

УТВЕРЖДЕНО  
Проректор по учебной работе  
А. А. Воронов  
15 января 2021 года

## ПРОГРАММА

по дисциплине: **Основы современной физики**  
по направлению подготовки: **03.03.01 «Прикладные математика и физика»**  
физтех-школа: **ЛФИ(2-88X), ФАКТ (только г.Жуковский) и ФЭФМ**  
кафедра: **общей физики**  
курс: **3**  
семестр: **6**

Трудоёмкость:

теор. курс: вариативная часть – 4 зачет. ед.;

физ. практикум: вариативная часть – 2 зачет. ед.;

лекции – 30 часов Экзамен – 6 семестр

практические (семинарские)

занятия – 30 часов

Диф. зачёт – 6 семестр

лабораторные занятия – 30 часов

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 90 Самостоятельная работа –  
теор. курс – 90 часов  
физ. практикум – 60 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., доц. В.Н. Глазков

д.т.н., проф. А.В. Кубышкин

к.ф.-м.н., доц. К.М. Крымский

к.ф.-м.н., доц. А.О. Раевский

Программа принята на заседании кафедры  
общей физики 4 декабря 2020 г.

Заведующий кафедрой  
д.ф.-м.н., профессор

А. В. Максимычев

## Квантовая макрофизика

1. Кристаллические структуры твердых тел, трансляционная симметрия кристаллов, решетка Бравэ, элементарная и примитивная ячейки, базис. Рентгеновские и нейтронные методы исследования кристаллических структур, дифракция Брэгга–Вульфа, обратная решетка, зона Бриллюэна.
2. Типы связей в кристаллах: кулоновская (ионные кристаллы), ковалентная связь (атомные кристаллы), ван-дер-ваальсовская (молекулярные кристаллы), металлическая (металлы). Энергия отталкивания, потенциал Леннарда–Джонса. Дефекты кристаллической решетки.
3. Гармонические колебания одномерной решетки одинаковых атомов и решетки из чередующихся атомов двух сортов. Адиабатическое приближение. Законы дисперсии, квазиимпульс, акустические и оптические моды колебаний атомов в кристаллах. Переход к нормальным модам. Фононы как квазичастицы, аналогия с фотонами.
4. Возбужденные состояния кристалла. Решеточная теплоемкость. Закон Дюлонга и Пти. Дебаевское приближение для акустической ветви колебаний твердого тела, температура Дебая. Модель Эйнштейна для описания оптических ветвей колебаний твердого тела. Решеточная теплопроводность, процессы переброса.
5. Модель свободных электронов. Характер распределения электронов по энергии при нуле температур, наличие максимальной энергии (энергия Ферми). Энергетическое распределение электронов при ненулевой температуре (распределение Ферми). Химпотенциал, температура вырождения. Плотность электронных состояний при энергии Ферми. Электронная теплоемкость и ее температурная зависимость, соотношение с решеточной теплоемкостью.
6. Физическая причина появления зон разрешенных и запрещенных значений энергии, модели слабой и сильной связи. Теорема Блоха. Расчет закона дисперсии в модели сильной связи. Фотонные кристаллы. Качественное объяснение различия в электропроводности изоляторов, полупроводников и металлов. Понятие о ферми-жидкости, электроны и дырки как квазичастицы.
7. Электропроводность классического газа носителей в модели Друде–Лоренца. Электропроводность металла. Роль длины свободного пробега. Электронная теплопроводность. Качественное различие механизмов релаксации энергии и импульса электронов в процессах тепло- и электропроводности, закон Видемана–Франца. Правило Маттисена для электронов проводимости в металлах. Температурная зависимость сечения рассеяния электронов на фононах и примесях и друг на друге. Закон Блоха–Грюнайзена.

