УДК 629.7.05

Н. Е. Зубов[1], *Е. А. Микрин*[1,2], *С. С. Негодяев*[2,3], *В. Н. Рябченко*[2,4], *А. В. Богачев*[1,2], *Е. А. Воробьева*[1]

[1]Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С. П. Королева
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[3]Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д. И. Менделеева
[4]ОАО «Федеральная сетевая компания Единой энергетической системы»

Синтез трехканальной системы разгрузки кинетического момента инерционных исполнительных органов космического аппарата для круговых орбит

Рассматривается задача гравитационной разгрузки кинетического момента инерционных исполнительных органов космического аппарата во всех трех каналах управления для круговых орбит с использованием метода точного размещения полюсов. Синтезированы в аналитическом виде законы управления гравитационной разгрузки, однозначно определяемые параметрами объекта и задаваемыми корнями характеристического уравнения.

Ключевые слова: инерционные исполнительные органы, разгрузка кинетического момента, обратная связь по состоянию, замкнутая система, метод точного размещения полюсов, ортогональный делитель нуля.

Введение

В работе [1] рассмотрена проблема разгрузки кинетического момента инерционных исполнительных органов КА в канале тангажа. Следует заметить, что из-за автономности данного канала управления относительно двух других существенно упрощается поиск решения задачи, которая значительно усложняется для гироскопически связанных каналов крен–рысканье. Главное усложнение заключается в том, что для канала тангажа система управления относится к классу SIMO-систем, тогда как каналы крен–рысканье к MIMO-системам. Предложенные в работах [1, 2, 3] методы синтеза модального управления КА, основанные на ленточной теории [1], обобщенной формулы Аккермана [2] и метода точного размещения полюсов [3] принципиально способны получить аналитическое решение задачи разгрузки кинетического момента для круговых орбит в каналах крен-рысканье с использованием гравитационного момента. Исследования, проведенные авторами в этом направлении, показали, что наиболее предпочтительным в смысле компактности аналитического решения является метод точного размещения полюсов.

В предлагаемой работе с применением указанного метода, модифицированного с учетом результатов работ [4, 5], для круговых орбит получено решение задачи гравитационной разгрузки кинетического момента инерционных исполнительных органов КА во всех трех каналах управления.

1. Математическая модель КА

Будем рассматривать разгрузку инерционных исполнительных органов (ИИО) без расхода рабочего тела. Для этой цели используется гравитационный момент [6].

Линеаризованные уравнения для круговых орбит около углового положения $(0, 0, 0)$ вращательного движения КА при наличии в каждом канале управления ИИО с учетом гравитационного момента в соответствии с [6, 7] имеют вид

$$\begin{aligned}
&J_x\ddot{\gamma} + 4\left(J_z - J_y\right)\omega_0^2\gamma + \left(J_x + J_y - J_z\right)\omega_0\dot{\psi} = -h_y\omega_0 - \dot{h}_x,\\
&J_y\ddot{\psi} - \left(J_x + J_y - J_z\right)\omega_0\dot{\gamma} + \left(J_z - J_x\right)\omega_0^2\psi = h_x\omega_0 - \dot{h}_y,\\
&J_z\ddot{\theta} - 3\left(J_y - J_x\right)\omega_0^2\theta = -\dot{h},
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где J_x, J_y, J_z — главные центральные моменты инерции КА; h_x, h_y, h_z — проекции кинетического момента ИИО на оси связанного базиса; ω_0 — орбитальная угловая скорость движения КА ($\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega_0 \end{bmatrix}^T$); γ, ψ, θ — углы отклонения связанного базиса по крену вокруг местной вертикали и от местной вертикали по рысканью и тангажу.

