (устойчивость) $\Pi_{qq} = -f_q < 0$ (неустойчивость), а при $\Pi_{qq} = -f_q = 0$ устойчивость исследуется по младшим членам разложения потенциальной энергии порядка выше второго (соответственно, разложения f порядка выше первого). Все указанные здесь производные вычисляются в точке q^* .

Положения равновесия автономной системы общего вида

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, \alpha)$$

могут исследоваться на устойчивость следующим образом.

а) При помощи теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. Замена переменной $\dot{q} = u$ сводит уравнение движения второго порядка к системе уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u \\ \dot{u} &= f(q, u, \alpha). \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть $(q, u)^T = (q^*, 0)^T$ – некоторое положение равновесия. Линеаризация (6) в окрестности положения равновесия приводит к системе

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{q} \\ \delta \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f_q & f_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta u \end{pmatrix} \tag{7}$$

в которой $\delta q, \delta u$ – отклонения от положения равновесия, а производные f_q, f_u вычисляются в точке $(q^*, 0)^T$. Характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет вид

$$\lambda^2 - f_u \lambda - f_q = 0.$$

Обозначим его корни через $\lambda_{1,2}$.

Из вида характеристического уравнения следует, что:

Для асимптотической устойчивости линеаризованной системы необходимо и достаточно чтобы выполнялись неравенства $f_q < 0, f_u < 0$ (их легко получить из критерия Рауса-Гурвица [7],[8]). В этом случае $\text{Re} \lambda_{1,2} < 0$ и положение равновесия асимптотически устойчиво как в линеаризованной, так и в исходной нелинейной системе в соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.

Если f_q, f_u имеют любые другие знаки (но не равны нулю!), то положение равновесия неустойчиво как в линеаризованной, так и в исходной системе по той же теореме Ляпунова. Это видно из явных выражений для корней характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(f_u \pm \sqrt{f_u^2 + 4f_q})$$

из которого следует, что $\exists i : \text{Re} \lambda_i > 0$. Критический случай чисто мнимых или нулевых корней реализуется при $f_u = 0, f_q \leq 0$ (при $f_u = 0, f_q > 0$ положение равновесия неустойчиво, т.к. $\text{Re} \lambda_1 > 0$) и об устойчивости по линейному приближению судить уже нельзя, что приводит к необходимости использовать другие подходы.

б) Если правая часть допускает представление $f(q, \dot{q}, \alpha) = g(q, \alpha) + Q(q, \dot{q}, \alpha)$, то для части $g(q, \alpha)$ можно ввести потенциал $\Pi(q, \alpha) = - \int g(q, \alpha) dq$ и если положение равновесия $q = q^*$ в системе

$$\ddot{q} = g(q, \alpha)$$

оказывается устойчивым по теореме Лагранжа-Дирихле, совпадает с положением равновесия исходной системы, а функция $N = Q(q, \dot{q}, \alpha)\dot{q}$ – положительно определена, то выражение $Q(q, \dot{q}, \alpha)$ допускает трактовку диссипативной силы с полной диссипацией и по обобщению теоремы Лагранжа-Дирихле [7],[8] положение равновесия $q = q^*$ будет асимптотически устойчивым.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{q} + \lambda q^2 \dot{q} + \mu \dot{q}^3 + \nu q^3 = 0$$

в котором параметры λ, μ, ν положительны. Уравнение имеет положение равновесия $q^* = 0$ и очевидным образом разбивается на консервативную систему

$$\ddot{q} + \nu q^3 = 0,$$

обладающую тем же устойчивым положением равновесия $q^* = 0$, что и исходная система, и диссипативную силу

$$Q = -(\lambda q^2 + \mu \dot{q}^2)\dot{q}$$

с полной диссипацией.

в) В менее очевидных ситуациях для исследования устойчивости можно применять теоремы второго метода Ляпунова.

Понятие о предельном цикле и аттракторе. В динамических системах (1) при $\dim \mathbf{x} \geq 2$ появляется тип траекторий, называемых *предельными циклами*.

Определение. Предельным циклом называется замкнутая периодическая траектория системы дифференциальных уравнений, в окрестности которой нет других периодических траекторий.

Соответственно, все траектории в окрестности предельного цикла либо стремятся к циклу, либо покидают его окрестность. Если все траектории из некоторой окрестности цикла стремятся к циклу, то он называется асимптотически устойчивым. Асимптотически устойчивый цикл на плоскости представлен на рисунке 8.

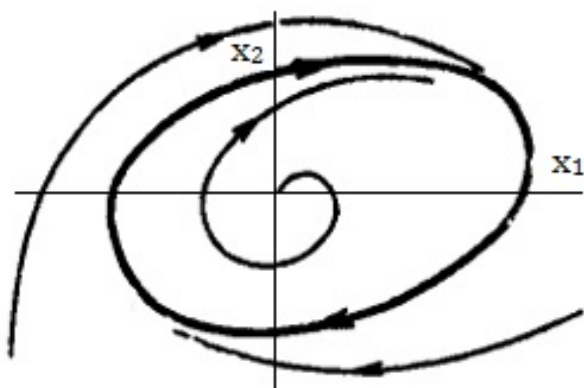


Рис. 8: Асимптотически устойчивый предельный цикл.

Замечание 1. Предельные циклы встречаются на фазовых портретах исключительно нелинейных систем. Замкнутые траектории в окрестности положения равновесия типа "центр", встречающиеся и в линейных системах, нельзя считать предельными циклами, поскольку они не изо-

лированы (в сколь угодно малой окрестности любой замкнутой траектории будут другие замкнутые траектории).

Замечание 2. Уравнения движения одномерной механической системы – частный случай динамической системы второго порядка, описываемых уравнениями (1) с двумерным фазовым вектором:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

и при определенных типах нелинейностей в одномерных механических системах на фазовой плоскости (q, \dot{q}) могут существовать предельные циклы.

Определение. Компактные подмножества в фазовом пространстве, к которым стремятся все траектории динамической системы, начинающиеся в некоторой области (или в объединении областей) фазового пространства называются *аттракторами*. Сама область (или объединение областей) называется *бассейном аттрактора*.

Аттракторами одномерной системы являются асимптотически устойчивые положения равновесия. Аттракторы на фазовой плоскости – положения равновесия, либо предельные циклы. Аттракторами при $\dim \mathbf{x} \geq 3$ также могут быть положения равновесия, предельные циклы, поверхности либо сложно устроенные множества, которые нельзя отнести к кривым либо поверхностям (см. раздел "Дополнение").

В силу теоремы Коши о существовании и единственности решений задачи Коши [12] фазовые кривые не могут пересекаться. В двумерном случае ($\dim \mathbf{x} = 2$) это существенно упрощает топологию фазовой плоскости и любые фазовые кривые на плоскости либо стремятся к положениям равновесия, либо к предельным циклам, либо замкнуты (например, для консервативных механических систем), либо уходят на бесконечность.

Определение. Топологическими называются свойства геометрических объектов, сохраняющиеся при непрерывных преобразованиях (т.е. преобразованиях без разрывов и склеек).