8. Электронные и дырочные возбуждения в полупроводниках, заряд дырок. Эффективная масса носителей заряда. Условие электронейтральности. Собственные и примесные полупроводники, донорные и акцепторные уровни, оценка энергии мелких примесных уровней. Температурная зависимость положения уровня Ферми в полупроводниках.
9. Зависимость концентрации проводящих электронов от температуры. Электропроводность полупроводников. Подвижность носителей. Температурная зависимость времени релаксации электронов. Контактные явления в полупроводниках. Равенство химпотенциалов при равновесии. ( $p$ - $n$ )-переход во внешнем электрическом поле. Выпрямляющие свойства ( $p$ - $n$ )-перехода.
10. Сверхтекучесть. Квантовые возбуждения в сверхтекучей жидкости, закон дисперсии. Критерий сверхтекучести Ландау. Качественное объяснение отсутствия вязкости в сверхтекучем гелии. Явление сверхпроводимости, отличие сверхпроводника от идеального металла, эффект Мейснера, лондоновская глубина проникновения. Роль кристаллической решетки в явлении сверхпроводимости, изотоп-эффект, куперовское спаривание. Качественное подобие сверхтекучести и сверхпроводимости как квантовых явлений в системе бозонов.
11. Длина когерентности, нулевой импульс пары,  $s$ -спаривание электронов. Связь длины когерентности с величиной сверхпроводящей щели. Величина щели в теории БКШ. Критическое магнитное поле. Критический ток, правило Сильсби. Квантование магнитного потока. Сверхпроводники I и II рода, понятие о вихрях магнитного потока, вихревая решетка, пиннинг. Первое и второе критические поля, оценки их величин. Высокотемпературные сверхпроводники. Области практического использования и перспективы применения сверхпроводимости.
12. Эффект Ааронова–Бома. Низкоразмерные структуры, понятие о квантовых ямах, проволоках и точках. Двухмерный характер движения электронов в структурах металл–окисел–полупроводник (МОП-структура). Квантование Ландау. Эффект Холла в полупроводниках, холловское удельное сопротивление (постоянная Холла). Квантовый эффект Холла, квантовый эталон сопротивления.
13. Магнетизм веществ: диа-, пара- и ферромагнетики. Формула Ланджевена–Бриллюэна для описания намагничивания парамагнетиков. Парамагнетизм Паули и диамагнетизм Ландау. Квантовая природа ферромагнетизма. Модель Гейзенберга для описания обменного взаимодействия, энергия анизотропии. Одноионная анизотропия. Модель Изинга.
14. Теория среднего поля для описания магнитного упорядочения. Закон Кюри–Вейсса. Возбуждения в спиновой системе ферромагнетиков. Классическое и квантовое описание спиновых волн. Закон  $3/2$  Блоха. Ферромагнетизм электронов проводимости, критерий Стонера.

## Литература

### Основная литература

1. *Ципенюк Ю.М.* Квантовая микро- и макрофизика. Москва: Физматкнига., 2006.
2. *Морозов А.И.* Элементы современной физики твердого тела. Москва: ИД «Интеллект», 2015.
3. *Петров Ю.В.* Основы физики конденсированного состояния. Москва: ИД «Интеллект», 2013.
4. *Гладун А.Д.* Строение вещества. Ч. II. Москва: МФТИ, 2010.
5. *Иванов А.А.* Введение в квантовую физику систем из многих частиц. Москва: МФТИ, 2007.
6. *Белонучкин В.Е., Заикин Д.А., Ципенюк Ю.М.* Основы физики. Т. 2. Москва: Физматлит, 2007.
7. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 5. Москва: Наука, 1986.
8. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. Москва: Наука, 1978.

### Дополнительная литература

9. *Мейлихов Е.З.* Электроны и фононы в общей физике твердого тела. Москва: МФТИ, 2005.
10. *Мейлихов Е.З.* Общая физика полупроводников. Москва: МФТИ, 2006.
11. *Мейлихов Е.З.* Общая физика сверхпроводников. Москва: МФТИ, 2003.
12. *Мейлихов Е.З.* Магнетизм. Основы теории. Москва: ИД «Интеллект», 2014.
13. *Морозов А.И.* Физика твердого тела. Кристаллическая решетка. Фононы. Москва: МИРЭА, 2010. (сайт кафедры общей физики [http://mipt.ru/education/chair/physics/S\\_6/](http://mipt.ru/education/chair/physics/S_6/)).
14. *Морозов А.И.* Физика твердого тела. Электроны в кристалле. Металлы. Полупроводники. Диэлектрики. Магнетики. Сверхпроводники. Москва: МИРЭА, 2010. (сайт кафедры общей физики [http://mipt.ru/education/chair/physics/S\\_6/](http://mipt.ru/education/chair/physics/S_6/)).
15. *Гольдин Л.Л., Новикова Г.И.* Введение в квантовую физику. Москва: ИД «Интеллект», 2016.
16. *Крылов И.П.* Основы квантовой физики и строение вещества. Москва: МФТИ, 1989.
17. *Петров Ю.В.* Введение в физику твердого тела. Москва: МФТИ, 1999.
18. *Ципенюк Ю.М.* Нулевые колебания. Москва: МФТИ, 2011.

**ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ**  
**для студентов 3-го курса ЛФИ(2-88Х), ФАКТ (только г.Жуковский) и**  
**ФЭФМ**  
**на весенний семестр 2020-2021 учебного года**