Применяя теорему об изменении кинетического момента отдельно к корпусу КА и отдельно к ИИО на основании системы (1), имеем

$$\begin{aligned} &J_x\ddot{\gamma} + 4\left(J_z - J_y\right)\omega_0^2\gamma + \left(J_x + J_y - J_z\right)\omega_0\dot{\psi} = -u_x,\\ &J_y\ddot{\psi} - \left(J_x + J_y - J_z\right)\omega_0\dot{\gamma} + \left(J_z - J_x\right)\omega_0^2\psi = -u_y,\\ &\dot{h}_x + h_y\omega_0 = u_x,\\ &\dot{h}_y - h_x\omega_0 = u_y,\\ &J_z\ddot{\theta} - 3\left(J_y - J_x\right)\omega_0^2\theta = -u_z,\\ &\dot{h}_z = u_z. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь u_x, u_y, u_z — моменты реакции в подшипниках маховиков, через которые осуществляется как управляющее воздействие на корпус КА с целью поддержания его ориентации, так и одновременное регулирование (в нашем случае) разгрузка накопленного кинетического момента ИИО). Определим вектор состояния КА следующей матрицей-столбцом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \end{array}\right]^T = \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} \gamma & \dot{\gamma} & \psi & \dot{\psi} & h_x & h_y & \int\limits_0^t h_x dt & \int\limits_0^t h_y dt & \theta & \dot{\theta} & h_z & \int\limits_0^t h_z dt \end{array}\right]^T. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Тогда система (1.2) с учетом (1.3) в векторно-матричном виде запишется так:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{1.4}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{99} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{J_x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{J_y} & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{J_z}\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

и

$$a_{21} = \frac{J_y - J_z}{J_x}4\omega_0^2, \quad a_{24} = \frac{J_x + J_y - J_z}{J_x}\omega_0,$$

$$a_{42} = -\frac{J_x + J_y - J_z}{J_y}\omega_0, \quad a_{43} = \frac{J_x - J_z}{J_y}\omega_0^2, \quad a_{99} = \frac{J_x - J_y}{J_z}\omega_0^2.$$

2. Алгоритм точного размещения полюсов

Задана линейная многомерная динамическая модель КА (1.4), в которой $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{12}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел. Матрица $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{12\times3}$ имеет полный ранг по столбцам (входные сигналы линейно независимы), а матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{12\times12}$ заведомо неустойчива, т.е. множество ее собственных значений (спектр)

$$\mathrm{eig}\,(\mathbf{A}) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} : \ \det(\lambda\mathbf{I}_{12} - \mathbf{A}) = 0\},$$

являющееся одновременно множеством корней (полюсов) характеристического полинома,

$$\mathrm{eig}\,(\mathbf{A}) = \mathrm{roots}(\det(\lambda\mathbf{I}_{12} - \mathbf{A}),$$

где $\mathbf{I}_{12}$ — единичная матрица размера 12×12, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел (комплексная плоскость), обязательно включает такие $\lambda_i \in \mathbb{C}$, что $\mathrm{Re}\,(\lambda_\mathrm{i}) > 0$.

Система (1.4) полностью управляемая, т.е. выполняются эквивалентные условия [3]:

$$\mathrm{rank}\left(\ \mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^9\mathbf{B}\ \right) = 12, \tag{2.1}$$

$$\forall\lambda_i \in \mathrm{eig}\,(\mathbf{A}) : \quad \mathrm{rank}\left(\ \mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}_{12} \mid \mathbf{B}\ \right) = 12. \tag{2.2}$$

Требуется найти закон управления с обратной связью

$$\mathbf{u} = -\mathbf{Kx}, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{3\times12}$ — матрица регулятора по состоянию, чтобы все элементы множества

$$\mathrm{eig}\,(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = \mathrm{roots}\,(\det(\lambda\mathbf{I}_{12} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}))$$

лежали в открытой левой полуплоскости $\mathbb{C}$, т.е. $\mathrm{Re}\,(\lambda_\mathrm{i}) < 0$. В отличие от [3] введем модифицированную многоуровневую декомпозицию системы (1.4) следующего вида (для простоты продолжая считать, что все матрицы $\mathbf{B}_i$ имеют полный ранг по столбцам):