Благодаря такой структуре фазовой плоскости определение положений равновесия, предельных циклов или других периодических решений практически полностью определяет фазовый портрет двумерной системы, а изменение "расстановки" этих объектов на фазовой плоскости при бифуркации приводит к качественной перестройке всего фазового портрета.

При размерности фазового вектора $\dim \mathbf{x} \geq 3$ свойства динамических систем могут сильно усложняться, т.к. теорема Коши при увели-

чении размерности фазового пространства накладывает меньше ограничений на траектории системы, чем в одномерном и плоском случаях. Начальные представления о некоторых особенностях многомерных динамических систем приведены в заключительной части пособия, однако эти представления далеко не полны и для формирования целостной картины, безусловно, требуется дополнительная литература, например, [1],[2] и другие книги по нелинейной динамике.

Бифуркация рождения предельного цикла. В динамических системах с размерностью фазового вектора больше единицы встречается новый тип бифуркации, называемой *рождением предельного цикла*. Для иллюстрации рассмотрим двумерную систему ($\dim \mathbf{x} = 2$) со скалярным параметром α . Изменение параметра α в окрестности бифуркационного значения приводит к тому, что асимптотически устойчивое положение равновесия становится неустойчивым, в его окрестности рождается предельный цикл, а характерный размер цикла увеличивается при дальнейшем изменении параметра α . Соответствующая бифуркационная картина представлена на рисунке 9.

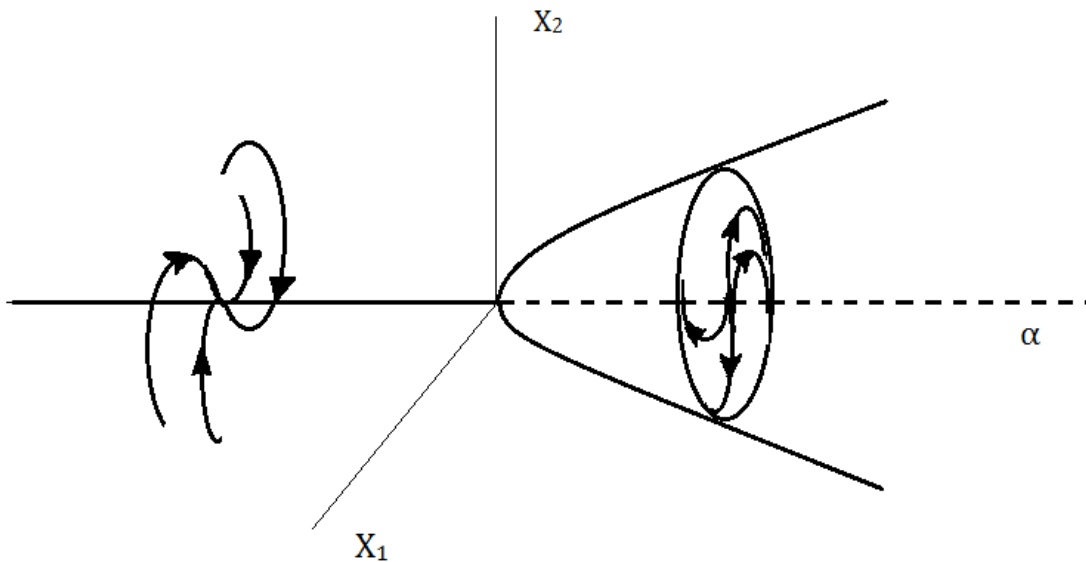


Рис. 9: Бифуркация рождение цикла.

Одной из простейших систем, имеющих бифуркацию типа рождение предельного цикла, и легко исследуемой аналитически, является

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned} \quad (8)$$

При любом значении α в ней имеется положение равновесия $x = 0$. Исследуем его устойчивость по линейному приближению. Матрица линеаризованной системы A и корни характеристического уравнения $\det(\lambda E - A) = 0$ следующие:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i.$$

Таким образом, по теореме Ляпунова об устойчивости по линейному приближению получаем, что при $\alpha < 0$ положение равновесия асимптотически устойчиво, а при $\alpha > 0$ – неустойчиво. Для исследования системы при потере устойчивости перейдем к полярным координатам

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \phi \\ x_2 &= r \sin \phi. \end{aligned}$$

Делая формальную замену переменных (или умножая первое уравнение (8) на x_1 , второе – на x_2 и складывая для получения уравнения для переменной r), нетрудно получить систему для r, ϕ :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\alpha - r^2) \\ \dot{\phi} &= 1. \end{aligned}$$

Уравнение для r отделяется и при $\alpha > 0$ имеет два положения равновесия – $\{r = 0, r = \sqrt{\alpha}\}$. Нулевое положение равновесия неустойчиво по линейному приближению. Напротив, второе положение равновесия оказывается асимптотически устойчивым, поскольку линеаризация в его окрестности дает отрицательный коэффициент при линейном члене разложения правой части: $\frac{d}{dr}r(\alpha - r^2)|_{r=\sqrt{\alpha}} = -2\alpha < 0$. Это означает, что в окрестности положения равновесия появляется асимптотически устойчивый цикл в форме окружности радиуса $r = \sqrt{\alpha}$, к которому притягиваются все фазовые кривые.

Исследования динамических систем, относящиеся к началу XX в., показали, что рождение цикла с характерным размером, пропорциональным $\sqrt{|\alpha|}$, где α – отклонение параметра от бифуркационного значения, представляет собой явление достаточно общего характера, происходящее при переходе пары комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения линеаризованной системы из левой полуплоскости в правую (как это и было в рассмотренном примере).

Для формулировки приводимой далее теоремы запишем уравнения динамической системы в окрестности положения равновесия в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha) = A(\alpha)\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha), \quad A(\alpha) = \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_{x=0}.$$

Здесь $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и без ограничения общности считается, что положение равновесия находится в точке $\mathbf{x} = 0$.

Теорема Пуанкаре-Андронов-Хопфа. Пусть матрица $A(\alpha)$ имеет пару простых комплексных собственных значений $\lambda_{1,2} : \bar{\lambda}_1 = \lambda_2$, при $\alpha < 0$ $\text{Re}\lambda_{1,2}(\alpha) < 0$, при $\alpha = 0$ $\lambda_{1,2}(0) = \pm i\omega, \omega > 0$ и при $\alpha > 0$ $\text{Re}\lambda_{1,2}(\alpha) > 0$.

Тогда если выполнено неравенство

$$\frac{d\text{Re}\lambda_{1,2}(\alpha)}{d\alpha} > 0$$

то положение равновесия при $\alpha > 0$ становится неустойчивым. Одновременно возникает устойчивое (рождение цикла) или исчезает неустойчивое (жесткая потеря устойчивости – см. далее) периодическое решение амплитуды порядка $\sqrt{|\alpha|}$. Асимптотически устойчивый цикл рождается, если $\mathbf{x} = 0$ – асимптотически устойчивое положение равновесия.

Доказательство теоремы приводится, например, в [13].

Бифуркацию рождения цикла также называют *бифуркацией Пуанкаре - Андронова - Хопфа*.

