УДК 517.972

А. Д. Грехнева

Российский университет дружбы народов

О явлении взрыва решений задачи Коши–Дирихле для нелинейного уравнения Шредингера на отрезке

Устанавливается локальная однозначная разрешимость задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера на отрезке. Исследованы эффекты глобального существования решения задачи Коши и возникновения градиентного взрыва решения за конечное время.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, регуляризация, режим с обострением, разрушение решения.

A. D. Grekhneva

Peoples' Friendship University of Russia

On the phenomenon of explosion of solutions to the Cauchy–Dirichlet problem for the nonlinear Schroedinger equation in the interval

Local unique solvability of the Cauchy problem for the nonlinear Schroedinger equation on the segment is obtained. The effects of existence of the global solution of the Cauchy problem and of the occurrence of the gradient explosion of solution in finite time are investigated.

Key words: the non-linear Schrodinger equation, regularize, blow-up regime, the destruction solution.

1. Введение

Объектом изучения настоящей работы является задача Коши для уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{L}u(t),\ t \in (0,T); \tag{1}$$

$$u(+0) = u_0; \quad u_0 \in H \equiv L_2([-\pi,\pi]). \tag{2}$$

в которой u_0 – заданная функция из гильбертова пространства $H = L_2([-\pi,\pi])$, u – искомое отображение промежутка $[0,T)$ при некотором $T \in (0,+\infty]$ в пространство H, удовлетворяющее уравнению (1) и условию (2) в смысле определения 1 (см. ниже).

Нелинейный оператор уравнения (1) определим равенством

$$\mathbf{L}u \equiv \mathbf{\Delta}u + \mathbf{G}u, \tag{3}$$

где Δ – оператор Лапласа–Дирихле на отрезке $[-\pi,\pi]$, а оператор $\mathbf{G}$ задан равенством

$$\mathbf{G}u = f(|u|^2)u.$$

Здесь функция f является достаточно гладкой вещественнозначной функцией вещественного аргумента.

В равенстве (3) $\mathbf{\Delta}$ – оператор Лапласа–Дирихле на отрезке $[-\pi,\pi]$. Тогда оператор $-\mathbf{\Delta}$ есть положительный самосопряженный оператор с дискретным спектром

$\sigma_{-\Delta} = \{\frac{1}{4}n^2, n \in \mathbf{N}\}$, областью определения которого служит пространство Соболева $W^2_{2,0}([-\pi, \pi])$ классов функций, имеющих нулевой след в граничных точках отрезка $[-\pi, \pi]$. Обозначим через $(-\mathbf{\Delta})^{\frac{1}{2}}$ квадратный корень из положительного оператора $-\mathbf{\Delta}$, тогда оператор $(-\mathbf{\Delta})^{\frac{1}{2}}$ является положительным оператором со спектром $\sigma_{(-\mathbf{\Delta})^{\frac{1}{2}}} = \{\frac{1}{2}n, n \in \mathbf{N}\}$ и областью определения $H^1 = W^1_{2,0}([-\pi, \pi])$, состоящей из элементов соболевского пространства $W^1_2([-\pi, \pi])$, имеющих нулевой след в граничных точках отрезка $[-\pi, \pi]$. Через $H^l = D((-\Delta)^{l/2})$, $l \in 0, 1, ...$ обозначим области определения l-й степени оператора $(-\mathbf{\Delta})^{\frac{1}{2}}$.

Согласно теореме вложения Соболева (см. [1]), если $l \geq 1$, то тогда включение $u \in C_0([-\pi, \pi])$ является следствием условия $u \in H^l$, где $C_0([-\pi, \pi])$ – банахово пространство непрерывных на отзезке $[-\pi, \pi]$ функций, имеющих нулевые значения на концах отрезка. Следовательно, пространство $H^2 = D(\mathbf{\Delta})$ является областью определения нелинейного оператора $\mathbf{L}$, ибо для всякого $u \in H^2$ выполняются условия $\mathbf{\Delta} u \in H$ и $\mathbf{G} u \in C_0([-\pi, \pi]) \subset H$.