нулевой уровень

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}, \tag{2.4}$$

первый уровень

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0^{\perp}\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0^{\perp-}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0^{\perp}\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0, \tag{2.5}$$

второй уровень

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_1^{\perp}\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1^{\perp-}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1^{\perp}\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1, \tag{2.6}$$

третий (конечный) уровень

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{B}_2^{\perp}\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2^{\perp-}, \quad \mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_2^{\perp}\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{B}_i^{\perp-}$ — 2-полуобратная матрица для $\mathbf{B}_i^{\perp}$ [4, 5], т.е. матрица, удовлетворяющая условиям регулярности

$$\mathbf{B}_i^{\perp}\mathbf{B}_i^{\perp-}\mathbf{B}_i^{\perp} = \mathbf{B}_i^{\perp}, \mathbf{B}_i^{\perp-}\mathbf{B}_i^{\perp}\mathbf{B}_i^{\perp-} = \mathbf{B}_i^{\perp-}. \tag{2.8}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть система* (1.4) *полностью управляемая и выполнена многоуровневая декомпозиция* (2.4) – (2.7), *где все матрицы* $\mathbf{B}_i^{\perp-}$ *удовлетворяют условиям регулярности* (2.8), *а матрица* $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ *удовлетворяет формулам*

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 = \mathbf{B}_0^{-}\mathbf{A} - \Phi_0\mathbf{B}_0^{-}, \quad \mathbf{B}_0^{-} = \mathbf{K}_1\mathbf{B}_0^{\perp} + \mathbf{B}_0^{+}, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{B}_1^- \mathbf{A}_1 - \Phi_1 \mathbf{B}_1^-, \quad \mathbf{B}_1^- = \mathbf{K}_2 \mathbf{B}_1^\perp + \mathbf{B}_1^+, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{B}_2^- \mathbf{A}_2 - \Phi_2 \mathbf{B}_2^-, \quad \mathbf{B}_2^- = \mathbf{K}_3 \mathbf{B}_2^\perp + \mathbf{B}_2^+, \tag{2.11}$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{B}_3^- \mathbf{A}_3 - \Phi_3 \mathbf{B}_3^-, \tag{2.12}$$

тогда выполняется тождество

$$\mathrm{eig}\,(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = \bigcup_{i=1}^{4} \mathrm{eig}(\Phi_{i-1}). \tag{2.13}$$

Поскольку в нашем случае выполняется условие симметричности

$$\left(\mathbf{B}_i^{\perp-} \mathbf{B}_i^\perp\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}_i^{\perp-} \mathbf{B}_i^\perp, \left(\mathbf{B}_i^\perp \mathbf{B}_i^{\perp-}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}_i^\perp \mathbf{B}_i^{\perp-},$$

тогда имеем

$$\mathbf{B}_i^{\perp-} = \mathbf{B}_i^{\perp+}, \tag{2.14}$$

где $\mathbf{B}_i^{\perp+}$ — псевдообратная матрица для $\mathbf{B}_i^\perp$.

Согласно многоуровневой декомпозиции для MIMO-системы (1.4) с матрицами (1.5) вычислим делитель нуля и псевдообратную матрицу для нулевого уровня. Имеем

$$\mathbf{B}_0^\perp = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_x & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_y & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_0^+ = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{J_x}{(J_x^2+1)} & 0 & 0 & 1-\frac{1}{(J_x^2+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{J_y}{(J_y^2+1)} & 0 & 1-\frac{1}{(J_y^2+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{J_z}{(J_z^2+1)} & 1-\frac{1}{(J_z^2+1)} & 0 \end{bmatrix}.$$

