УДК 629.7.015.4.23

В. В. Чедрик, Аркар Пхио

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Применение методов критериев оптимальности и последовательного квадратичного программирования для решения задачи минимизации веса конструкции

Проведены численные исследования по оптимизации конструкций с использованием одного из наиболее развитых алгоритмов последовательного квадратичного программирования. Разработано программное обеспечение оптимизации конструкций, включающего различные типы функциональных ограничений и проектных параметров. Показано, что метод последовательного квадратичного программирования может быть эффективно использован в задачах многодисциплинарного проектирования при наличии достаточно большого количества проектных параметров.

Ключевые слова: Оптимизация конструкции, последовательное квадратичное программирование, критерии оптимальности, крыло, метод конечных элементов.

V. V. Chedrik, Arkar Phyo

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Application of methods of optimality criteria and sequential quadratic programming to the solution of the problem of minimizing the construction weight

Numerical studies are carried out to optimize designs using one of the most advanced sequential quadratic programming algorithms. Software for structural design is developed, including various types of functional constraints and design parameters. It is shown that the method of sequential quadratic programming can be efficiently used in multidisciplinary design problems in the presence of a sufficiently large number of design parameters.

Key words: Structural optimization, sequential quadratic programming, optimality criteria, wing, finite element method.

1. Введение

Задача оптимизации конструкции включает большое количество нелинейных функциональных ограничений из различных технических дисциплин. Решение её осуществляется с использованием либо методов математического программирования (МП), либо при помощи методов критериев оптимальности (КО). Идея методов КО состоит в том, что необходимо получить рекуррентную зависимость для пересчёта проектных параметров. Такая зависимость получается из условия минимума функции Лагранжа и наряду с проектными параметрами включает неизвестные множители Лагранжа. Основная трудность методов КО состоит, собственно, в определении множителей Лагранжа при наличии многих ограничений. Алгоритмы критериев оптимальности разработаны для многих типов ограничений (ограничения на напряжения, перемещения, критическую силу потери устойчивости и т.д.). Методы математического программирования являются более общими и основаны на решении уравнений, вытекающих из условий Куна–Такера. В задачах проектирования наиболее широкое применение нашли методы, основанные на вычислении градиентов целевой функции и функций ограничений. Стоит выделить работы, основанные на методах проекции градиента, возможных направлений, последовательного линейного программирования, приведённого градиента, последовательной безусловной минимизации и др. Наиболее предпочтительные алгоритмы оптимизации конструкции в последнее время построены с использованием методов последовательного квадратичного программирования (ПКП) [2]. Большинство из них обладает глобальной сходимостью, позволяет использовать стратегию активного набора ограничений и при этом имеют сверхлинейную сходимость. Скорость сходимости алгоритма имеет большое значение в практических задачах проектирования. Метод, который быстро сходится к решению, близкому к оптимальному, обычно предпочтителен по сравнению с методом, который сходится к точному оптимуму, но медленно.

В данной работе были проведены численные исследования по оптимизации конструкций с использованием одного из наиболее развитых алгоритмов последовательного квадратичного программирования, разработанного немецким математиком Клаусом Шиттковским [2].

2. Постановка задачи

Задача проектирования силовой конструкции формулируется в виде стандартной задачи нелинейного программирования:

минимизировать

$$f(x) \tag{1}$$

при ограничениях

$$g_j(x) \leq 0, \qquad j = 1, ..., m, \tag{2}$$

$$x_{il} \leq x_i \leq x_{iu}, \qquad i = 1, ..., n. \tag{3}$$

Вектор проектных параметров x проектирования конструкций чаще всего представляет собой поперечные размеры конечных элементов. В данной работе также в качестве проектных параметров рассматриваются координаты некоторых узлов конечно-элементной сетки. Величины x_{il} и x_{iu} в ограничениях (3) являются соответственно нижней и верхней границами изменения проектных параметров, n – количество проектных параметров. Целевая функция $f(x)$ – масса конструкции, является линейной функцией от проектных параметров, когда в качестве таковых рассматриваются только поперечные размеры элементов, и нелинейной функцией при включении геометрических параметров. Под ограничениями (2) рассматриваются m ограничений на напряжения в конечных элементах и перемещение узловых точек. Отметим, что они являются сильно нелинейными и неявными функциями от проектных параметров. Для вычисления ограничений для заданного вектора проектных параметров x необходимо провести полный конечно-элементный расчёт конструкции.