Через $e^{-it\mathbf{\Delta}}$, $t \geq 0$, обозначим полугруппу унитарных операторов, порождаемых в пространстве H самосопряженным оператором $-\mathbf{\Delta}$.

Определение 1. Функцию u будем называть H^l-решением задачи (1), (2), (3) $(l \in \{0\} \bigcup \mathbf{N})$, если $u \in C([0, T), H^l)$ и выполнено равенство

$$u(t) = e^{-it\mathbf{\Delta}} u_0 - i \int\limits_0^t e^{-i(t-s)\mathbf{\Delta}} \mathbf{G} u(s) ds, \ t \in [0, T). \tag{4}$$

В статье установлены существование и единственность локального H^l-решения задачи Коши (1) – (2) для нелинейного уравнения Шредингера с начальным условием $u_0 \in H^l$ при произвольном $l \in \mathbf{N}$. При $p \in [0, 4)$ устанавливается глобальная H^1-разрешимость задачи Коши при произвольном $u_0 \in H^1$. При $p > 4$ получены условия на начальную функцию u_0, достаточные для явления разрушения H^1-решения задачи Коши на промежутке конечной длины.

Целью статьи является приведение аккуратного и подробного вывода аннонсированных результатов с проведением всех требуемых оценок. В дальнейшем планируется применить полученные оценки для изучения локальной и глобальной разрешимости и явления взрыва решений для нелинейного уравнения Шредингера, содержащего сдвиг пространственных или (и) временных аргументов (см. [2] и цитированную там литературу).

Интересно отметить качественное отличие явления разрушения решения уравнения Шредингера от явления разрушения решения уравнения теплопроводности: в случае нелинейного уравнения теплопроводности в d-мерном евклидовом пространстве отсутствуют глобальные решения задачи Коши уравнения теплопроводности при условии $0 < p < \frac{2}{d}$ достаточной малости показателя нелинейности, тогда как при $p > \frac{2}{d}$ существуют нетривиальные глобальные решения задачи (см. [3, 4]). Для глобальной разрешимости задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера в d-мерном евклидовом пространстве, как отмечено выше, значительную опасность представляют большие значения показателя нелинейности p. В работах [5–7] показано, что при $0 \leq p \leq \frac{4}{d}$ задача Коши имеет глобальное решение при произвольном начальном условии, а в случае $p > \frac{4}{d}$ существуют такие начальные условия, при которых задача Коши не имеет глобального решения.

Для доказательства теоремы о разрешимости задачи Коши и для классификации качественного поведения решений этой задачи потребуется рассмотреть следующие функционалы, заданные на банаховом пространстве H^l при $l = 1$:

функционал энергии $E(u) = \int\limits_{[-\pi,\pi]} [\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - F(|u|^2)]dx$ (здесь $F(y) = \int\limits_0^y f(s)ds$),

$N(u) = \|u\|^2_H$, $Y(u) = \int\limits_{[-\pi,\pi]} |x|^2 |u|^2 dx$, $J(u) = \mathrm{Im} \int\limits_{[-\pi,\pi]} (\nabla u, x)\bar{u} dx$.

В настоящей работе получены следующие четыре результата. Теорема 1 дает достаточные условия локальной разрешимости задачи Коши (1) – (2), теорема 2 устанавливает сохранение значения функционала энергии от значений H^1-решений на всем промежутке существования H^1-решения, теорема 3 – достаточные условия существования ее глобального решения, а теорема 4 – достаточные условия существования начальных данных, решение задачи Коши при которых локально существует, но проявляет свойство градиентного взрыва решения за конечное время.