Замечание. Для большинства нелинейных систем циклы имеют более сложную форму, чем окружность, что значительно усложняет возможности аналитического исследования. Покажем это на примере уравнения Ван дер Поля – одной из классических динамических систем, имеющих предельный цикл на фазовой плоскости.

$$\ddot{x} - \alpha(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Численное интегрирование уравнения позволяет построить фазовые портреты, изображенные на рисунке 10, демонстрирующие наличие цикла достаточно сложной формы. Уравнение Ван дер Поля подробно исследуется в большинстве книг по теории колебаний и приближенно описывает автоколебания в ламповом генераторе на триоде.

Определение. Автоколебаниями называются периодические решения в диссипативных системах с непериодическим источником энергии.

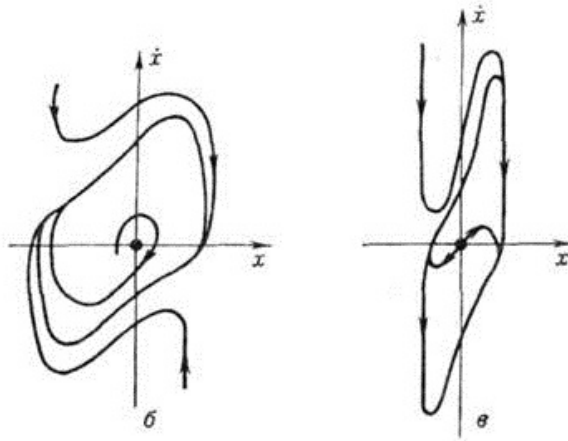


Рис. 10: Предельные циклы в уравнении Ван дер Поля при $\alpha = 1$ и $\alpha \gg 1$.

В качестве механических примеров автоколебательных систем можно привести стенные маятниковые часы, в которых автоколебания поддерживаются постоянной силой тяжести гири, либо систему, изображенную на рисунке 11, в которой автоколебательный режим поддерживается за счет кулоновской силы сухого трения и движением ленты транспортера с постоянной скоростью. Механизм, аналогичный колебаниям груза на транспортере, имеют колебания куска мела при письме, сопровождаемые характерным неприятным скрипом.

Автоколебательный режим груза на транспортере, исследован, например, в [14], а уравнение Ван дер Поля подробно изучается в [1].

Замечание. Путем замены масштаба фазовой переменной $x = y/\sqrt{\alpha}$ можно устранить параметр перед нелинейностью, привести уравнение Ван дер Поля к виду

$$\ddot{y} - (\alpha - y^2)\dot{y} + y = 0,$$

и показать, что в этих переменных при малых значениях параметра уравнение имеет цикл характерного размера $\sqrt{\alpha}$, близкий к окружности. Это доказательство будет полезным упражнением для читателя.

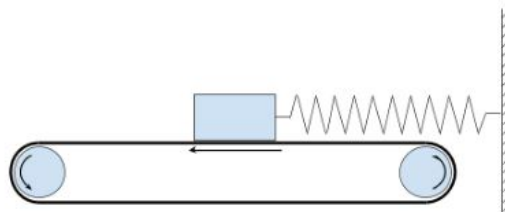


Рис. 11: Груз на пружине и транспортере с сухим трением.

Определение. Потеря устойчивости, происходящая при рождении цикла, называется *мягкой*.

Однако из-за увеличения характерного размера цикла при отклонении параметра от бифуркационного значения (в соответствии с теоремой Пуанкаре-Андронов-Хопфа) мягкая потеря устойчивости на практике (в технических устройствах или строениях) может приводить к катастрофическим последствиям.

Классическим примером может служить явление *флаттера* [5] – возбуждения колебаний крыльев или хвостового оперения летательного аппарата, когда скорость набегающего потока превышает некоторое критическое (бифуркационное) значение. Дальнейшее увеличение скорости приводит к росту амплитуды колебаний и может разрушить конструкцию. Анализ соответствующих уравнений показывает, что флаттер обусловлен рождением предельного цикла.

Проблема флаттера наиболее остро проявилась в 30-е годы XX, когда появились достаточно мощные авиадвигатели и были достигнуты критические скорости. В те годы флаттер становится причиной многих авиакатастроф и одной из ключевых проблем на пути совершенствования скоростных характеристик самолетов. Основополагающий вклад в объяснение и успешное решение проблемы флаттера был внесен М.В. Келдышем и М.А. Лавреньевым.

Определение. *Жесткой потерей устойчивости*, называемой в практических задачах *дивергенцией*, соответствует исчезновение положения равновесия при бифуркации типа складки.

Рассмотрим соответствующий механический пример. Допустим, что к математическому маятнику, подвешенному не невесомый стержень длины l приложена постоянная сила F , ортогональная подвесу. Тогда маятник имеет 2 положения равновесия $\varphi_1 = \arcsin \frac{F}{mg}$, $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$, где φ – угол между подвесом и вертикалью.

Линеаризация уравнений движения в окрестности положения равновесия φ^* (φ^* может принимать значения φ_1 или φ_2) приводит к результату

$$\delta\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cos \varphi^* \delta\varphi = 0, \quad (9)$$

из которого следует, что при $F < mg$ положение равновесия φ_1 устойчиво по теореме Лагранжа-Дирихле, а φ_2 неустойчиво по первой теореме Ляпунова. При $F = mg$ уравнение (9) переходит в уравнение

$$\delta\ddot{\varphi} = 0,$$

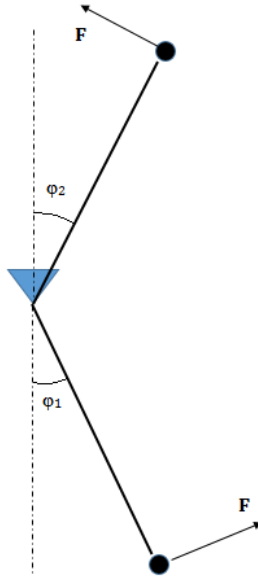


Рис. 12: Математический маятник под воздействием постоянной ортогональной силы.

имеющее кратный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ характеристического уравнения, два положения равновесия сливаются в положение $\varphi^* = \pi/2$, исчезающее при $F > mg$. В отличие от мягкой потери устойчивости, при дивергенции решение покидает окрестность положения равновесия, потерявшего устойчивость, что объясняет применение терминов "жесткая потеря устойчивости" и "дивергенция" ("дивергенция" в буквальном переводе означает "расхождение"). Жесткая потеря устойчивости происходит при прохождении корней характеристического уравнения линеаризованной системы через ноль, как это и было в рассмотренном примере.

Об определении бифуркаций положений равновесия в общем случае. Бифуркациям положений равновесия соответствует неоднозначность выражения $\mathbf{x}(\alpha)$ из уравнения $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{0}$. Это позволяет легко алгоритмизировать поиск бифуркационных значений при произвольной размерности \mathbf{x} и α . По теореме о неявной функции решение $\mathbf{x}(\alpha)$ уравнения $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{0}$ существует, единственно и непрерывно зависит от параметра α , если $\det(\partial f_i / \partial x_j) \neq 0$. Таким образом, бифуркации соответствуют тем точкам x_0, α_0 , для которых это условие не выполнено, т.е.

$$\det \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0.$$

Данное соотношение определяет точки бифуркаций положений равновесий при произвольной размерности фазового вектора системы (1).