№ сем.	Даты	Темы семинарских занятий	Задачи для решения	
			Обязательные	Дополнительные
1	01.02–06.02	Структура и колебания кристаллических решёток.	0-1-1, 0-1-2, 2.1, 2.71, Т.1, Т.2, Т.3, Т.4	Т.Ф1(1) Т.Ф1(2)
2	08.02–13.02	Фононы. Модель Дебая.	0-2-1, 0-2-2, 2.23, 2.31, 2.58, 2.61, 2.75, Т.5	Т.Ф2
3	15.02–20.02	Решёточная теплоёмкость и теплопроводность.	0-3-1, 0-3-2, 2.34, 2.40, 2.52, 2.64, 2.65, 2.68	Т.Ф3
4	22.02–26.02	Свободный электронный газ. Энергия Ферми. Теплоёмкость металлов.	0-4-1, 0-4-2, 3.4, 3.17, 3.22, 3.27, 3.44, 3.61	Т.Ф4
5	01.03–06.03	Кинетика электронов в металле.	0-5-1, 0-5-2, 3.65, 3.74, 3.75, 3.88, Т.6, Т.7	Т.Ф5
6	08.03–13.03	Зонный характер спектра электронов в твердых телах; поверхность Ферми.	0-6-1, 0-6-2, 3.1, 3.34, 3.35, 3.43, 3.85, Т.8	Т.Ф6
7	15.03–20.03	Контрольная работа (по семинарским группам)		
8	22.03–27.03	Сдача 1-го задания		
9	29.03–04.04	Полупроводники.	0-9-1, 0-9-2, 4.12, 4.17, 4.43, 4.50, Т.9, Т.10	Т.Ф9
10	05.04–10.04	Сверхпроводники.	0-10-1, 0-10-2, 5.19, 5.21, 5.22, 5.24, 5.27, 5.34	Т.Ф10
11	12.04–17.04	Низкоразмерные системы.	0-11-1, 0-11-2, 3.87, 3.89, 4.16, 4.28, 4.48, Т.11	Т.Ф11

12	19.04– 24.04	Магнетизм.	0-12-1, 0-12-2, 6.60(А), 6.148(Г), 6.251(Г), Т.12, Т.13, Т.14	Т.Ф12(1) Т.Ф12(2)
13	26.04– 01.05	Контрольная работа (по семинарским группам)		
14	03.05– 08.05	Сдача 2-го задания		
15	10.05– 15.05	Подготовка вопросов по выбору		
16	17.05– 22.05	Зачет в лаборатории		

Примечание:

Номера задач без букв соответствуют разделу «Строение вещества». Номера задач с буквой (А) – разделу «Атомная и ядерная физика», с буквой (Г) – разделу избранных задач ГОС экзаменов Сборника задач по общему курсу физики. Часть 3 / под ред. В.А. Овчинкина. М.: МФТИ. 2009.

**Контрольные задачи и вопросы к семинарам (задачи группы 0)**

0-1-1. При комнатной температуре ниобий ( $A = 93$ ) кристаллизуется в ОЦК-решетку с ребром куба  $a = 3,294 \text{ \AA}$ . Найти плотность ниобия.

0-1-2. Найти расстояния между плоскостями  $d_{110}$  в моноатомной ОЦК- и ГЦК-решетках, если ребро элементарного куба равно  $a$ .

0-2-1. Усредненная скорость звука в меди равна  $s = 3600 \text{ м/с}$ . Постоянная ГЦК-решетки меди равна  $a = 3,61 \text{ \AA}$ . Найти дебаевскую частоту.

0-2-2. Найти величину щели (в эВ) между акустической и оптической модами колебаний на границе зоны Бриллюэна для одномерной цепочки NaCl с периодом  $2a = 5,6 \text{ \AA}$ . Скорость звука  $s = 3 \cdot 10^5 \text{ см/с}$ .

0-3-1. Оценить, какое количество тепла надо подвести к одному моллю диэлектрического кристалла, содержащего один атом в элементарной ячейке, чтобы нагреть его от температуры  $2\theta$  до  $2,5\theta$ .

0-3-2. Имеется диэлектрический кристалл с температурой Дебая  $\theta = 300 \text{ К}$ . Как изменится его решеточная теплопроводность при увеличении температуры от  $5 \text{ К}$  до  $15 \text{ К}$ ? Считать, что при указанных температурах длина свободного пробега фононов ограничена размерами кристалла.

0-4-1. Определить, какая доля электронов проводимости в металле при  $T = 0\text{К}$  имеет кинетическую энергию, большую  $0,5 E_F$ .

0-4-2. Оценить относительный вклад электронного газа в общую теплоемкость серебра при комнатной температуре. Температура Дебая у серебра равна  $\theta = 220$  К, энергия Ферми  $E_F = 5,5$  эВ.

0-5-1. Как изменится электропроводность чистого металла, если его температура изменилась от  $1,5\theta$  до  $2\theta$ ? Вкладом дефектов кристаллической структуры пренебречь.

0-5-2. При нагревании металла от 0 К до 2 К его сопротивление возросло в 5 раз. Во сколько раз изменится сопротивление этого металла при нагревании от 0 К до 4 К?

0-6-1. Закон дисперсии электронов в двумерной структуре с периодом  $a$  имеет вид  $E(k_x, k_y) = A(\cos k_x a + \cos k_y a)$ . Найти модуль групповой скорости электронов в точке  $k_x = \pi/2a$ ,  $k_y = \pi/6a$ .

0-6-2. Закон дисперсии электронов в одномерной структуре с периодом  $a$  имеет вид  $\epsilon(k_x) = A \cos(k_x a)$ . Найти ускорение электрона при  $k_x = \pi/6a$  в электрическом поле с напряженностью  $E$ . Концентрацию электронов считать малой.