3. Оптимизация на основе методов критериев оптимальности и последовательного квадратичного программирования

Для задачи условной минимизации (1) – (3) можно записать функцию Лагранжа:

$$L(x, \Lambda, \lambda_l, \lambda_u) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \Lambda_j g_j(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{il}(x_{il} - x_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{iu}(x_i - x_{iu}). \tag{4}$$

Необходимые условия локального минимума задачи нелинейного программирования получим, применяя теорему Каруша–Куна–Таккера:

$$\frac{\delta L}{\delta_{x_i}} = 0, \qquad i = 1, ..., n. \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{rl} \Lambda_j g_j(x) = 0, & j = 1, ..., m \\ \lambda_{il}(x_{il} - x_i) = 0, & i = 1, ..., n \\ \lambda_{iu}(x_i - x_{iu}) = 0, & i = 1, ..., n \\ \lambda_{il} \geq 0, \quad \lambda_{iu} \geq 0, \quad \Lambda_j \geq 0, & i = 1, ..., n, \quad j = 1, .., m \end{array}\right\}. \tag{6}$$

Для решения системы уравнений (5) – (6) применяются либо методы КО, либо методы МП, в частности, метод последовательного квадратичного программирования. Чтобы понять теоретические основы этих двух подходов, рассмотрим более простую задачу минимизации $f(x)$ при наличии только ограничений-равенств: $g_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots, p$. Такая задача получается путём удерживания одних лишь p-активных ограничений, что является естественным путём снижения стоимости вычислений. Также предположим, что конструктивные ограничения (3) не являются активными. Тогда с учётом того, что множители λ_{il} и λ_{iu} равны нулю, функцию Лагранжа (4) можно записать в виде

$$L(x, \Lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} \Lambda_j g_j(x). \tag{7}$$

Условия стационарности целевой функции с ограничениями-равенствами запишутся следующим образом:

$$\frac{\delta L}{\delta x_i} = \frac{\delta f(x)}{\delta x_i} + \sum_{j=1}^{p} \Lambda_j \frac{\delta g_j(x)}{\delta x_i}, \qquad i = 1, ..., n, \tag{8}$$

$$\frac{\delta L}{\delta \Lambda_j} = g(x), \qquad j = 1, ..., p. \tag{9}$$

Система уравнений (8) – (9) включает $(n+p)$ нелинейных уравнений с $(n+p)$ неизвестными переменными x и Λ. Решение этой системы может быть получено с использованием как методов КО, так и метода ПКП. Из выражения (8) можно записать критерий оптимальности:

$$\sum_j \Lambda_j E_{ij} = 1, \qquad i = 1, ..., n, \tag{10}$$

где
$$E_{ij} = -\frac{\delta g_j}{\delta x_i} . \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^{-1}.$$

Стоит отметить, что в случае рассмотрения ограничений только на перемещения конструкции, величина E_{ij} представляет собой отношение плотности виртуальной энергии деформации к плотности материала элементов. Метод оптимизации конструкции, основанный на критерии оптимальности (10), представлен в работах [3, 4]. Для учета ограничений по напряжениям в большинстве практических крупномасштабных задач оптимизации применяется алгоритм равнонапряженности, который при многих случаях нагружения может быть представлен в виде рекуррентной формулы для пересчета проектных параметров:

$$x_i^{k+1} = \max\left[x_i^k \frac{\max_m |\sigma_{im}^k|}{\overline{\sigma}_i}, x_{il}\right],$$

где σ_{im} – напряжение в i-м элементе для m-го случая нагружения, $\overline{\sigma_i}$ – допускаемое напряжение в i-м элементе, k – номер итерации. Отметим, что основным достоинством методов критериев оптимальности является то, что они связаны с физической сущностью работы силовой конструкции. Так, например, при действии одного случая нагружения в оптимальной ферменной конструкции, спроектированной с учетом только ограничений по напряжениям, напряжение в каждом из стержней достигает максимально-допустимой величины. Получаемые алгоритмы при этом подходе основаны на простых рекуррентных зависимостях и являются очень эффективными при решении задач оптимизации. В настоящее время наиболее эффективные алгоритмы построены на основе метода последовательного квадратичного программирования. Метод основывается на последовательной квадратичной аппроксимации исходной задачи (1) – (3) и решении подзадач квадратичного программирования. Подзадачи создаются с использованием квадратичной аппроксимации функции Лагранжа (7) и линеаризации ограничений (2). Подзадача квадратичного программирования может быть сформулирована следующим образом:

найти $\quad \min \frac{1}{2} d^T B_k d + \nabla f^T(x_k) d$

при ограничениях:

$$\nabla g_j^T(x_k) d + g_j(x_k) \leq 0, \qquad j = 1, ..., m_k,$$

$$x_l - x_k \leq d \leq x_u - x_k,$$

где B_k – положительно определенная аппроксимация матрицы Гесса, x_k – значения проектных параметров на текущей итерации, $d = d_k$ – вектор спуска, решение k-й подзадачи (итерации), m_k – количество активных ограничений.

Для нахождения новой точки x_{k+1} используется линейный поиск вдоль вектора спуска d_k в соответствии с соотношением: $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, где α_k – размер шага. Размер шага выбирается так, чтобы функция спуска имела меньшее значение в новой точке. В качестве функции спуска используется «расширенная функция Лагранжа».

4. Результаты расчётов

В рамках системы многодисциплинарного проектирования АРГОН [5] проведены сравнительные исследования по оптимизации конструкций фермы и конструкции крыла с использованием как методов критериев оптимальности, так и метода последовательного квадратичного программирования.

Десятистержневая ферма

Рассматривался известный в иностранной литературе пример десятистержневой консольной фермы. Эта конструкция является одной из тестовых для проверки эффективности различных оптимизационных программ. Данные о её геометрических размерах приведены на рис. 1. Исходные данные и результаты расчётов даны, для удобства сравнения с известными решениями, в американской системе единиц (1 фунт = 4.448 Н, 1 дюйм = 0.0254 м). Целью исследований данной конструкции было сравнение результатов оптимизации по алгоритму ПКП с уже известными результатами, полученными при помощи других методов оптимизации, в частности методов КО. Также оценивалась эффективность исследуемого метода при решении данной оптимизационной задачи. В качестве ограничений в данном случае рассматривались ограничения на напряжения во всех элементах, ограничения на перемещение отдельных узлов и конструктивные ограничения на толщину стержней. Ограничения на напряжения во всех стержнях принимались равными 25 000 фунт/дюйм^2. Предельное перемещение свободных узлов 1 и 2 в вертикальном направлении задавалось равным ± 2.0 дюйма. Для всех стержней было наложено конструктивное ограничение: на минимальную площадь поперечного сечения

– 0.1 дюйм^2. Рассматривался случай нагружения, в котором в узлах 2 и 4 приложена вертикальная сила (в отрицательном направлении оси Y) $P = 100\,000$ фунтов.

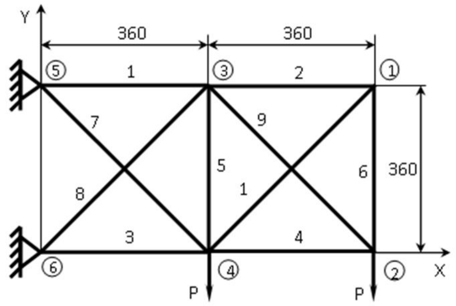

Рис. 1. Десятистержневая ферма

Площади стержней и оптимальная масса конструкции, полученные с помощью метода ПКП, представлены в табл. 1. Для сравнения там же приведены результаты расчётов по некоторым известным оптимизационным алгоритмам, представленным в работах [4, 6–9]. Заметим, что при расчётах по алгоритму [6], кроме двух ограничений на перемещения рассматривалось ограничение на напряжение в стержне 5 как линейная комбинация перемещений узлов 3 и 4, а другие девять проектных параметров для учёта ограничений по напряжениям определялись по алгоритму ПНК. Это значительно улучшило эффективность этого метода в отличие от случая, когда напряжение в стержне 5 также обрабатывалось бы по методу ПНК. Сравнение результатов свидетельствует о том, что в случае метода ПКП получается проект с наименьшей минимальной массой, равной 5060.9 фунтов, что незначительно (на 0.015 меньше, чем в лучшем из остальных методов). Это демонстрирует его надежность при решении данной оптимизационной задачи по сравнению с другими представленными методами. Активным является только одно ограничение на напряжение (в 5-м стержне).