Для рассмотрения первого уровня декомпозиции найдем псевдообратную матрицу для делителя нуля $\mathbf{B}_0^\perp$, которая в данном случае запишется так:

$$\mathbf{B}_0^{\perp+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_x}{(J_x^2+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_y}{(J_y^2+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(J_x^2+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(J_y^2+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_z}{(J_z^2+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(J_z^2+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрицы первого уровня декомпозиции будут выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0^{\perp}\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0^{\perp+} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{J_x}{(J_x^2+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_y}{(J_y^2+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_x a_{21} & 0 & 0 & \frac{\omega_0 + J_x J_y a_{24}}{(J_y^2+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_x a_{43} & -\frac{\omega_0 - J_x J_y a_{42}}{(J_x^2+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(J_x^2+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(J_y^2+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_z}{(J_z^2+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_z a_{99} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(J_z^2+1)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0^{\perp}\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & \omega_0 - \frac{J_x a_{24}}{J_y} & 0 \\ -\omega_0 - \frac{J_y a_{42}}{J_x} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{J_z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее, действуя аналогичным образом, выполним многоуровневую декомпозицию системы (1.4) по формулам (2.5) – (2.7).

Зададим матрицы $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_0$, $\mathbf{\Phi}_1$, $\mathbf{\Phi}_2$, $\mathbf{\Phi}_3$, фигурирующие в методе задания полюсов, в следующем диагональном виде:

$$\mathbf{\Phi}_0 = \begin{bmatrix} f_{01} & 0 & 0 \\ 0 & f_{02} & 0 \\ 0 & 0 & f_{03} \end{bmatrix}, \mathbf{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & 0 \\ 0 & f_{12} & 0 \\ 0 & 0 & f_{13} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} f_{21} & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{23} \end{bmatrix}, \mathbf{\Phi}_3 = \begin{bmatrix} f_{31} & 0 & 0 \\ 0 & f_{32} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix}.$$

Здесь (f_{01}, f_{11}; f_{21}, f_{31}; f_{02}, f_{12}; f_{22}, f_{32}; f_{03}, f_{13}; f_{23}, f_{33}) — в общем случае комплексные числа, подчиненные определенным правилам их формирования [3].

Опуская промежуточные выкладки, основанные на использовании соотношений (2.10) – (2.12), в соответствии с (2.9) матрица коэффициентов решения задачи разгрузки кинетического момента ИИО имеет вид

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 = \mathbf{B}_0^{-}\mathbf{A}_0 - \mathbf{\Phi}_0\mathbf{B}_0^{-} =$$
$$= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & 0 & K_{28} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{39} & K_{310} & K_{311} & K_{312} \end{bmatrix}, \tag{2.15}$$

где

$$K_{11} = J_x[\frac{a_{21}(J_x(a_{21} + f_{11}f_{21} + f_{11}f_{31} + f_{21}f_{31}) + J_y a_{42}\omega_0)}{(J_x\omega_0^2 + J_y a_{42}\omega_0 + J_x a_{21})} +$$
$$+ \frac{f_{01}(J_x a_{21} a_{43}(f_{11} + f_{21} + f_{31}) + (J_x a_{43} + J_x a_{24} a_{42} - J_y a_{42}\omega_0) f_{11} f_{21} f_{31})}{a_{43}(J_x\omega_0^2 + J_y a_{42}\omega_0 + J_x a_{21})}], \tag{2.16}$$

$$K_{12} = -J_x \left[\frac{(J_x a_{21} + J_y a_{42}\omega_0)(f_{01} + f_{11} + f_{21} + f_{31})}{(J_x \omega_0^2 + J_y a_{42}\omega_0 + J_x a_{21})} + \right.$$
$$\left. + \frac{J_x(f_{01}f_{11}f_{21} + f_{01}f_{11}f_{31} + f_{01}f_{21}f_{31} + f_{11}f_{21}f_{31})}{(J_x \omega_0^2 + J_y a_{42}\omega_0 + J_x a_{21})} \right], \tag{2.17}$$