0-9-1. Оценить минимальную энергию, необходимую для образования пары электрон-дырка в чистом кристалле GaAs, если его электропроводность изменяется в 10 раз при изменении температуры от  $+20^\circ\text{C}$  до  $-3^\circ\text{C}$ .

0-9-2. Оценить, при какой концентрации мелких донорных примесей в кремнии образуется примесная зона? Статическая диэлектрическая проницаемость кремния  $\epsilon = 12$ , эффективная масса равна половине массы свободного электрона.

0-10-1. Оценить величину энергетической щели в свинце, у которого критическая температура равна  $T_c = 7,2$  К.

0-10-2. При каком напряжении начнет течь ток через туннельный переход металл-изолятор-сверхпроводник, если  $T_c = 9,2$  К? Измерение проводится при  $T \ll T_c$ .

0-11-1. В каком минимальном магнитном поле электроны в МОП-структуре будут полностью заполнять нижний спиновый подуровень Ландау? Поверхностная плотность электронов  $n_s = 10^{12}$  см<sup>-2</sup>.

0-11-2. При приложении электрического поля перпендикулярно плоскости графена, энергия Ферми электронов оказалось равной  $E_F = 0,1$  эВ. Найти поверхностную плотность электронов в графене, если  $c^* = 10^8$  см/с.

0-12-1. Оценить обменный интеграл (в эВ) в оксиде европия, если спин магнитного иона равен  $7/2$ , число ближайших соседей – 12, температура Кюри – 77 К.

0-12-2. При температуре  $T_1$  намагниченность ферромагнетика отличается от намагниченности насыщения на 1%, а при температуре  $T_2$  – на 8%. Найти отношение температур  $T_2/T_1$ .

## Текстовые задачи (задачи группы 1)

Т.1. Кристаллическая решетка окиси марганца  $\text{MnO}$  является кубической гранцентрированной (типа  $\text{NaCl}$ ). При низких температурах это соединение является антиферромагнетиком: соседние ферромагнитно упорядоченные плоскости (111) ионов магния имеют противоположные направления локального магнитного момента. При дифракции нейтронов с длиной волны  $\lambda = 1,204 \text{ \AA}$  на порошкообразном  $\text{MnO}$  на угол  $\alpha = 13^\circ$  наблюдается пик магнитного рассеяния первого порядка. Найти величину ребра элементарного куба.

$$\text{Ответ: } a = \frac{\sqrt{3}\lambda}{4\sin(\alpha/2)} = 4,5 \text{ \AA}.$$

Т.2. Дана двухатомная цепочка равноотстоящих атомов с отношением масс 2:3. В ней возбуждено такое колебание, что на оптической ветви отношение модулей смещения легкого и тяжелого атомов равно 2. Чему равна (в единицах периода цепочки) максимальная длина волны такого колебания. Учитывать взаимодействие только между ближайшими соседями.

$$\text{Ответ: } \lambda_{\max} = \pi d / \arccos(0.4) \approx 2,7d.$$

Т.3. Так называемый  $\alpha$ -карбин представляет собой одномерную цепочку из атомов углерода с чередующимися одинарной и тройной химическими связями  $-\text{C} \equiv \text{C} - \text{C} \equiv \text{C} -$ , а  $\beta$ -карбин – цепочку, в которой атомы углерода связаны двойной химической связью  $=\text{C} = \text{C} = \text{C} = \text{C} =$ . Считая, что жесткость  $\gamma$  химической связи определяется ее кратностью, определить отношение продольных скоростей звука в  $\alpha$ - и  $\beta$ -модификациях карбина. Среднее расстояние между атомами, соединенными одинарной и тройной связями в  $\alpha$ -карбине, считать равными  $d_{\alpha}^{(1)} = 0,137 \text{ нм}$  и  $d_{\alpha}^{(3)} = 0,125 \text{ нм}$  соответственно, а среднее расстояние между атомами, соединенными двойной связью в  $\beta$ -карбине, равным  $d_{\beta}^{(2)} = 0,128 \text{ нм}$ .

$$\text{Ответ: } \frac{s_{\alpha}}{s_{\beta}} = \frac{d_{\alpha}^{(1)} + d_{\alpha}^{(3)}}{2d_{\beta}^{(2)}} \sqrt{\frac{2\gamma_1\gamma_3}{\gamma_2(\gamma_1 + \gamma_3)}} = \frac{131}{128} \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,89.$$

Т.4. В приближении «ближайших соседей» закон дисперсии фононов  $\omega(k)$  в зоне Бриллюэна является монотонно возрастающей функцией. При учете взаимодействия с соседями, следующими за ближайшими, это уже не всегда так. Например, в свинце, в направлении  $[100]$  (вдоль ребра элементарного куба), частота фононов достигает максимума при  $k_0 = 0,8k_{\text{Брил}}$ , где  $k_{\text{Брил}}$  – волновое число, соответствующее границе зоны Бриллюэна в этом