1. Теоремы о локальном существовании

Доказательство локального существования H^l-решения задачи Коши (1) – (2) в работах J. Ginibre, G. Velo. (см. [8]) и П.Е. Жидкова (см. [5]) основано на принципе сжимающих отображений для отображения пространства решений $C([-T,T],H^l)$ в себя, задаваемого оператором из правой части равенства (4). Для установления сжимаемости такого оператора важную роль играет непрерывность вложения пространства $H^l(\Omega)$ в пространство $L_{p+2}(\Omega)$ или в пространство $C_b(\Omega)$ в случае d-мерной области Ω. При $d=1$ непрерывность вложения банахова пространства $H^l(\Omega)$ в банахово пространство $C_b(\Omega)$ имеет место при всех $l \in \mathbf{N}$. Тогда справедливо утверждение (см. [5]):

Теорема 1. *Пусть $p \geq 0$. Тогда справедливо следующее утверждение:*

$(\mathcal{U})$: Для любого $\rho > 0$ существует число $T_* = T_*(\rho) > 0$ такое, что если $u_0 \in H^1$ и $\|u_0\|_{H^1} \leq \rho$, то задача Коши (1), (2), (4) имеет единственное H^1-решение на отрезке $[-T_*, T_*]$.

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Если $f \in C^1([0,+\infty)$, то из условия $u \in H^1$ следует, что $f(|u|^2)u \in H^1$, причем существует такое (зависящее от f) число $C(\|u\|_{H^1}) > 0$, что $\|f(|u|^2)u\|_{H^1} \leq C(\|u\|_{H^1})$.*

Действительно,

$$\|f(|u|^2)u\|^2_{H^1} = \|f(|u|^2)u\|^2_H + \|\frac{d}{dx}(f(|u|^2)u)\|^2_H \leq$$

$$\leq ||f(|u|^2)||^2_C(\|u\|^2_H + \|\frac{d}{dx}u)\|^2_H) + 2||uf'(|u|^2)||^2_C\|\frac{d}{dx}u\|^2_H.$$

В силу теоремы вложения $\|u\|_C \leq C_{emb}\|u\|_{H^1}$, поэтому $||f(|u|^2)||_C \leq \sup\limits_{t\in[0,C_{emb}\|u\|_{H^1}]} |f(t^2)|$ и $||f'(|u|^2)||_C \leq \sup\limits_{t\in[0,C_{emb}\|u\|_{H^1}]} |f'(t^2)|\blacksquare$.

Лемма 2. *Если $u \in Y_T$, то $\mathbf{\Phi}u \in Y_T$, причем существуют такие постоянные $A(\|u\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^1}, T) > 0$ и $B(\|u\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^1}, T) > 0$, что $\|\mathbf{\Phi}u\|_{Y^T} \leq (\|u_0\|_{H^1} + A(\|u\|_{Y_T})T)e^{B(\|u\|_{Y_T})T}$.*

Действительно, $\|e^{-it\mathbf{\Delta}}u_0\|_{Y_T} = \|u_0\|_{H^1}$.

В силу равенства (5) функция v является решением линейного эволюционного уравнения Шредингера с ограниченным непрерывным зависящим от времени потенциалом $f(|u(t,\cdot)|^2)$, поэтому $\|v(t)\|_H = \|u_0\|_H$, $t \geq 0$.

Кроме того, в силу (5), справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}v(t) = e^{-it\mathbf{\Delta}}\frac{\partial}{\partial x}u_0 + \int\limits_0^t e^{-i(t-s)\mathbf{\Delta}}[f(|u(s,\cdot)|^2)\frac{\partial}{\partial x}v(s) +$$

$$+ f'(|u(s,\cdot)|^2)(\frac{\partial}{\partial x}u(s)\bar{u}(s) + u(s)\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(s))v(s)]ds,\ t \in [-T,T]. \tag{6}$$

Поскольку в силу теоремы вложения $\|v\|_C([-T,T]) \le C_{emb}(\|v\|_H + \|\frac{\partial}{\partial x}v(t)\|_H)$ и $\|v\|_H = \|u_0\|_H$, то из (6) следует, что существуют такие зависящие от $\|u_0\|_{H^1}$, $\|u\|_{Y_T}$ и функции f постоянные $A, B > 0$, что

$$\|\frac{\partial}{\partial x}v(t)\|_H \le (\|u_0\|_{H^1} + AT) + B\int\limits_0^t \|\frac{\partial}{\partial x}v(s)\|_H ds.$$

