БИЛЕТ 5

1. Когда к квадратному трехчлену $f(x)$ прибавили x^2, его наименьшее значение увеличилось на 1, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 3. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $2x^2$?

Ответ. Увеличится на $\dfrac{3}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наименьшее значение, его старший коэффициент положителен, а само минимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0) = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c$.

Если к $f(x)$ прибавить x^2, то получаем квадратный трёхчлен $(a+1)x^2+bx+c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+4}+c$. Если из $f(x)$ вычесть x^2, то получаем квадратный трёхчлен $(a-1)x^2+bx+c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-4}+c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases} -\frac{b^2}{4a+4} + c = -\frac{b^2}{4a} + c + 1, \\ -\frac{b^2}{4a-4} + c = -\frac{b^2}{4a} + c - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a+4} = 1, \\ \frac{b^2}{4a-4} - \frac{b^2}{4a} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^2}{4a(a+1)} = 1, \\ \frac{b^2}{4a(a-1)} = 3. \end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{a-1}{a+1} = \frac{1}{3}$, откуда $a = 2$. Тогда $b^2 = 24$, а минимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{24}{8} + c = -3 + c$. Если к квадратному трёхчлену $f(x)$ добавить $2x^2$, то выйдет функция $(a+2)x^2 + bx + c$, минимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a+8} + c = -\frac{24}{16} + c = -\frac{3}{2} + c$, что на $\frac{3}{2}$ больше минимума исходной функции.

2. Решите неравенство $\sqrt{\sqrt{x+1}-2} + \sqrt{x+82-18\sqrt{x+1}} > 5$.

Ответ. $x \in [3;\ 35) \cup (120;\ +\infty)$.

Решение. Заметим, что второе подкоренное выражение может быть записано в виде $\left(\sqrt{x+1}-9\right)^2$. Неравенство принимает вид $\sqrt{\sqrt{x+1}-2} + \left|\sqrt{x+1}-9\right| > 5$. Обозначим $\sqrt{\sqrt{x+1}-2} = t$. Тогда получаем

$$t + \left|t^2 - 7\right| > 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 - 7 > 5 - t, \\ t^2 - 7 < -5 + t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 + t - 12 > 0, \\ t^2 - t - 2 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \in (-\infty; -4) \cup (3; +\infty), \\ t \in (-1; 2). \end{array}\right.$$

Возвращаясь обратно к переменной x, получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\sqrt{x+1}-2} < -4, \\ \sqrt{\sqrt{x+1}-2} > 3, \\ -1 < \sqrt{\sqrt{x+1}-2} < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} - 2 > 9, \\ 0 \leqslant \sqrt{x+1} - 2 < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 > 121, \\ 4 \leqslant x + 1 < 36 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 120, \\ 3 \leqslant x < 35. \end{array}\right.$$

3. На сторонах треугольника ABC отметили точки: 10 – на стороне AB, 11 – на стороне BC, 12 – на стороне AC. При этом ни одна из вершин треугольника не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

Ответ. 4951.

Решение. Три точки из 33 данных можно выбрать $C_{33}^3 = 5456$ способами. При этом треугольник образуется во всех случаях за исключением того, когда все три точки лежат на одной стороне треугольника. Итак, не подходят $C_{12}^3 + C_{11}^3 + C_{10}^3 = 220 + 165 + 120 = 505$ способов. Значит, всего есть $5456 - 505 = 4951$ треугольник.

4. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (*точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC*). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащих точки B, равны 60° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC.

Ответ. $\sqrt{3} : 1$.

Решение. По теореме о вписанном угле угол DCA равен половине дуги AD, а угол DBC равен половине дуги CD. Значит, $\angle DCH = 30^\circ$, $\angle HBC = 45^\circ$. Тогда треугольник BHC – прямоугольный и равнобедренный, $BH = HC$. Но $HD = CH \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{CH}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $BH : HD = \sqrt{3} : 1$.

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(50;30)$. Найдите количество таких квадратов.

Ответ. 930.

Решение. Проведём через данную точку $(50;30)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x=50$ и $y=30$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда "нижняя" вершина квадрата может быть расположена 30 способами: $(50;\ 0), (50;\ 1), \ldots, (50;\ 29)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x=50$ и $y=30$ разделяют плоскость. Рассмотрим "левую нижнюю" вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $20\leqslant x\leqslant 49$, $0\leqslant y\leqslant 29$. Получаем 30^2 способов.

Общее количество способов равно $30^2+30=31\cdot 30=930$.

6. а) Изобразите на координатной плоскости фигуру Φ, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-y^2\leqslant 2\,(x-y)\,, \\ x^2+y^2\leqslant 4\,(x+y-1)\,. \end{cases}$$

б) Найдите площадь фигуры Φ и расстояние от точки $T\,(0;4)$ до ближайшей точки фигуры Φ.