направлении. Скорость продольного звука в этом направлении составляет  $s = 2,2 \cdot 10^5$  см/с. Используя модель одномерной цепочки, найти силовые постоянные для первых и вторых соседей. Свинец кристаллизуется в ГЦК-решетку с периодом  $d = 4,95 \text{ \AA}$ . Период одномерной цепочки – это расстояние между соседними параллельными плоскостями, перпендикулярными направлению  $[100]$ .

$$\text{Ответ: } \beta_1 = -4\beta_2 \cos\left(\pi \frac{k_0}{k_{\text{Брил}}}\right) = 12,1 \cdot 10^3 \text{ дн/см,}$$

$$\beta_2 = \frac{M_{\text{рб}} s^2}{d^2 \left(1 - \cos \pi \frac{k_0}{k_{\text{Брил}}}\right)} = 3,78 \cdot 10^3 \text{ дн/см.}$$

Т.5. Вероятность эффекта Мессбауэра – испускания  $\gamma$ -квантов возбужденным ядром без изменения состояния решетки (рождения фононов) – равна  $w = \exp(-2L)$  (т.н. фактор Лэмба–Мессбауэра). Здесь  $L = \langle (\vec{k}\vec{u})^2 \rangle / 2$ ,  $\vec{k}$  – волновой вектор  $\gamma$ -кванта,  $\vec{u}$  – вектор смещения атома решетки, угловые скобки обозначают усреднение по направлениям векторов и по спектру колебаний решетки. Найти в дебаевском приближении максимально возможную вероятность эффекта Мессбауэра для кристалла иридия-193 (решетка ОЦК), если энергия перехода в ядре иридия  $E_\gamma = 129$  кэВ, дебаевская температура  $\Theta = 430$  К.

$$\text{Ответ: } w = \exp\left(-\frac{3}{4} \frac{E_\gamma^2}{M_{\text{Ir}} c^2 k_{\text{Б}} \Theta}\right) = 0,154$$

Т.6. В гелиевую ванну ( $T = 4,2$  К) помещен намотанный медным проводом соленоид диаметром  $D = 10$  мм с числом витков  $N = 200$ . Какая мощность будет выделяться при пропускании через соленоид тока  $I = 100$  мА? Изменение сопротивления единицы длины этого провода показали, что при температуре  $T_1 = 1$  К оно равно  $R_1 = 2 \cdot 10^{-6}$  Ом/см, а при  $T_2 = 2$  К –  $R_2 = 3,3 \cdot 10^{-5}$  Ом/см. Считать, что для меди выполняется закон Блоха–Грюнайзена.

$$\text{Ответ: } 8,3 \text{ мВт.}$$

Т.7. Чистый образец из золота имеет при температуре  $T = 295$  К удельное сопротивление  $\rho = 2,2 \cdot 10^{-6} \cdot \text{Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ . Золото кристаллизуется в ГЦК-ре-

шетке с периодом  $a = 4,1 \text{ \AA}$ . Дебаевская температура золота  $\theta = 197 \text{ К}$ . Оценить по этим данным среднее (эффективное) сечение рассеяния электронов на фононах.

$$\text{Ответ: } \bar{\sigma} = \frac{2}{9(12\pi^2)^{1/3}} \frac{e^2 \rho a}{\hbar} \frac{\theta}{T} = 6,6 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2.$$

Т.8. Найти при  $T \approx 0 \text{ К}$  максимальный импульс электрона в проводнике с анизотропным законом дисперсии:

$$\varepsilon = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m_{\perp}^*} + \frac{p_z^2}{2m_{\parallel}^*}, \quad \frac{m_{\parallel}^*}{m_{\perp}^*} = 8.$$

Концентрация электронов  $n = 10^{18} \text{ см}^{-3}$ .

$$\text{Ответ: } p_{\text{макс}} = \hbar \left( 3\pi^2 n \frac{m_{\parallel}^*}{m_{\perp}^*} \right)^{1/3} = 6,5 \cdot 10^{-21} \text{ г} \cdot \text{см/с}.$$

Т.9. При легировании кремния донорами с концентрацией  $N_d = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , оказалось, что ток дырок при температуре  $T = 600 \text{ К}$  уменьшился в  $\gamma = 3$  раза по сравнению со случаем нелегированного образца. Найти долю ионизованных примесей при данной температуре, если эффективные массы электронов и дырок равны  $m_n^* = 1,08m_0$  и  $m_p^* = 0,56m_0$ , ширина запрещенной зоны при данной температуре равна  $E_g = 1,05 \text{ эВ}$ . Подвижность дырок считать постоянной.