Т а б л и ц а 1

Результаты расчётов, дюйм^2

№	**Методы оптимизации**					
	ПКП	**[6]**	**[4]**	**[7]**	**[8]**	**[9]**
1	30.493	30.738	31.008	30.980	30.731	33.432
2	0.1	0.1	0.104	0.1	0.1	0.1
3	23.197	23.224	24.361	24.169	23.934	24.260
4	15.243	14.998	14.724	14.805	14.733	14.260
5	0.1	0.1	0.151	0.1	0.1	0.1
6	0.548	0.497	0.456	0.406	0.1	0.1
7	7.454	7.508	7.9795	7.547	8.542	8.388
8	21.022	21.347	21.029	21.046	20.954	20.740
9	21.557	21.211	20.823	20.937	21.836	19.690
10	0.1003	0.1	0.104	0.1	0.1	0.1
масса	**5060.9**	**5061.6**	**5091.3**	**5067.0**	**5076.7**	**5089.0**

Площади поперечного сечения стержней 2, 5, 10 имеют минимальные значения. В этом проявляется сходство алгоритма ПКП с алгоритмами работ [6–7]. Алгоритмы, описанные в работах [8–9], приводят к конструкции с четырьмя активными конструктивными ограничениями. В данном случае минимальная площадь поперечного сечения реализуется также в стержне 6. Из представленных алгоритмов выделяется алгоритм работы [4], основанный на методах КО. Здесь ни один стержень не достиг минимальной толщины. Это связано с тем, что в данной задаче оптимизации имеются противоречивые ограничения по прочности и жесткости. Необходимо отметить, что такой алгоритм является весьма эффективным при решении крупномасштабным задач оптимизации.

Модель кессона стреловидного крыла

Рассматриваемая модель конструкции крыла малого удлинения часто использовалась для проведения тестовых оптимизационных расчетов в иностранной литературе. Модель имеет 72 конечных элемента и 30 узлов. Относительное удлинение крыла равно 1.81, а сужение 0.22. В данной работе все двухмерные элементы моделировались мембранными изопараметрическими элементами, а пояса лонжеронов и стойки нервюр представлялись линейными стержневыми элементами. Исходные данные о геометрии и условиях нагружения этой конструкции представлены в работе [10]. Масса конструкции минимизировалась только при ограничениях на напряжения во всех элементах. Таким образом, рассматривалось 144 функциональных ограничения (по 72 для каждого из двух случаев нагружения). Осуществлялось объединение конечных элементов в проектные параметры. Каждый элемент верхней обшивки и верхней полки лонжерона объединялись с соответствующим нижним элементом обшивки и нижней полкой лонжерона. Все вертикальные стержни (стойки нервюр) представлялись единственной проектной переменной. Задача включала 41 проектный параметр.

Сначала была проведена оптимизация конструкции с использованием алгоритма ПНК. Несмотря на то, что в этом алгоритме не вычисляются градиенты напряжений, он приводит к проекту с минимальной массой, равной 80.41 фунта. С использованием этого алгоритма происходит быстрое снижение массы на первых же итерациях, а далее ему требуется достаточно много пересчетов для полного выравнивания напряжений с заданной погрешностью 0.0001. Задача оптимизации также решалась с применением модифицированного метода Пшеничного. Здесь вычисления градиентов производились на основе аналитических зависимостей, полученных из теории метода конечных элементов. Этот метод привел к конструкции с массой 80.55 фунта за 45 итераций. При этом система активных ограничений в оптимальной конструкции отличается от полученной при расчёте по алгоритму ПНК. Более эффективным оказался алгоритм, основанный на методе ПКП. Полученная оптимальная конструкция была близка к полнонапряженному проекту, минимальная масса равнялась 80.41 фунта. Для вычисления градиентов использовался конечно-разностный подход, что требовало большего количества таких трудоемких вычислений, как конечно-элементный расчет конструкции.