Ответ. $S=2\pi$; $\rho=2\sqrt{2}-2$.

Решение. Преобразуем первое неравенство: $(x-y)(x+y)-2(x-y)\leqslant 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-2)\leqslant 0$. Оно задаёт два вертикальных угла, границами которых являются прямые $y=x$ и $y=2-x$ (точки $(0;\pm 10)$ лежат внутри этих углов). Второе неравенство может быть переписано в виде $(x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 4$. Оно задаёт круг с центром $G(2;\ 2)$ радиуса 2. Пересечение этих двух множеств и есть искомое множество.

Фигура Φ составляет ровно половину круга радиуса 2, поэтому её площадь равна $\frac{1}{2}\cdot 4\pi=2\pi$. Отметим точку E пересечения отрезка GT с окружностью. TE – это и есть кратчайшее расстояние от точки T до фигуры Φ. $TE=TG-GE=2\sqrt{2}-2$.

7. В треугольнике ABC проведена медиана BM; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причём $BP=2$, $MP=4$.

а) Найдите отрезок DE.

б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

Ответ. а) $DE=8$; б) $R=2\sqrt{85}$.

Решение. а) По свойству биссектрисы треугольника получаем $AD:DB=AM:MB$, $CE:EB=CM:MB$, а так как $AM=CM$, то отсюда следует, что $AD:DB=CE:EB$, поэтому $AC\parallel DE$. Но тогда $\angle PDM=\angle AMD=\angle BMD$, значит, треугольник PDM – равнобедренный и $DP=MP=4$. Аналогично получаем, что $EP=4$ и тогда $DE=8$.

б) Трапеция $ADEC$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая. Отрезок PM, соединяющий середины оснований трапеции, им перпендикулярен. Из подобия прямоугольных треугольников BPD и BMA находим, что $MA=PD\cdot\frac{MP}{MB}=12$. Пусть EH – высота трапеции. Тогда $AH=AM+MH=AM+PE=16$, $AE=\sqrt{AH^2+HE^2}=4\sqrt{17}$, $CH=CM-MH=8$, $CE=\sqrt{CH^2+HE^2}=4\sqrt{5}$, $\sin\angle HCE=\frac{EH}{EC}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Данная окружность является описанной около треугольника ACE, поэтому её радиус R равен $\frac{AE}{2\sin\angle ACE}=2\sqrt{85}$.

БИЛЕТ 6

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили x^2, его наибольшее значение увеличилось на $\dfrac{27}{2}$, а когда из него вычли $4x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если из него вычесть $2x^2$?

Ответ. Уменьшится на $\dfrac{27}{4}$.

Решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наибольшее значение, его старший коэффициент отрицателен, а само максимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0)=a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=-\frac{b^2}{4a}+c$.

Если к $f(x)$ прибавить x^2, то получаем квадратный трёхчлен $(a+1)x^2+bx+c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+4}+c$. Если из $f(x)$ вычесть $4x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a-4)x^2+bx+c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-16}+c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases}-\frac{b^2}{4a+4}+c=-\frac{b^2}{4a}+c+\frac{27}{2},\\ -\frac{b^2}{4a-16}+c=-\frac{b^2}{4a}+c-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a+4}=\frac{27}{2},\\ \frac{b^2}{4a-16}-\frac{b^2}{4a}=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a(a+1)}=\frac{27}{2},\\ \frac{b^2}{a(a-4)}=9.\end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{a-4}{4(a+1)}=\frac{3}{2}$, откуда $a=-2$. Тогда $b^2=108$, а максимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{108}{-8}+c=\frac{27}{2}+c$. Если из квадратного трёхчлена $f(x)$ вычесть $2x^2$, то выйдет функция $(a-2)x^2+bx+c$, максимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a-8}+c=-\frac{108}{-16}+c=\frac{27}{4}+c$, что на $\frac{27}{4}$ меньше максимума исходной функции.

2. Решите неравенство $\sqrt{\sqrt{x-1}-3}+\sqrt{x+99-20\sqrt{x-1}}>5$.

Ответ. $x\in[10;\ 50)\cup(145;\ +\infty)$.

Решение. Заметим, что второе подкоренное выражение может быть записано в виде $\left(\sqrt{x-1}-10\right)^2$. Неравенство принимает вид $\sqrt{\sqrt{x-1}-3}+\left|\sqrt{x-1}-10\right|>5$. Обозначим $\sqrt{\sqrt{x-1}-3}=t$. Тогда получаем

$$t+\left|t^2-7\right|>5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2-7>5-t,\\ t^2-7<-5+t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2+t-12>0,\\ t^2-t-2<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\in(-\infty;-4)\cup(3;+\infty),\\ t\in(-1;\,2).\end{array}\right.$$

Возвращаясь обратно к переменной x, получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{\sqrt{x-1}-3}<-4,\\ \sqrt{\sqrt{x-1}-3}>3,\\ -1<\sqrt{\sqrt{x-1}-3}<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}-3>9,\\ 0\leqslant\sqrt{x-1}-3<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1>144,\\ 9\leqslant x-1<49\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>145,\\ 10\leqslant x<50.\end{array}\right.$$

3. На сторонах треугольника ABC отметили точки: 12 – на стороне AB, 9 – на стороне BC, 10 – на стороне AC. При этом ни одна из вершин треугольника не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

Ответ. 4071.