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{n_i}{N_d} \left( \gamma - \frac{1}{\gamma} \right) = 0,51,$$

где

$$n_i = 2,51 \cdot 10^{19} \left( \frac{m_n^*}{m_0} \right)^{3/4} \left( \frac{m_p^*}{m_0} \right)^{3/4} \left( \frac{T}{300} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{E_g}{2k_B T} \right) = 1,9 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

Т.10. В ионных кристаллах при конечных температурах возникают дефекты Шоттки – пустые места в узле кристаллической решетки (вакансии). При этом ионы из узлов решетки уходят из объема кристалла на его поверхность. В силу электронейтральности в чистом без примесей кристалле вакансии положительных и отрицательных ионов возникают парами (аналогично электронам и дыркам в полупроводнике). Минимальная энергия образования пары вакансий (т.е. работа по удалению пары ионов) в кристалле NaCl составляет  $E_{\text{Sch}} = 2 \text{ эВ}$ . Найти температуре  $t = 330 \text{ }^\circ\text{C}$  равно-

весные концентраций вакансий при в природном NaCl содержащем примесь  $\text{CdCl}_2$  с концентрацией ионов кадмия  $n_{\text{Cd}^{++}} = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ . Ионы кадмия замещают ионы натрия в узлах кристаллической решетки. Концентрация узлов в подрешетках ионов обоих знаков в NaCl равна  $n_0 = 2,2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ .

$$\text{Ответ: } n_{\text{Na}^+} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{4n_i^2 + n_{\text{Cd}^{++}}^2} + n_{\text{Cd}^{++}} \right) = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} n_i = 1,62 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3},$$

$$n_{\text{Cl}^-} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{4n_i^2 + n_{\text{Cd}^{++}}^2} - n_{\text{Cd}^{++}} \right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} n_i = 0,62 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3},$$

где

$$n_i = n_0 \exp(-E_{\text{Sch}} / 2k_{\text{B}}T) \cong 10^{14} \text{ см}^{-3}.$$

Т.11. Найти отношение электронной и решеточной теплоемкостей графена при низких температурах. Графен можно считать двумерным бесщелевым полупроводником с линейным законом дисперсии носителей тока  $E(\vec{k}) = \pm \hbar c^* k$ , где  $\vec{k}$  – двумерный волновой вектор,  $k = |\vec{k}|$ ,  $c^* = 10^8 \text{ см/с}$ , знак «+» соответствует зоне проводимости, знак «-» – валентной зоне. В зоне Бриллюэна графена имеется два эквивалентных минимума закона дисперсии (две долины). Усредненная по двум поляризациям (продольной и поперечной) скорость звука в графене  $s = 1,5 \cdot 10^6 \text{ см/с}$ . Наличием изгибных колебаний пренебречь.

Указание: Воспользоваться соотношением  $\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x + 1} dx = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x - 1} dx$ ;

$$\text{Ответ: } \frac{C_s}{C_{ph}} = 3 \left( \frac{s}{c^*} \right)^2 = 6,75 \cdot 10^{-4}.$$

Т.12. Под действием однородного переменного магнитного поля в тонких ферромагнитных пленках могут возбуждаться спиновые волны. Когда на толщине пленки укладывается нечетное число полуволн  $n$ , возникает стоячая волна колебаний намагниченности (спин-волновой резонанс). Так в пермаллоевой пленке толщиной  $L = 2000 \text{ \AA}$  на частоте  $f = 9 \text{ ГГц}$  наблюдается резонанс с  $n = 7$ .

(а) Чему равна эффективная масса (в единицах массы свободного электрона) этих квазичастичных возбуждений?

(б) Считая, что пленка сделана из чистого железа и используя результат (а), найти относительное изменение намагниченности пленки при нагреве ее от  $T = 0 \text{ К}$  до  $T = 300 \text{ К}$ . Спин иона железа считать равным  $S = 5/2$ , размер элементарного куба ОЦК-решетки  $a = 2,87 \text{ \AA}$ .

Указания: Закон дисперсии спиновых волн считать квадратичным;

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx = 4\pi^2 \cdot 0,0587 .$$

Ответ: (а)  $m^* = \frac{\pi \hbar n^2}{4fL^2} \approx 1,13 \cdot 10^{-26} \text{ г}, \text{ или } m^* \approx 12,4 m_e .$

(б)  $\frac{\Delta M}{M(0)} = 0,0587 \left( \frac{2m^* k_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{a^3}{2S} \approx 0,7 \% .$

Т.13. Магнитная восприимчивость жидкого  ${}^3\text{He}$  выше температуры 1 К ведет себя точно по закону Кюри, т.е.  $\chi \propto 1/T$ . Вычислить величину восприимчивости  ${}^3\text{He}$  при температуре  $T = 2 \text{ К}$ . Плотность  ${}^3\text{He}$  при данной температуре равна  $\rho = 0,07 \text{ г/см}^3$ .

Ответ:  $\chi = \frac{J(J+1)g_{\text{сп}}^2 \mu_{\text{яб}}^2}{3k_B T} \frac{\rho}{\mu} N_A = 4,735 \cdot 10^{-9} .$

Т.14. Гетероструктура AlGaIn/GaN, охлажденная до температуры  $T = 4 \text{ К}$ , помещена в магнитное поле  $B = 4 \text{ Тл}$ . Оценить теплоемкость единицы поверхности двумерного электронного газа, если при  $T = 0 \text{ К}$  полностью заполнен только один подуровень Ландау. Эффективная масса электронов равна  $m^* = 0,16m_0$ , где  $m_0$  – масса свободного электрона.