Потому в силу леммы Гронуолла

$$\|\frac{\partial}{\partial x}v(t)\|_{C([-T,T],H^1)} \le (\|u_0\|_{H^1} + A(\|u_0\|_{H^1}, \|u\|_{Y_T})T)e^{B(\|u_0\|_{H^1},\|u\|_{Y_T})T}.\blacksquare$$

Лемма 3. *Существуют такие зависящие от функции f и норм $\|u\|_{Y_T}$, $\|v\|_{Y_T}$ постоянные $a, b > 0$, что из условия $u, v \in Y_T$ следует неравенство $\|\Phi u - \Phi v\|_{Y_T} \le Ta\|u-v\|_{Y_T}e^{bT}$.*

Действительно, для любых $u, v \in Y_T$

$$\Phi u - \Phi v = \int\limits_0^t e^{-i(t-s)\mathbf{\Delta}} f(|u(s)|^2)(\Phi u(s) - \Phi v(s))ds + \int\limits_0^t e^{-i(t-s)\mathbf{\Delta}}[f(|u(s)|^2) - f(|v(s)|^2)]\Phi v(s)ds,$$

поэтому существуют такие постоянные $a(f, \|u\|_{Y_T}, \|v\|_{Y_T})$, $b(f, \|u\|_{Y_T}, \|v\|_{Y_T})$, что

$$\|\Phi u - \Phi v\|_{Y_T} \le aT\|u-v\|_{Y_T} + b\int\limits_0^T \|\Phi u - \Phi v\|_{Y_s}\|ds.$$

Тогда согласно лемме Гронуолла

$$\|\Phi u - \Phi v\|_{Y_T} \le a(f, \|u\|_{Y_T}, \|v\|_{Y_T})T\|u-v\|_{Y_T}e^{b(f,\|u\|_{Y_T},\|v\|_{Y_T})T}.$$

Выберем некоторое $T > 0$ и положим $u_1(t) = u_0$, $t \in [-T, T]$. Исследуем последовательность итераций $\{u_n\}$ со значениями в банаховом пространстве $Y_T = C([-T,T], H^1)$, определяемую реккурентно равенствами $u_{n+1} = \mathbf{\Phi}(u_n)$, $n \in \mathbf{N}$.

Докажем сходимость последовательности итераций $u_{n+1} = \mathbf{\Phi}u_n$, $n \in \mathbf{N}$, в пространстве $Y_T = C([-T,T], H^1)$ при условии $u_0 \in H^1$ и условии достаточной малости $T > 0$.

Для каждого $T > 0$ и $u_0 \in H^1$ через $Z(T, u_0, 2)$ обозначим выпуклое замкнутое множество функций из $Y = C([-T,T], H^1)$, удовлетворяющих равенству $u(0) = u_0$ и неравенству $\|u\|_{C([-T,T],H^1)} \le 2\|u_0\|_{H^1}$.$\blacksquare$

Лемма 4. *Для каждого $u_0 \in H^1$ существует такое $\hat{T} > 0$, зависящее только от $\|u_0\|_{H^1}$, что $\mathbf{\Phi}(Z(T, u_0, 2)) \subset Z(T, u_0, 2)$.*

Действительно, в силу леммы 2, для любого $u \in Z(T, u_0, 2)$ выполняются включение $\mathbf{\Phi}u\|_{H^1} \in Y_T$ и неравенство $\|\mathbf{\Phi}u\|_{Y^T} \le (\|u_0\|_{H^1} + A(\|u_0\|_{H^1}, 2\|u_0\|_{H^1})T)e^{B(\|u_0\|_{H^1},\|u_0\|_{H^1})T}$. Поскольку предел правой части при $T \to +0$ равен $\|u_0\|_{H^1}$, то существует такое зависящее только от $\|u_0\|_{H^1}$ число $\hat{T}(\|u_0\|_{H^1})$, что при всех $T \in [0, \hat{T}]$ выполняется неравенство $\|\mathbf{\Phi}u\|_{Y^T} \le 2\|u_0\|_{H^1}$.$\blacksquare$

Лемма 5. *Для любого $u_0 \in H^1$ существует такое зависящее только от $\|u_0\|_{H^1}$ число $T_* \in (0, \hat{T})$, что отображение $\mathbf{\Phi}|_{Z(T_*,u_0,2)}$ является сжимающим от отображением выпуклого замкнутого подмножества $Z(T_*, u_0, 2)$ банахова пространства Y_{T_*} в себя.*

В силу леммы 4 отображение $\mathbf{\Phi}$ отображает множество $Z(T_*, u_0, 2)$ в себя при любых $T_* \in [0, \hat{T}]$.