$$K_{13} = J_x[f_{01} \frac{(J_x a_{24} - J_y \omega_0)(f_{11}f_{21} + f_{11}f_{31} + f_{21}f_{31}) - J_y\omega_0 a_{43}}{(J_x \omega_0^2 + J_y a_{42}\omega_0 + J_x a_{21})} -$$
$$- \frac{J_y\omega_0(a_{43}(f_{11} + f_{21} + f_{31}) + f_{11}f_{21}f_{31}) - J_x a_{24} f_{11}f_{21}f_{31}}{a_{43}(J_x \omega_0^2 + J_y a_{42}\omega_0 + J_x a_{21})}], \tag{2.17}$$

$$K_{14} = J_x[\frac{J_x a_{24}(a_{21}a_{43} - f_{01}f_{11}f_{21}f_{31})}{a_{43}(J_x \omega_0^2 + J_y a_{42}\omega_0 + J_x a_{21})} +$$
$$+ \frac{J_y\omega_0(a_{43}(a_{43} + a_{24}a_{42} + f_{01}f_{11} + f_{01}f_{21} + f_{01}f_{31} + f_{11}f_{21} + f_{11}f_{31} + f_{21}f_{31}) + f_{01}f_{11}f_{21}f_{31})}{a_{43}(J_x \omega_0^2 + J_y a_{42}\omega_0 + J_x a_{21})}], \tag{2.18}$$

$$K_{15} = J_x[\frac{\omega_0^2(f_{01} + f_{11} + f_{21} + f_{31}) - (f_{01}f_{11}f_{21} + f_{01}f_{11}f_{31} + f_{01}f_{21}f_{31} + f_{11}f_{21}f_{31})}{(J_x \omega_0^2 + J_y a_{42}\omega_0 + J_x a_{21})}], \tag{2.19}$$

$$K_{16} = J_x J_y \omega_0[\frac{a_{43}(f_{11}f_{21} + f_{11}f_{31} + f_{21}f_{31} - \omega_0^2) + f_{01}(a_{43}(f_{11} + f_{21} + f_{31}) + f_{11}f_{21}f_{31})}{J_y a_{43}(J_x \omega_0^2 + J_y a_{42}\omega_0 + J_x a_{21})} -$$
$$- \frac{J_x a_{24} f_{01}f_{11}f_{21}f_{31}}{J_y a_{43}(J_x \omega_0^2 + J_y a_{42}\omega_0 + J_x a_{21})}], \tag{2.20}$$

$$K_{17} = J_x[\frac{f_{01}f_{11}f_{21}f_{31}(J_y \omega_0^2 - J_x a_{24}\omega_0 + J_y a_{43})}{J_y a_{43}(J_x \omega_0^2 + J_y a_{42}\omega_0 + J_x a_{21})}], \tag{2.22}$$

$$K_{21} = J_y[\frac{J_y a_{42} f_{12}f_{22}f_{32} + J_x\omega_0(a_{21}(f_{12} + f_{22} + f_{32}) + f_{12}f_{22}f_{32})}{J_y \omega_0^2 - J_x a_{24}\omega_0 + J_y a_{43}} +$$
$$+ f_{02} \frac{(J_y a_{42}(f_{12}f_{22} + f_{12}f_{32} + f_{22}f_{32}) + J_x\omega_0(a_{21} + f_{12}f_{22} + f_{12}f_{32} + f_{22}f_{32})}{J_y \omega_0^2 - J_x a_{24}\omega_0 + J_y a_{43}}], \tag{2.23}$$

$$K_{22} = J_y[\frac{J_y a_{42}(a_{21}a_{43} - f_{02}f_{12}f_{22}f_{32})}{a_{21}(J_y \omega_0^2 - J_x a_{24}\omega_0 + J_y a_{43})} -$$
$$- \frac{J_x\omega_0(a_{21}(a_{21} + a_{24}a_{42} + f_{02}f_{12} + f_{02}f_{22} + f_{02}f_{32} + f_{12}f_{22} + f_{12}f_{32} + f_{22}f_{32}) + f_{02}f_{12}f_{22}f_{32})}{a_{21}(J_y \omega_0^2 - J_x a_{24}\omega_0 + J_y a_{43})}], \tag{2.24}$$