Ответ:  $C \approx 2n_s k_B \left( \frac{\mu_B B}{k_B T} \right)^2 \frac{\exp \frac{\mu_B B}{k_B T}}{\left( \exp \frac{\mu_B B}{k_B T} + 1 \right)^2} = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ эрг/(К} \cdot \text{см}^2),$

где  $n_s = B / \Phi_0 = eB / hc$ .

### Задачи повышенной сложности (задачи группы 2)

Т.Ф1(1). Для базоцентрированной ромбической решётки с параметрами решётки  $a, b=2a, c$  построить обратную решётку, выделить первую зону Бриллюэна, найти объём первой зоны Бриллюэна и сравнить с объёмом элементарной ячейки исходной ромбической решётки.

Ответ:  $V_{\text{зБ}} = \frac{(2\pi)^3}{a^2 c} .$

Т.Ф1(2). При изучении структуры кристаллов широко используется метод Дебая–Шерера: на порошковый образец, состоящий из маленьких случайно ориентированных кристаллов, падает монохроматическое рентгеновское излучение. Наблюдаемая на расположенном за образцом перпендикулярно к падающему лучу плоском детекторе картина дифракции состоит из семейства концентрических окружностей. Определить радиусы первой из этих окружностей для кристаллов с простой кубической и ГЦК решётками. В обоих случаях ребро кубической элементарной ячейки  $a=3.14\text{Å}$ , длина волны падающего излучения  $\lambda = 0.7\text{Å}$  (К- $\alpha$  линия молибдена), расстояние до детектора  $L=10\text{ см}$ .

Ответ: для кубической решетки:  $R \approx L \frac{\lambda}{a} = 2.2\text{ см}$ ,

для ГЦК решетки  $R \approx \sqrt{3}L \frac{\lambda}{a} = 3.8\text{ см}$ .

Т.Ф2. В свободном (подвешенном) графене существует длинноволновая изгибная мода колебаний с законом дисперсии  $\omega = \alpha k^2$ , где  $\alpha = 5 \times 10^{-3}\text{ см}^2/\text{с}$ , а  $k$  – двумерный волновой вектор. Оценить в рамках низкотемпературного приближения при какой температуре вклад в теплоемкость от изгибной моды сравняется с вкладом звуковых ветвей. Усредненная по двум поляризациям (продольной и поперечной) скорость звука в графене равна  $\bar{s} = 16,2\text{ км/с}$ .

Указание:  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \cong 2.40$ ,  $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$

Ответ:  $T_* = \frac{\pi^2}{86,4} \frac{\hbar \bar{s}^2}{\alpha k} \cong 458\text{ К}$ .

Т.Ф3. Искусственный алмаз, выращенный из изотопически чистого углерода  $^{12}\text{C}$ , обладает при комнатной температуре теплопроводностью  $\kappa = 25\text{ Вт}/(\text{см}\cdot\text{К})$ . Теплопроводность же алмаза, выращенного из естественной смеси изотопов (с 1%-ым содержанием изотопа  $^{13}\text{C}$ ), на 1% меньше. Оценить длину свободного пробега фононов, обусловленную рассеянием на дефектах, роль которых играют атомы  $^{13}\text{C}$ . Температура Дебая алмаза  $\Theta = 2250\text{ К}$ , скорость звука  $s = 17,5\text{ км/с}$ , ребро элементарного куба решетки алмаза, содержащего 8 атомов, равно  $a = 3,57\text{ Å}$ .

Ответ:  $\lambda = \frac{15\kappa a^3}{48\pi^4 k_B s} \left( \frac{\Theta}{T} \right)^3 \approx 7 \cdot 10^{-5}\text{ см}$ .

Т.Ф4. При облучении золотого фотокатода ультрафиолетовым излучением с энергией кванта 16,9 эВ образуются фотоэлектроны с энергиями от  $\varepsilon_1 = 7.1$  эВ до  $\varepsilon_2 = 11.6$  эВ. Считая спектр электронов проводимости в золоте изотропным и квадратичным, оценить величину эффективной массы электронов. Золото кристаллизуется в ГЦК-решетку с ребром элементарного куба  $a = 4,08 \text{ \AA}$ .

$$\text{Ответ: } \frac{m^*}{m_0} = \frac{\hbar^2 (12\pi^2)^{2/3}}{2m_0 a^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} = 1,21$$

Т.Ф5. Медный стержень прикреплен одним концом к криостату, поддерживающему температуру  $T_1 = 400$  мК, а другой его конец нагрет до температуры  $T_2 = 2$  К. Чему равна температура в точке посередине стержня (на равном удалении от концов). Стержень находится в глубоком вакууме, радиационный теплообмен не учитывать.

$$\text{Ответ: } T_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{T_2^2 + T_1^2}{2}} \cong 1,44 \text{ К.}$$