Дополнение

О предельных циклах на плоскости. Траектории и, в частности, предельные циклы нелинейных динамических систем в подавляющем большинстве случаев достаточно сложны, что затрудняет их прямые аналитические исследования. Однако теорема Коши о существовании и единственности решения задачи Коши и ограниченность фазового потока двумерной плоскостью позволяют использовать наглядные геометрические соображения для построения косвенных методов исследования, не требующих аналитического интегрирования уравнений и дополняющих обширные возможности численных методов интегрирования.

В разделе рассмотрено несколько теорем, позволяющих установить наличие или отсутствие предельного цикла в некоторой области фазового пространства двумерной динамической системы. Все функции считаются гладкими и дифференцируемыми необходимое количество раз.

Для дальнейших рассуждений зависимость правой части динамической системы (1) от параметров подчеркивать не принципиально и поэтому для сокращения записи вместо $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha)$ далее везде пишется $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$. Для обозначений градиента и дивергенции будут использоваться символы $\nabla = \text{grad}$ и $\nabla \cdot = \text{div}$.

Теорема 1. Если существует скалярная функция $V(x)$ такая, что в системе

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \nabla V(x) \quad (10)$$

то в системе не существует предельных циклов.

Доказательство. Пусть замкнутый контур γ – предельный цикл системы (10). Выберем положительное направление обхода контура совпадающим с направлением траектории движения динамической системы по циклу. Тогда для вектора дифференциала дуги $d\mathbf{x}$ вдоль γ будет выполнено неравенство $\mathbf{X} \cdot d\mathbf{x} > 0$ (здесь и далее обозначение " \cdot " используется для скалярного произведения) и, следовательно,

$$\oint_{\gamma} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{x} > 0.$$

С другой стороны

$$\oint_{\gamma} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\gamma} \nabla V \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\gamma} dV = 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 2. Если в системе (10) существует глобальное асимптотически устойчивое положение равновесия x^* , к которому стремятся все траектории системы, то предельные циклы в (10) отсутствуют.

Доказательство. Допустим, что кривая γ – замкнутая периодическая траектория системы (10). Тогда положение равновесия x^* лежит либо внутри области, ограниченной кривой γ , либо вне нее. В любом случае траектории, начинающиеся вне множества, которому принадлежит x^* , не могут стремиться к x^* , поскольку для этого требуется пересечь кривую γ , что противоречит теореме Коши.

Теорема 3. Критерий Дюлака. Если в связанной области (т.е. области без "дырок") $G \subset \mathbb{R}^2$ фазового пространства системы (10) существует непрерывно дифференцируемая скалярная функция $B(\mathbf{x})$ для которой

$$\nabla \cdot (B\mathbf{X}) =$$

знакопостоянна в G , то в G отсутствуют замкнутые траектории системы (10).

Доказательство. Пусть $\gamma \subset G$ – периодическая замкнутая траектория (10). Докажем вспомогательное утверждение о том, что γ также будет являться траекторией системы

$$\dot{\mathbf{x}} = B(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x}). \quad (11)$$

Пусть уравнение кривой γ в параметрическом виде имеет вид $g(\mathbf{x}) = 0$. Поскольку кривая γ переходит в себя при преобразовании, задаваемом фазовым потоком системы (10), производная $g(\mathbf{x})$, вычисленная для любой точки на кривой γ в силу системы (10), равна нулю, т.е.:

$$\dot{g}_{\mathbf{x}} = \nabla g \cdot \mathbf{X} = 0$$

Дифференцирование $g(\mathbf{x})$ в силу (11) для любой точки на кривой γ с учетом последнего соотношения приводят к формуле

$$\dot{g}_{B\mathbf{X}} = B\nabla g \cdot \mathbf{X} = 0,$$

доказывающей инвариантность кривой γ по отношению к фазовому потоку (11), из чего следует, что γ – траектория (11).

Для доказательства теоремы вычислим поток векторного поля $B\mathbf{X}$ через кривую γ , выбрав положительное направление обхода контура против часовой стрелки. Поскольку векторное поле $B\mathbf{X}$ всюду касается кривой γ (см. рис. 13), данный поток равен нулю и выражается по формуле

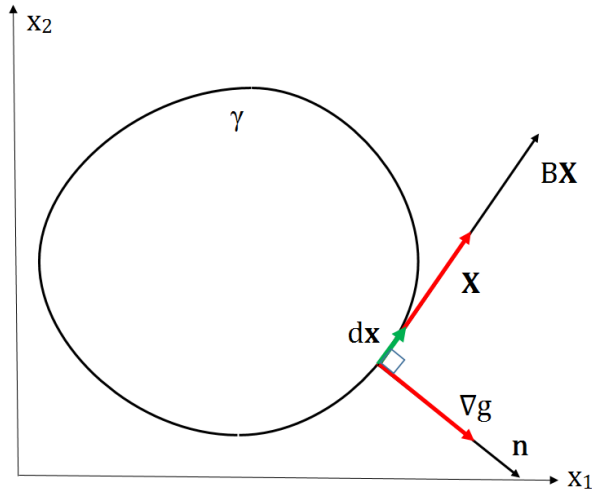


Рис. 13: Иллюстрация к доказательству критерия Дюлака.

$$\Phi = \oint_{\gamma} \mathbf{BX} \cdot d\mathbf{n} = \oint_{\gamma} \mathbf{BX} \cdot \mathbf{n} dx = 0,$$

где $d\mathbf{n} = \mathbf{n} dx$, \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к кривой γ , $dx = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$ – элемент дуги кривой γ . Глядя на рисунок 13, нетрудно понять, что если дифференциал радиус-вектора вдоль кривой γ имеет компоненты

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix},$$

то вектор внешней нормали \mathbf{n} равен

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}} \begin{pmatrix} dx_2 \\ -dx_1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя выражения для dx и \mathbf{n} в формулу для потока, получим:

$$\Phi = \oint_{\gamma} -BX_2 dx_1 + BX_1 dx_2 = 0$$

Последнее выражение допускает преобразование по формуле Грина:

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy,$$

где Ω – область, охватываемая контуром γ . Применяя формулу Грина к выражению для потока, получим:

$$\Phi = \iint_{\Omega} ((BX_1)_{x_1} + (BX_2)_{x_2}) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{BX}) dx_1 dx_2,$$

но по условию теоремы $\nabla \cdot (BX)$ – знакопостоянна в области G , а значит и в области $\Omega \subset G$, ограниченной кривой γ , что противоречит равенству нулю потока Φ и доказывает теорему.

Следствие. Полагая $B = 1$ получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Критерий Бендиксона. Если в связанной области (без "дырок") $G \subset \mathbb{R}^2$ фазового пространства системы (10) $\nabla \cdot \mathbf{X}$ знакопостоянна, то в области G не существует замкнутых траекторий системы (10).