$$K_{23} = J_y[\frac{a_{43}(J_y(a_{43} + f_{12}f_{22} + f_{12}f_{32} + f_{22}f_{32}) - J_x a_{24}\omega_0)}{(J_y \omega_0^2 - J_x a_{24}\omega_0 + J_y a_{43})} +$$
$$+ \frac{f_{02}(J_y a_{21}a_{43}(f_{12} + f_{22} + f_{32}) + (J_y a_{21} + J_y a_{24}a_{42} + J_x a_{24}\omega_0) f_{12}f_{22}f_{32})}{a_{21}(J_y \omega_0^2 - J_x a_{24}\omega_0 + J_y a_{43})}], \tag{2.25}$$

$$K_{24} = -J_y[\frac{J_y(a_{43}(f_{02} + f_{12} + f_{22} + f_{32}) + f_{02}f_{12}f_{22} + f_{02}f_{12}f_{32} + f_{02}f_{22}f_{32} + f_{12}f_{22}f_{32})}{J_y \omega_0^2 - J_x a_{24}\omega_0 + J_y a_{43}} -$$
$$- \frac{J_x a_{24}\omega_0(f_{02} + f_{12} + f_{22} + f_{32})}{J_y \omega_0^2 - J_x a_{24}\omega_0 + J_y a_{43}}], \tag{2.26}$$

$$K_{25} = -J_y[\frac{J_x a_{21}\omega_0(f_{12}f_{22} + f_{12}f_{32} + f_{22}f_{32} - \omega_0^2)}{J_x a_{21}(J_y \omega_0^2 - J_x a_{24}\omega_0 + J_y a_{43})} +$$
$$+ \frac{f_{02}(J_y a_{24} f_{12}f_{22}f_{32} + J_x\omega_0(a_{21}(f_{12} + f_{22} + f_{32}) + f_{12}f_{22}f_{32})))}{J_x a_{21}(J_y \omega_0^2 - J_x a_{24}\omega_0 + J_y a_{43})}], \tag{2.27}$$

$$K_{26} = J_y[\frac{\omega_0^2(f_{02} + f_{12} + f_{22} + f_{32}) - (f_{02}f_{12}f_{22} + f_{02}f_{12}f_{32} + f_{02}f_{22}f_{32} + f_{12}f_{22}f_{32})}{(J_y \omega_0^2 - J_x a_{24}\omega_0 + J_y a_{43})}], \tag{2.28}$$

$$K_{28} = J_y[\frac{f_{02}f_{12}f_{22}f_{32}(J_x\omega_0^2 + J_y a_{42}\omega_0 + J_x a_{21})}{J_x a_{21}(J_y\omega_0^2 - J_x a_{24}\omega_0 + J_y a_{43})}], \tag{2.29}$$

$$K_{39} = J_z a_{99}(1 + \frac{f_{13}f_{23} + f_{13}f_{33} + f_{23}f_{33}}{a_{99}}) + J_z f_{03}(f_{13} + f_{23} + f_{13} + \frac{f_{13}f_{23}f_{33}}{a_{99}}), \tag{2.30}$$

$$K_{310} = -J_z(f_{03} + f_{13} + f_{23} + f_{13} + \frac{f_{03}f_{13}f_{23} + f_{03}f_{13}f_{33} + f_{03}f_{23}f_{33} + f_{13}f_{23}f_{33}}{a_{99}}), \tag{2.31}$$

$$K_{311} = -\frac{f_{03}(f_{13}f_{23} + f_{13}f_{33} + f_{23}f_{33}) + f_{13}f_{23}f_{33}}{a_{99}}, \tag{2.32}$$