Выберем некоторое $T \in [0, \hat{T}]$. В силу леммы 3 для любых $u, v \in Z(T, u_0, 2)$ справедливо неравенство $\|\mathbf{\Phi}(u) - \mathbf{\Phi}(v)\|_{Y_T} \le Ta(f, \|u_0\|_{H^1}, 2\|u_0\|_{H^1})\|u-v\|_{Y_T}e^{b(f,\|u_0\|_{H^1},2\|u_0\|_{H^1})T}$.

Осюда вытекает существование такого зависящего только от $\|u_0\|_{H^1}$ числа $T_* \in (0, \hat{T})$, что отображение $\mathbf{\Phi}$ отображает множество $Z(T_*, u_0, 2)$ в себя и является сжатием, причем коэффициент сжатия $\lambda = \lambda(T_*)$ отображения $\mathbf{\Phi}$ на множестве $Z(T_*, u_0, 2)$ не превосходит величины $T_* a(f, \|u_0\|_{H^1}, 2\|u_0\|_{H^1}) e^{b(f, \|u_0\|_{H^1}, 2\|u_0\|_{H^1}) T_*} < 1.\blacksquare$

Доказательство теоремы 1

Фиксируем некоторое $T > 0$ и обозначим через Y_T пространство $C([-T, T], H^1)$. Рассмотрим отображение пространства Y_T в себя, задаваемое равенством $v = \mathbf{\Phi}(u)$, где

$$v(t) = (\mathbf{\Phi} u)(t) = e^{-it\mathbf{\Delta}} u_0 + \int\limits_0^t e^{-i(t-s)\mathbf{\Delta}} f(|u(s, \cdot)|^2) v(s) ds, \; t \in [-T, T]. \tag{5}$$

Локальное существование. Так как отображение $\mathbf{\Phi}$ является сжимающим отображением выпуклого замкнутого подмножества $Z_{u_0, T_*, 2}$ пространства Y в себя с коэффициентом сжатия $\lambda < 1$, то, следовательно, отображение $\mathbf{\Phi}$ имеет в множестве $Z_{u_0, T_*, 2}$ единственную неподвижную точку u_*, а задача Коши (2), (3) на отрезке $[-T_*, T_*]$ имеет H^1-решение u_*, совпадающее с неподвижной точкой отображения $\mathbf{\Phi}$.

Единственность локального H^1-решения. Если при некотором $T > 0$ функция $u \in Y_T$ является решением задачи Коши (1) – (2), то в силу определения 1 она является неподвижной точкой отображения $\mathbf{\Phi}: \; Y_T \to Y_T$. Следовательно, согласно доказанному, для каждого $u_0 \in H^1$ существует такое $T_* = T_*(\|u_0\|_{H^1}) > 0$, что в пространстве Y_{T_*} отображение $\mathbf{\Phi}$ не может иметь две различные неподвижные точки, а задача (1) – (2) не может иметь на отрезке $[-T_*, T_*]$ два различных решения. $\blacksquare$

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть $l \in \mathbf{N}$. Для каждого $u_0 \in H^l$ существует такая зависящая только от $\|u_0\|_{H^l}$ величина $T_* > 0$, что на отрезке $[-T_*, T_*]$ задача Коши (1) – (2) имеет единственное H^l-решение.

2. Теорема о сохранении энергии

Докажем сохранение на H^1-решении уравнения (1) энергетического функционала $E(u)$

$$E(u) = \int_{-\pi}^{\pi} (-(\bigtriangledown u(x) \bigtriangledown \bar{u}(x) + F(u\bar{u})) dx,$$

где $F(\omega) = \int\limits_0^{\omega} f(s) ds$.