Для доказательства существования циклов можно пытаться локализовать цикл, строя некоторое кольцо, не содержащее положений равновесия системы (10) в которое траектории системы входят как с внутренней, так и с наружной сторон, как это изображено на рисунке 14. В этом случае в кольце будет находиться цикл, изображенный пунктиром. Чтобы показать, что траектории устроены именно так можно ис-

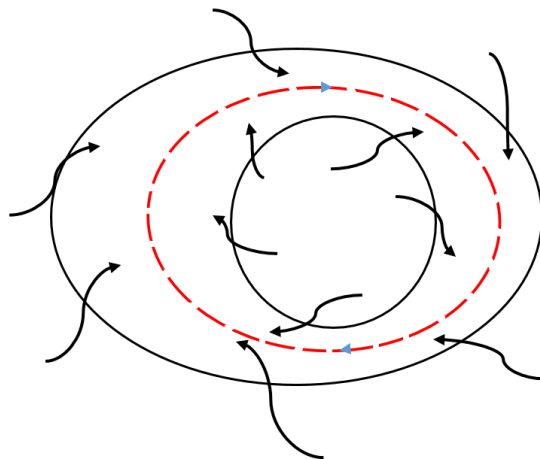


Рис. 14: Локализация цикла.

пользовать соображения, используемые в прямом методе Ляпунова. Если $V(\mathbf{x}) = c$ – уравнение внутренней или внешней границы кольца, то при $\dot{V}_{\mathbf{X}} = \nabla V \cdot \mathbf{X} > 0$ траектории проходят изнутри кольца наружу, а при противоположном (строгом!) знаке неравенства – снаружи внутрь.

Точные условия существования цикла дает теорема Пуанкаре-Бендиксона, формулировка и доказательство которой, как и многие другие аспекты теории динамических систем, не вошедшие в пособие, оставляются заинтересованному читателю для самостоятельного освоения.

О динамических системах при $\dim \mathbf{x} \geq 3$. При увеличении размерности фазового вектора до трех и более поведение динамической системы может значительно усложняться, поскольку теорема Коши на-

кладывает меньше ограничений на структуру траекторий. Это приводит к новым эффектам, принципиально не возможным в системах меньшей размерности. К одним из наиболее примечательных свойств многомерных динамических систем относятся явление *динамического хаоса* и усложнение структуры аттракторов.

Бифуркации многомерных систем также более сложны и разнообразны. Так, при изменении параметров в многомерных системах из циклов могут рождаться инвариантные торы, на которых лежат траектории системы, могут скачкообразно удваиваться характерные периоды колебаний, поведение системы может изменяться от совершенно тривиального до хаотического (естественно, что этот перечень весьма не полон).

Динамический хаос – сверхчувствительность решения задачи Коши по отношению к начальным условиям, обусловленная постоянным *экспоненциальным "разбеганием"* изначально близких траекторий. Для иллюстрации этого понятия в литературе по динамическим системам обычно приводится система Лоренца, полученная американским математиком и метеорологом Э. Лоренцом как приближенная модель конвективных процессов в плоском слое морской воды:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= x_1(b - x_3) - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - cx_3, \end{aligned} \tag{12}$$

где a, b, c – некоторые постоянные параметры. При определенных значениях параметров в системе обнаруживается хаотическое поведение, при котором траектории системы принимают вид, представленный на рисунке 15.

Из теоремы Коши следует вывод о детерминированности движения системы, описываемой дифференциальными уравнениями, удовлетворяющими условиям теоремы Коши, и любая траектория полностью определяется начальными условиями. Однако в системах с хаотическим поведением на качественном уровне наблюдается своего рода "непредсказуемость" поведения: траектории при сколь угодно малом возмущении начальных условий быстро расходятся и полностью отличаются друг от друга по форме. Чтобы подчеркнуть, что динамика системы все же соответствует теореме Коши вместо понятия динамический хаос используют термин *детерминированный хаос*. Иногда применяется образный термин *эффект бабочки* благодаря схожести динамического хаоса и одной философской идеи из рассказа Р. Брэдбери «И грянул гром».

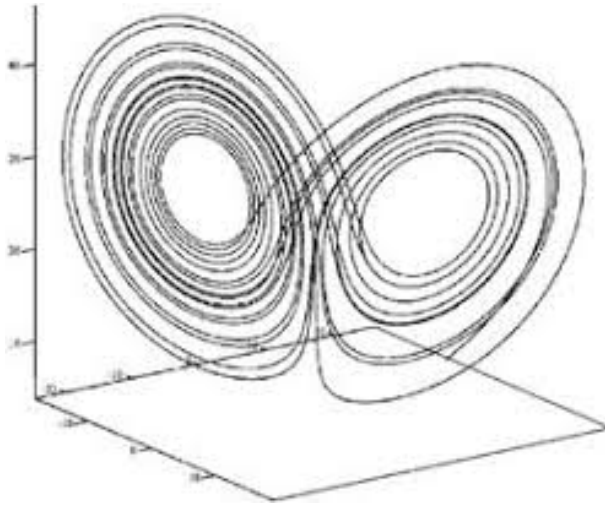


Рис. 15: Траектории системы Лоренца.

Модель Лоренца позволяет объяснить одну из причин, препятствующих долгосрочным прогнозам явлений в нелинейных системах, например, долгосрочным метеорологическим прогнозам – даже упрощенная модель конвективных процессов приводит к хаотическому поведению. Естественно, что от более полной модели или реальной системы едва ли можно ожидать более простой динамики.

Замечание. Интересно отметить один из фактов о системе Лоренца, лежащий на поверхности. Известно [15], что производная по времени от фазового объема $V = \int \cdots \int dx_1 \dots dx_n$ в системе

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$$

вычисляется по формуле

$$\dot{V} = \int \cdots \int \nabla \cdot \mathbf{X} dx_1 \dots dx_n.$$

В системе Лоренца $\nabla \cdot \mathbf{X} = -a - 1 - c$ и следовательно

$$\dot{V} = -(a + 1 + c)V \Rightarrow V = V_0 e^{-(a+1+c)t} \rightarrow 0.$$

Тем не менее, экспоненциальное убывание фазового объема не препятствует экспоненциальному разбеганию траекторий.

Аттракторы многомерных динамических систем подразделяются на *регулярные* и *странные* [2], [6]. Регулярные аттракторы в многомерных системах – положения равновесия, предельные циклы, многомерные торы и другие многообразия [15] (фактически – многомерные поверхности).

Если притягивающее множество в фазовом пространстве соответствует режиму установившихся непериодических колебаний и система

демонстрирует хаотическое поведение, то это множество называется *хаотическим аттрактором*. Например, хаотическим аттрактором обладает система Лоренца при определенных значениях параметров.

В теории динамических систем показывается, что даже в достаточно простых нелинейных системах аттракторы могут иметь *фрактальную структуру*. В этом случае аттракторы называются *странными*. Примером и здесь может служить система Лоренца, обладающая странным аттрактором.

Замечание. Можно привести примеры [6] систем, имеющих:

а) странный аттрактор, но не обладающих хаотическим поведением (нет экспоненциальной неустойчивости траекторий);

б) хаотическое поведение и хаотический аттрактор, не имеющий фрактальную структуру;

в) хаотическое поведение и странный аттрактор.

Для иллюстрации понятия фрактала на рисунке 16 приведен один из простейших примеров – треугольник Серпинского, принцип построения которого ясен из рисунка. Для любых фракталов, в том числе, более

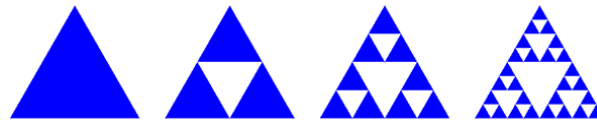


Рис. 16: Треугольник Серпинского.