Решение. Три точки из 31 данной можно выбрать $C_{31}^3=4495$ способами. При этом треугольник образуется во всех случаях за исключением того, когда все три точки лежат на одной стороне треугольника. Итак, не подходят $C_{12}^3+C_9^3+C_{10}^3=220+84+120=424$ способа. Значит, всего есть $4495-424=4071$ треугольник.

4. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (*точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC*). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащих точки B, равны 120° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC.

Ответ. $1:\sqrt{3}$.

Решение. По теореме о вписанном угле угол DCA равен половине дуги AD, а угол DBC равен половине дуги CD. Значит, $\angle DCH=60^\circ$, $\angle HBC=45^\circ$. Тогда треугольник BHC – прямоугольный и равнобедренный, $BH=HC$. Но $HD=CH\operatorname{tg}60^\circ=CH\sqrt{3}$. Следовательно, $BH:HD=1:\sqrt{3}$.

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(55; 25)$. Найдите количество таких квадратов.

Ответ. 600.

Решение. Проведём через данную точку $(55; 25)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x = 55$ и $y = 25$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда “нижняя” вершина квадрата может быть расположена 24 способами: $(55;\ 1), (55;\ 2), \ldots, (55;\ 24)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x = 55$ и $y = 25$ разделяют плоскость. Рассмотрим “левую нижнюю” вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $31 \leqslant x \leqslant 54$, $1 \leqslant y \leqslant 24$. Получаем 24^2 способов.

Общее количество способов равно $24^2 + 24 = 24 \cdot 25 = 600$.

6. а) Изобразите на координатной плоскости фигуру Φ, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y^2 - x^2 \leqslant 3\,(x + y)\,, \\ x^2 + y^2 \leqslant 6y - 6x - 9. \end{cases}$$

б) Найдите площадь фигуры Φ и расстояние от точки $T\,(-6; 0)$ до ближайшей точки фигуры Φ.

Ответ. $S = \dfrac{9\pi}{2}$; $\rho = 3\sqrt{2} - 3$.

Решение. Преобразуем первое неравенство: $(y - x)(y + x) - 3(y + x) \leqslant 0 \Leftrightarrow (y + x)(y - x - 3) \leqslant 0$. Оно задаёт два вертикальных угла, границами которых являются прямые $y = x$ и $y = 2 - x$ (точки $(\pm 10;\ 0)$ лежат внутри этих углов). Второе неравенство может быть переписано в виде $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 \leqslant 9$. Оно задаёт круг с центром $G(-3;\ 3)$ радиуса 3. Пересечение этих двух множеств и есть искомое множество.

Фигура Φ составляет ровно половину круга радиуса 3, поэтому её площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 9\pi = \frac{9\pi}{2}$. Отметим точку E пересечения отрезка GT с окружностью. TE – это и есть кратчайшее расстояние от точки T до фигуры Φ. $TE = TG - GE = 3\sqrt{2} - 3$.

7. В треугольнике ABC проведена медиана BM; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причём $BP = 1$, $MP = 3$.

а) Найдите отрезок DE.

б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

Ответ. а) $DE = 6$; б) $R = 3\sqrt{65}$.

Решение. а) По свойству биссектрисы треугольника получаем $AD : DB = AM : MB$, $CE : EB = CM : MB$, а так как $AM = CM$, то отсюда следует, что $AD : DB = CE : EB$, поэтому $AC \parallel DE$. Но тогда $\angle PDM = \angle AMD = \angle BMD$, значит, треугольник PDM – равнобедренный и $DP = MP = 3$. Аналогично получаем, что $EP = 3$ и тогда $DE = 6$.

б) Трапеция $ADEC$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая. Отрезок PM, соединяющий середины оснований трапеции, им перпендикулярен. Из подобия прямоугольных треугольников BPD и BMA находим, что $MA = PD \cdot \frac{MP}{MB} = 12$. Пусть EH – высота трапеции. Тогда $AH = AM + MH = AM + PE = 15$, $AE = \sqrt{AH^2 + HE^2} = 3\sqrt{26}$, $CH = CM - MH = 9$, $CE = \sqrt{CH^2 + HE^2} = 3\sqrt{10}$, $\sin \angle HCE = \frac{EH}{EC} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Данная окружность является описанной около треугольника ACE, поэтому её радиус R равен $\frac{AE}{2\sin\angle ACE} = 3\sqrt{65}$.