Т.Ф6. Атомы лития образуют одномерную цепочку так, что возникает перекрытие волновых функций электронов и уровни  $1s$  и  $2s$  отдельного атома расщепляются в зоны. Законы дисперсии электронов в первой и второй зонах:  $E_1(k) = -7E_0 - E_0 \cos ka$  и  $E_2(k) = -3E_0 + 2E_0 \cos ka$ , где энергия отсчитывается от уровня энергии покоящегося электрона в вакууме,  $E_0 = 2$  эВ, межатомное расстояние  $a = 3 \text{ \AA}$ . Найти электронный вклад в теплоёмкость единицы длины такой цепочки при  $T = 10$  К.

$$\text{Ответ: } c_L = C(T)/L = \pi k^2 T / (3E_0 a) = 2,1 \cdot 10^{-12} \text{ эрг/(см К).}$$

Т.Ф9. Найти концентрацию носителей тока при температуре  $T = 4,2$  К в двухслойном (верхний слой повернут на  $60^\circ$  относительно нижнего, как в графите) идеальном графене, который является бесщелевым полупроводником. У двухслойного графена в зоне Бриллюэна находится два эквивалентных минимума (долины) закона дисперсии, вблизи которых  $E(\vec{k}) = \pm \hbar^2 k^2 / 2m^*$ . Верхний знак соответствует зоне проводимости, нижний – валентной зоны; эффективная масса носителей  $m^* = 0,054m_0$ . Во сколько раз изменится концентрация, если увеличить температуру вдвое?

$$\text{Ответ: } n_s = \frac{2 \ln 2}{\pi} \frac{m^* \kappa T}{\hbar^2} = 1,14 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}.$$

Т.Ф10. Ниобий является сверхпроводником второго рода, у которого при абсолютном нуле глубина проникновения и длина когерентности практически совпадают. Считая, спектр электронов в ниобии является изотропным квадратичным, что найти концентрацию и эффективную массу электронов в ниобии. Удельная электронная теплоемкость ниобия в нормальном состоянии описывается законом  $C(T)/T = \gamma = 7,18 \cdot 10^3 \text{ эрг}/(\text{см}^3 \text{ K}^2)$ . Величина энергетической щели в ниобии при абсолютном нуле  $\Delta = 1,4 \text{ мэВ}$ .

Указание. Для упрощения вычислений, можно считать, что  $(3\pi^2)^{1/3} \cong \pi$ .

$$\text{Ответ: } n \cong 1,7 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}, m^* = 75 \cdot 10^{-28} \text{ г или } 8,24 m_0.$$

Т.Ф.11. В объемном образце полуметалла имеется перекрытие зоны проводимости и валентной зоны. Из этого образца изготовлены различные тонкие пленки. Оказалось, что пленки с толщиной меньшей  $d = 300 \text{ \AA}$  не обладают проводящими свойствами, а с большей - обладают. Найти величину перекрытия. Эффективные массы электронов и дырок равны соответственно  $m_e^* = 0,04m_0$  и  $m_h^* = 0,02m_0$ . Считать, что электроны и дырки не могут выйти за границы пленки. Принять, что  $T \cong 0 \text{ К}$ .

$$\text{Ответ: } \Delta = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 d^2} \left( \frac{m_0}{m_h^*} + \frac{m_0}{m_e^*} \right) = 0,3 \text{ эВ}.$$

Т.Ф12(1). При измерении низкотемпературной теплоёмкости парамагнитной соли с магнитными ионами  $\text{Ni}^{2+}$  ( $S=1$ ) в магнитном поле  $B = 4 \text{ Тл}$  наблюдается характерный пик теплоёмкости (аномалия Шоттки). Считая магнетизм чисто спиновым, определить при какой температуре наблюдается максимум теплоёмкости. Оценить, во сколько раз теплоёмкость в максимуме превышает решёточную (для оценки использовать характерные значения для диэлектрических кристаллов).

Указание: функция  $y = x^2(4+2\text{ch } x)/(1+2\text{ch } x)^2$  имеет максимум при  $x \approx 1.881$  равный  $y_{\text{max}} \approx 0.63$

$$\text{Ответ: } T_{\text{max}} = \frac{g\mu_B B}{1,881 k_B} = 2,86 \text{ К}, C(T_{\text{max}}) = 0,637 k_B.$$

Т.Ф12(2). Определить относительное изменение частоты света при рассеянии на  $90^\circ$  с испусканием магнона в ферромагнитном диэлектрике с простой кубической решёткой. Величина обменного интеграла  $|J|=100$  К, спин магнитного иона  $S = 5/2$ , взаимодействуют только ближайшие соседи, длина волны падающего света  $\lambda = 400$  нм, показатель преломления среды  $n = 1.3$ . Спектр спиновых волн в указанном материале  $\omega = (2|J|S/\hbar)(3 - \cos(K_x a) - \cos(K_y a) - \cos(K_z a))$ .

$$\text{Ответ: } \frac{\delta\omega}{\omega} \approx \frac{4\pi|J|S a^2 n^2}{\hbar c \lambda} = 5,2 \cdot 10^{-7}$$