сложных, характерно самоподобие отдельных элементов и устремление количества шагов самоподобия к бесконечности. Вычисление размерности фракталов требует введения понятия *размерности Хаусдорфа*, либо *фрактальной размерности*. Намеренно не вдаваясь тонкости, возникающие при строгом абстрактном изложении понятия размерности и имея в виду, что это понятие далее будет применяться к относительно простым множествам евклидова пространства, можно определить фрактальную размерность следующим образом.

Определение. Фрактальной размерностью множества $G \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$D = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon}{\ln \varepsilon}$$

где N_ε – минимальное число шаров радиуса ε , покрывающее множество G .

Например, гладкая кривая длины l покрывается $N_\varepsilon \sim l/\varepsilon$ шарами и

$$D = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(l/\varepsilon)}{\ln \varepsilon} = 1,$$

что совпадает с "обычной" (топологической) размерностью кривой. Данный пример также показывает, что для вычисления фрактальной размерности достаточно знать лишь порядок величин, входящих в формулу (13). Ограниченная двумерная поверхность в \mathbb{R}^3 с характерным размером l покрывается $N_\varepsilon \sim (l/\varepsilon)^2$ шарами и $D = 2$, что также совпадает с топологической размерностью.

Хаусдорфова размерность фракталов может не быть целым числом. Вычислим ее для рассмотренного треугольника Серпинского. Минимальное покрытие треугольника можно получить описывая окружность вокруг каждого треугольника при очередной итерации процесса самоподобия. Пусть сторона исходного треугольника равна l . Тогда при итерации с номером m сторона нового треугольника равна $l/2^m$ и, следовательно, $\varepsilon \sim l/2^m$. Количество треугольников (и шаров покрытия) при этой итерации равно $N_\varepsilon = 3^m$. Соответственно, размерность

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585$$

т.е. не является целым числом! Таким образом, фракталы не относятся к классам кривых или поверхностей – многообразий [15], всегда имеющих целую размерность. Для основательного изучения понятия хаусдорфовой размерности и свойств фракталов читатель может обратиться, например, к следующим книгам [16], [17].

Примечание. Интересно обратить внимание, что форму, напоминающую фрактальные множества, имеют многие ветвящиеся объекты природы, например, листья различных растений, деревья, системы сосудов, некоторые кристаллы и другие объекты. В качестве примера на рисунке 17 представлен один их сортов капусты.

Многомерные нелинейные системы обладают рядом нетривиальных свойств, требующих от исследователя освоения тонких математических методов и весьма сложных понятий, что очевидно даже из беглого просмотра специальной литературы. Однако один из немногих общих результатов [15] о движении многомерных систем доказывается весьма просто и имеет интересные следствия.

Теорема Пуанкаре о возвращении. Пусть g – сохраняющее объем непрерывное взаимно-однозначное отображение, переводящее ограниченную область D евклидова пространства в себя: $gD = D$.



Рис. 17: Капуста сорта Романеску.

Тогда в любой окрестности U любой точки области D найдется точка $\mathbf{x} \in U$, возвращающаяся в область U при n – кратном действии отображения g , т.е. $g^n \mathbf{x} \in U$ для некоторого $n > 0$.

Доказательство. Рассмотрим образы окрестности U : $U, gU, \dots, g^n U$. По условию теоремы все образы имеют одинаковые положительные объемы и поэтому не могут не пересекаться, т.к. в противном случае объем $U \cup gU \cup \dots, \cup g^n U$ неограниченно растет и при некотором n превысит объем D . Таким образом для некоторых m и k , $m > k$ будет выполнено условие

$$g^m \cap g^k \neq \emptyset \Rightarrow g^{m-k} \cap U \neq \emptyset.$$

Следовательно, $\exists \mathbf{x} \in U : \mathbf{y} = g^{m-k} \mathbf{x} \in g^{m-k} U \cap U$, что и доказывает теорему.

Теорема Пуанкаре может применяться к произвольным отображениям и, в частности к отображениям, задаваемым фазовыми потоками систем дифференциальных уравнений с нулевой дивергенцией за некоторое время t , которые по теореме Коши обладают гладкостью и взаимной однозначностью:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}(\mathbf{y}), \nabla \cdot \mathbf{Y} = 0, \mathbf{y}(0) = \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = g\mathbf{x}.$$

Теорема Пуанкаре применима к консервативным механическим системам, у которых потенциал $\Pi(\mathbf{q})$ растет на бесконечности. Действительно, записывая уравнения движения в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_i &= H_{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}}_i &= -H_{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \Pi(\mathbf{q})$ – функция Гамильтона, $T(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ – положительно определенная кинетическая энергия, получаем, что условия

теоремы Пуанкаре выполнены: в качестве области D можно выбрать $D = \{\mathbf{q}, \mathbf{p} : H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \leq E\}$, где E – уровень полной энергии системы. Фазовый объем гамильтоновой системы при отображении фазового потока сохраняется, поскольку

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} H_{\mathbf{p}} \\ -H_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \sum H_{p_i q_i} - H_{q_i p_i} = 0,$$

а область D – ограничена из-за роста $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ на бесконечности.

Интересными следствиями теоремы Пуанкаре о возвращении являются приводимые далее утверждения.

Утверждение 1. Пусть D – окружность, φ – некоторая точка на ней, $g\varphi = \varphi + \alpha$ – поворот на угол α относительно центра окружности. Тогда если α удовлетворяет условию $\exists m, n \in \mathbb{Z} : \alpha = 2\pi \frac{m}{n}$, то множество точек

$$\{\varphi, g\varphi, \dots, g^n \varphi \dots\} \quad (14)$$

всюду плотно на окружности D (множество M называется всюду плотным в множестве N если в любой окрестности из N существуют точки из M).

Отображение g и область его действия удовлетворяют всем условиям теоремы Пуанкаре при любом α , а при $\alpha = 2\pi m/n$ выполнено условие $g^n \varphi = \varphi$ и множество (14) состоит из конечного набора точек.

Рассмотрим случай, когда α несоизмерим с 2π . Пусть $U = (\varphi - \delta/2, \varphi + \delta/2)$ – произвольная $\delta/2$ - окрестность точки φ . Тогда теорема Пуанкаре гарантирует, что $\exists n, \psi \in U : g^n \psi \in U$ и, значит, $|g^n \psi - \psi| < \delta$. Поскольку отображение g действует на все точки окружности одинаково, то из этого следует, что $|g^n \varphi - \varphi| < \delta$, $|g^{2n} \varphi - g^n \varphi| < \delta$, ..., $|g^{nk} \varphi - g^{n(k-1)} \varphi| < \delta$ и соседние точки подпоследовательности $\{\varphi, g^n \varphi, \dots, g^{nk} \varphi, \dots\}$ последовательности (14) равноудалены между собой. Таким образом, в любой δ - окрестности V произвольной точки окружности D найдутся точки последовательности (14), что и доказывает утверждение.