Рассмотренный алгоритм последовательного квадратичного программирования обладает робастностью и позволяет решать наиболее общие задачи оптимизации конструкций. Более того, алгоритм ПКП приводит к более точным оптимальным решениям при наличии многих случаев нагружения. Он может быть использован в виде «чёрного ящика» при создании программ оптимизации конструкций. Увеличение количества проектных параметров не оказывает сильного влияния на эффективность метода ПКП.

Литература

1. *Липин Е.К., Чедрик В.В.* Применение критериев оптимальности для решения задачи оптимизации конструкции при ограничениях на напряжения и перемещения // Учёные записки ЦАГИ. 1989. Т. XX, № 4. С. 73–83.

2. *Евсеев Д.Д., Липин Е.К., Чедрик В.В.* [*и др.*]. Комплекс программ аэропрочностного проектирования самолета АРГОН // Ученые записки ЦАГИ. 1991. Т. XXII, № 5. С. 73–83.

3. *Чедрик В.В.* Оптимизация конструкций с использованием теории двойственности в нелинейном программировании // Труды ЦАГИ. 1998. Вып. 2632. С. 62–66.

4. *Khot N.S.* Algorithms Based on Optimality Criteria to Design Minimum Weight Structures // Engineering Optimization. 1981. V. 5, P. 73–90.

5. *Schittkowski K.* NLPQL: A Fortran Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems // Annals of Operations Research. 1986. V. 5. P. 485–500.

6. *Fleury C.* An Efficient Optimality Criteria Approach to the Minimum Weight Design of Elastic Structures // Computers & Structures. 1980. V. 11. P. 163–173.

7. *Khan M.R., Willmert K.D., Thornton W.A.* An optimality criterion method for large-scale structures // AIAA Journal. 1979. V. 17, N 7. P. 653–661.

8. *Rizzi P.* Optimization of multiconstrained structures based on optimality criteria // AIAA/ASME/SAE 17-th structures, structural dynamics and material conference. 1976.

9. *Schmit L.A., Farshi B.* Some approximation concepts for structural synthesis AIAA Journal. 1974. V. 12. P. 692–699.

10. *Canfield R.A., Gradhi R.V., Venkayya V.B.* Optimum Design of Structures with Multiple Constraints // AIAA Journal. 1988. V. 26. P. 78–85.

References

1. *Lipin Ye.K., Chedrik V.V.* Application of optimality criteria for solution of the optimization problem at stress and displacements constraints. Uchenyye Zapiski TsAGI. 1989. V. XX, N 4. P. 73–83.

2. *Yevseev D.D., Lipin Ye.K., Chedrik V.V.* [*et al.*]. Software package ARGON for aerostructural aircraft design. Uchenyye Zapiski TsAGI. 1991. V. XXII, N 5. P. 89–101.

3. *Chedrik V.V.* Structural optimization with using duality theory in nonlinear programming. Trudy TsAGI. 1998. N 2632. P. 62–66.

4. *Khot N.S.* Algorithms Based on Optimality Criteria to Design Minimum Weight Structures. Engineering Optimization. 1981. V. 5, P. 73–90.

5. *Schittkowski K.* NLPQL: A Fortran Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems. Annals of Operations Research. 1986. V. 5. P. 485–500.

6. *Fleury C.* An Efficient Optimality Criteria Approach to the Minimum Weight Design of Elastic Structures. Computers & Structures. 1980. V. 11. P. 163–173.

7. *Khan M.R., Willmert K.D., Thornton W.A.* An optimality criterion method for large-scale structures. AIAA Journal. 1979. V. 17, N 7. P. 653–661.

8. *Rizzi P.* Optimization of multiconstrained structures based on optimality criteria. AIAA/ASME/SAE 17-th structures, structural dynamics and material conference. 1976.

9. *Schmit L.A., Farshi B.* Some approximation concepts for structural synthesis. AIAA Journal. 1974. V. 12. P. 692–699.

10. *Canfield R.A., Gradhi R.V., Venkayya V.B.* Optimum Design of Structures with Multiple Constraints. AIAA Journal. 1988. V. 26. P. 78–85.

Поступила в редакцию 19.04.2018