$$K_{312} = \frac{f_{03}f_{13}f_{23}f_{33}}{a_{99}}. \tag{2.33}$$

Итак, выражения (2.15) – (2.33) определяют аналитическое решение задачи разгрузки кинетического момента ИИО во всех трех каналах управления. Они имеют относительно простой и «физичный» смысл и однозначно определяются параметрами орбиты, массо-инерционными характеристиками КА, а также значениями корней характеристического полинома:

$$\det(\lambda \mathbf{I}_{12} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = \left(\lambda - \tilde{\lambda}_1\right) \cdots \left(\lambda - \tilde{\lambda}_{12}\right) = \prod_{i=1}^{12}\left(\lambda - \tilde{\lambda}_i\right),$$

в качестве которых, аналогично, как это было предложено в [3], могут быть использованы корни нормированного полинома Баттерворта 12-го порядка.

Соответственно регулятор с матрицей обратной связи (2.15) естественным образом распадается на два независимых регулятора: регулятор в каналах крен–рыскание

$$\mathbf{K}_{\gamma-\psi} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & 0 & K_{28} \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

и регулятор в канале тангажа

$$\mathbf{K}_{\vartheta} = \begin{bmatrix} K_{39} & K_{310} & K_{311} & K_{312} \end{bmatrix}. \tag{2.35}$$

Следует заметить, что матрица коэффициентов усиления канала тангажа (2.35) с выражениями (2.30) – (2.33), если коэффициенты характеристического уравнения выразить через корни, совпадает с решением, приведенным в [1], что и естественно, поскольку иного быть не может, т.к. канал тангажа является автономным и принадлежит к классу SIMO-систем.

Преимущества данного аналитического решения заключаются в следующем. Во-первых, оно пригодно для всех типов КА, дает возможность проводить исследования, варьируя значения полюсов из области их устойчивости. Во-вторых, позволяет ликвидировать проблему плохой обусловленности матрицы А, поскольку для КА значения ее компонент a_{21}, a_{24}, a_{42}, a_{43}, a_{99} могут отличаться на два и более порядков друг от друга, что, как показали исследования авторов, затрудняет или даже делает практически невозможным получение решения с использованием не символьной, а числовой матрицы A . Кроме этого, наличие аналитических выражений коэффициентов обратной связи существенно уменьшает затраты вычислительных ресурсов бортовой вычислительной системы.

3. Заключение

В работе для круговых орбит в линеаризованной постановке с использованием метода точного размещения полюсов получено аналитическое решение задачи гравитационной разгрузки кинетического момента инерционных исполнительных органов КА во всех трех каналах управления и соответственно показаны преимущества этого решения, которое не требует настройки под определенный тип КА и может быть легко реализовано в бортовой ЭВМ.

Литература

1. *Богачев А.В., Воробьева Е.А., Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н., Тимаков С.Н.* Разгрузка кинетического момента инерционных исполнительных органов космического аппарата в канале тангажа // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2011. — Т. 3. — С. 125–132.
2. *Воробьева Е.А. , Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н., Тимаков С.Н.* Синтез стабилизирующего управления космическим аппаратом на основе обобщенной формулы Аккермана // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2011. — Т. 1. — С. 96–106.
3. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Синтез развязывающих законов стабилизации орбитальной ориентации космического аппарата // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2012. — Т. 1.
4. *Rao C.R., Mitra S.K.* Generalized inverse of matrices and its applications. — N.Y.: John Wiley and Sons, 1971.
5. *Ben-Israel A., Greville T.N.E.* Generalized Inverses: Theory and Applications. — Springer-Verlag. New York, Inc. 2003.
6. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н., Тимаков С.Н., Черемных Е.А.* Идентификация положения равновесной ориентации международной космической станции как задача матричного пополнения с устойчивостью// Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2012. — Т. 2.
7. *Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. — М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 30.03.2012