Утверждение 2. Рассмотрим линейную колебательную консервативную систему с двумя степенями свободы.

$$A\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (15)$$

где $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$, A, C – симметрические положительно определенные матрицы. Тогда если частоты главных мод колебаний соизмеримы, то траектории системы – замкнутые траектории на двумерных торах, а если

частоты несоизмеримы, то траектории всюду плотны на двумерных торах (всюду плотная обмотка тора).

В нормальных координатах [7],[8] система (15) описывается уравнениями двух независимых осцилляторов

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 + \omega_1^2 \theta_1 &= 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 &= 0.\end{aligned}\tag{16}$$

Рассмотрим отдельно уравнение осциллятора

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0.$$

Перепишем уравнение в виде системы

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= u, \\ \dot{u} &= -\omega^2 \theta\end{aligned}\tag{17}$$

и заметим, что система имеет первый интеграл $E = \frac{1}{2}(u^2 + \omega^2 \theta^2)$, в чем легко убедиться, дифференцируя его в силу (17). Уравнения $E(\theta, u) = \text{const}$ задают на плоскости параметров (θ, u) концентрические эллипсы, которые и будут фазовыми траекториями (17). Делая растяжение по оси u за счет замены переменной $u = \omega v$, получаем систему

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega v, \\ \dot{v} &= -\omega \theta,\end{aligned}\tag{18}$$

траекториями которой будут окружности $\theta^2 + v^2 = \text{const}$, а решениями – функции $\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, $v(t) = -A \sin(\omega t + \varphi)$, задающие отображения этих окружностей на себя.

Теперь вернемся к рассмотрению системы (16). Проводя для каждого осциллятора, составляющего (16), аналогичные преобразования, получим систему

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \omega_1 v_1, \dot{v}_1 = -\omega_1 \theta_1, \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 v_2, \dot{v}_2 = -\omega_2 \theta_2,\end{aligned}\tag{19}$$

имеющую решение

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), v_1(t) = -A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \\ \theta_2(t) &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), v_2(t) = -A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).\end{aligned}\tag{20}$$

Двумерный тор T^2 определяется как декартово произведение двух окружностей $T^2 = S^1 \times S^1$, т.е. множество пар точек $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ таких, что

φ_1 принадлежит первой окружности S^1 , входящей в произведение, а φ_2 – второй. Поскольку для любых ненулевых начальных условий каждое из решений $\{\theta_1(t), v_1(t)\}$ и $\{\theta_2(t), v_2(t)\}$ системы (19) лежит на некоторой окружности, то можно утверждать, что полный набор параметров $\{\theta_1(t), v_1(t), \theta_2(t), v_2(t)\}$ лежит на двумерном торе – см. рисунок 18. При отображении фазового потока системы точки тора остаются на нем и поэтому тор называют *инвариантным тором*.

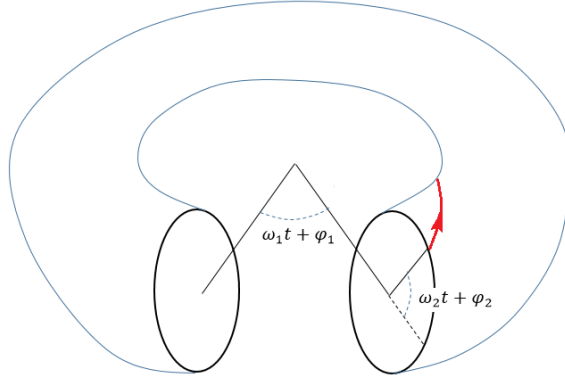


Рис. 18: Траектория на торе.

Решение (20) системы (19) задает отображение начальных условий фазовым потоком системы (19). Выберем некоторую начальную точку на траектории и рассмотрим данное отображение в моменты времени $t_k = 2\pi k/\omega_1$, кратные периоду первой главной моды колебаний. Для первой моды отображение $\{\theta_1(t_k), v_1(t_k)\}$ тождественно, а для второй моды $\{\theta_2(t_k), v_2(t_k)\}$ будет представлять собой поворот вокруг центра окружности на угол

$$2\pi k \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

т.е. преобразование, рассмотренное в утверждении 1. По доказанному это отображение задает конечный набор точек при $\omega_2/\omega_1 = m/n$, $m, n \in \mathbb{Z}$ и всюду плотное множество на окружности, когда ω_2/ω_1 – иррационально. В первом случае через некоторое количество периодов первой моды отображение возвращается в исходную точку и поэтому соответствующая траектория на торе будет замкнутой. Во втором случае траектория всюду плотна на торе, поскольку доказано, что точки ее пересечения с одной из окружностей, образующей тор, всюду плотны на ней, а сама окружность может быть выбрана произвольно.

Всюду плотная траектория по определению проходит через любую сколь угодно малую окрестность произвольной точки на торе. Из этого

получается, что любая траектория со временем достигает фактически любой точки на этом торе.

Движения системы при рациональном ω_2/ω_1 называют *периодическими колебаниями*, а при иррациональном ω_2/ω_1 – *квазипериодическими*.

Замечание 1. Действуя аналогичным образом, можно получить обобщение результата на случай консервативной колебательной системы произвольной конечной размерности.

Замечание 2. Возвращение к исходным фазовым переменным $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ задается линейным преобразованием с постоянной матрицей. Поэтому полученный тор и фазовые траектории на нем при возвращении к исходным переменным подвергнутся аффинному преобразованию и доказанный результат останется справедливым. По той же причине он справедлив и при переходе к описанию системы в гамильтоновых переменных.

Замечание 3. Важность исследований траекторий гамильтоновых систем на торах обусловлена известной теоремой Лиувилля об интегрируемых системах – см. [7],[8], [15], дающей условия, при выполнении которых траектории системы лежат на многомерных торах и ее связью с теорией резонансных явлений, нормальных форм [7],[14] и КАМ - теорией.

Утверждение 3. Укажем еще одно следствие теоремы Пуанкаре [15]. Допустим, что сосуд фиксированной формы разделен перегородкой на две половины, в одной из которых – вакуум, в другой – молекулы идеального газа. Затем перегородка убирается. Тогда если столкновения молекул со стенками абсолютно упруги, то из теоремы Пуанкаре следует, что газ через некоторое время будет находиться в состоянии, близком к исходному. Отображение, фигурирующее в теореме Пуанкаре, задает фазовый поток системы уравнений движения молекул идеального газа в $6N$ -мерном пространстве их импульсов и декартовых координат. Разгадка парадокса состоит в колоссальном времени, необходимом для реализации этого следствия теоремы Пуанкаре.

Бифуркация рождения тора. Рассмотрим динамическую систему, образованную двумя системами вида (8):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_1 x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha_1 x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_3 &= \alpha_2 x_3 - x_4 - x_3(x_3^2 + x_4^2) \\ \dot{x}_4 &= x_3 + \alpha_2 x_4 - x_4(x_3^2 + x_4^2) \end{aligned} \tag{21}$$

Ранее мы показали, что в подсистемах из двух первых и двух последних уравнений, образующих (21), при $\alpha_{1,2} < 0$ имеется асимптотически устойчивое положение равновесия в начале координат, а при $\alpha_{1,2} > 0$ из него рождается асимптотически устойчивый предельный цикл. Поэтому если в (21) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 < 0$, то траектории (21) стремятся к предельному циклу в плоскости (x_1, x_2) . Если увеличивать параметр α_2 , то при переходе через $\alpha_2 = 0$ в область положительных величин во второй системе рождается второй цикл.

Исследуя линейную колебательную систему (15) мы видели, что наличие двух периодических траекторий в подпространствах фазового пространства системы можно трактовать как движение фазовой траектории по поверхности двумерного тора. Таким образом, можно утверждать, что рождение второго цикла в системе (21) эквивалентно *перерождению асимптотически устойчивого предельного цикла в инвариантный тор*. Это – новый тип бифуркации, не возможный для систем на плоскости.

Приведенный пример рождения тора важен для понимания геометрии и принципиальной возможности этой бифуркации. Однако обычно уравнения динамической системы не разделяются на независимые подсистемы и изучение рождения тора в общей постановке – сложная задача, выходящая далеко за рамки элементарного изложения. Более того, тор может рождаться как раз благодаря взаимодействию отдельных компонент фазового вектора в силу структуры системы.

Сечения Пуанкаре и типы траекторий. Обычно непростое само по себе исследование многомерных динамических систем бывает сопряжено и с трудностями наглядного представления результатов. Даже в трехмерном случае, когда такое представление еще возможно, не всегда получается изобразить фазовые траектории системы так, чтобы была ясна качественная картина движения.

Один из методов, позволяющих получить наглядные представления о траекториях системы, называется методом сечений Пуанкаре и состоит в следующем. В фазовом пространстве системы выбирается некоторая двумерная поверхность, обычно плоскость, и рассматриваются точки пересечения этой поверхности траекториями системы. Для большинства систем это практически невозможно осуществить аналитически и соответствующие конструкции строятся с помощью численных методов интегрирования. В зависимости от поведения траекторий системы получившаяся картина может оказаться очень простой, например, для периодической траектории, либо иметь весьма сложную, в т.ч. фрактальную

структуру. Последнее также доказывается при помощи численных оценок.

При анализе двумерных неавтономных систем вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \dim \mathbf{x} = 2, \mathbf{X}(\mathbf{x}, t + T) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$$

с периодическим воздействием часто используются сечения траекторий набором плоскостей $t_n = Tn$, ортогональных оси времени и проходящих через равные интервалы, кратные периоду воздействия T .

Далее на рисунке 19 для иллюстрации представлены сечения Пуанкаре траектории колебательной системы, лежащей на двумерном торе.

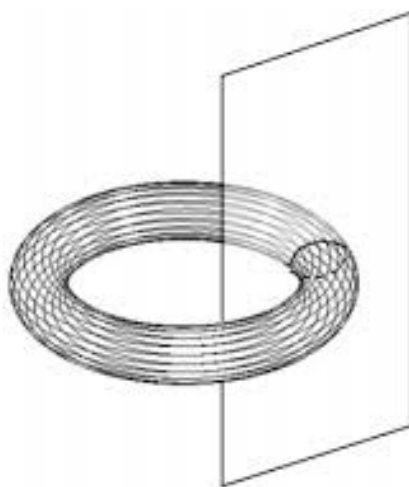


Рис. 19: Сечение Пуанкаре для траекторий на торе.

Если частоты мод колебаний соизмеримы, то траектория периодическая и в сечении Пуанкаре будет наблюдаться дискретный набор точек, лежащих на замкнутой кривой-сечении тора. Если частоты несоизмеримы, то точки будут заполнять всю кривую (см. Утверждение 2).

Наличие странного аттрактора обычно приводит к сложным структурам в сечении Пуанкаре. Для примера на рисунке 20 представлена картина сечений Пуанкаре траектории плоскостями $t_n = 2\pi n$ для уравнения Дуффинга

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} - x + x^3 = F \cos t,$$

демонстрирующего хаотическое поведение при достаточно больших F .

Замечание. Может показаться, что последняя иллюстрация противоречит приведенным выше утверждениям о невозможности хаотического поведения фазовых траекторий двумерных систем. Это кажущееся

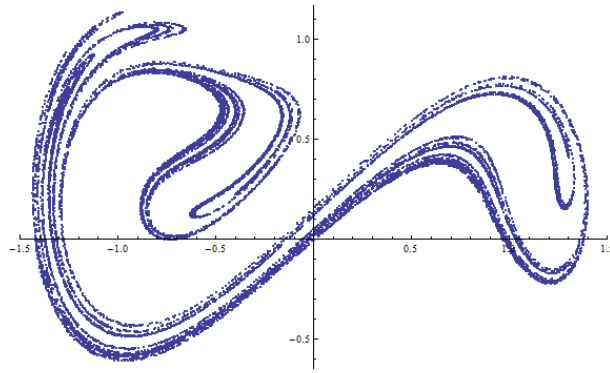


Рис. 20: Сечение Пуанкаре для уравнения Дуффинга.

противоречие снимается тем, что рассмотренная система не автономна и заменами переменных сводится к автономной системе третьего порядка, для которой хаотическая динамика уже возможна:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \\ \dot{u} &= -\gamma u + x - x^3 + F \cos v \\ \dot{v} &= 1\end{aligned}$$

В случае хаотического нестранного аттрактора точки в сечении Пуанкаре хаотически заполняют некоторую область в сечении. При наличии странного аттрактора точки в сечении образуют сложные упорядоченные структуры. Доказательство фрактальной природы сечения – тонкий вопрос, рассмотрение которого выходит далеко за рамки данного пособия.

Важно заметить, что отображение Пуанкаре приводит к взаимосвязи между дифференциальными уравнениями и дискретными отображениями. Дискретные отображения, как правило, значительно проще поддаются анализу и некоторые свойства, установленные для дискретных отображений, могут соответствовать определенным явлениям в системах дифференциальных уравнений. Установленная взаимосвязь оказывается весьма плодотворной для объяснения ряда эффектов в динамических системах.

Список литературы

- [1] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: ИКИ, 2002. 561 с.
- [2] Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. URSS, 2001. 320 с.
- [3] Арнольд В.И. Теория катастроф. URSS, 2016, 134 с.
- [4] Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций. М.: ВИНТИ АН СССР. Т.5. "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления". 1985. 218 с.
- [5] Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. 1985. 256 с.
- [6] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Лекции по нелинейной динамике. Регулярная и хаотическая динамика. 2011. 516 с.
- [7] Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит. 2008. 304 с.
- [8] Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: ЧеРо. 1999. 572 с.
- [9] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Дрофа, 2004, 720 с.
- [10] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления нелинейных уравнений. М.: Наука. 1969. 529 с.
- [11] Йосс Ж. Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир. 1983. 301 с.
- [12] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1974. 331 с.
- [13] Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. 368 с.
- [14] Журавлев В.Ф. Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука. 1988. 328 с.

- [15] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. УРСС. 2003. 416 с.
- [16] Мандельброт Б.Б. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. Ижевск. Регулярная и хаотическая динамика. 2009. 392 с.
- [17] Мандельброт Б.Б. Фрактальная геометрия природы = The Fractal Geometry of Nature. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002. — 656 с.