Теорема 2. *Если функция $u(x, t)$ является H^1-решением задачи Коши (1) – (2) в смысле определения 1, то $E(u(t)) = E(u_0)$ при всех $t > 0$.*

Лемма 6. *Если функция $u(x, t)$ является H^2-решением задачи Коши (1) – (2) в смысле определения 1, то $E(u(t)) = E(u_0)$ при всех $t > 0$.*

Действительно, в силу уравнения Шредингера получаем

$$\frac{d}{dt} E(u(t))|_{t=0} = \int_{-\pi}^{\pi} (-(\bigtriangledown u(t, x) \bigtriangledown \frac{d}{dt} \bar{u}(t, x)) - (\bigtriangledown \frac{d}{dt} u(t, x) \bigtriangledown \bar{u}(t, x)) +$$

$$+ V(u\bar{u})(u(t, x) \frac{d}{dt} \bar{u}(t, x) + \frac{d}{dt} u(t, x) \bar{u}(t, x))) dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [(\mathbf{\Delta} u + V(u\bar{u}) u) \frac{d}{dt} \bar{u}(t, x) + (\mathbf{\Delta} \bar{u} + V(u\bar{u}) \bar{u}) \frac{d}{dt} u(t, x)] dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [-i \frac{du}{dt} \frac{d}{dt} \bar{u}(t, x) + i \frac{d\bar{u}}{dt} \frac{d}{dt} u(t, x)] dx = 0.$$

Таким образом, для H^2-решений сохранение энергии доказано.

Пусть теперь $u_0 \in H^1$ и $\{u_{0,k}\}$ – последовательность начальных условий из пространства H^2, сходящаяся по H^1-норме к u_0. Тогда $E(u_{0,k}) \to E(u_0)$ при $k \to \infty$.

В силу теоремы 1 существует отрезок $[-T, T]$, на котором задачи Коши для уравнения Шредингера с начальными условиями u_0 и $u_{0,k}$, $k \in \mathbf{N}$, имеют решения $u(t)$, $u_k(t)$, $t \in [-T, T]$. Причем поскольку последовательность $\{u_{0,k}\}$ ограничена в пространстве H^1, то последовательность $\{u_k\}$ ограничена в пространстве Y_T в силу леммы 2. Для каждого $k \in \mathbf{N}$ имеет место равенство

$$u(t) - u_k(t) = e^{-i\boldsymbol{\Delta} t}(u_0 - u_{0,k}) +$$

$$+\int\limits_0^t e^{-i\boldsymbol{\Delta}(t-s)}[f(|u(s)|^2)(u(s) - u_k(s)) + u_k(s)(f(|u(s)|^2) - f(|u_k(s)|^2))]ds,\ t \in [-T, T].$$

Поэтому сходимость последовательности $\{u_k\}$ по норме пространства Y_T к функции u следует из леммы Гроноулла.

Следовательно, из сходимости последовательности $\{u_k\}$ по норме пространства Y_T к функции u следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{t\in[-T,T]} |E(u_k(t)) - E(u(t))| = 0$.

Поскольку в силу леммы 6 $E(u_k(t)) = E(u_{0,k})$, то $E(u(t)) = E(u_0)$ при всех $t > 0$.

3. Теоремы о глобальной продолжимости. R. Glassey (1977), P. Zhidkov (2001).

Теорема 3. *Если справедливо неравенство $p < 4$, то для любого $u_0 \in H^1$ задача Коши (1), (2), (4) имеет единственное H^1-рещение на полуоси R_+, причем значения этого решения ограничены по H^1-норме на полуоси R_+.*

Доказательство теоремы 3. Согласно теореме 1 задача Коши (1) – (2) имеет H^1-решение на некотором промежутке $[0, T_*]$, $T_* > 0$. Пусть $T_1 \geq T_*$ – точная верхняя грань множества таких значений $T > 0$, что задача Коши (1) – (2) имеет H^1-решение на промежутке $[0, T)$. Тогда если $T_1 = +\infty$, то утверждение теоремы 3 доказано.

Предположим противное, что $T_1 < +\infty$. Тогда на промежутке $[0, T_1)$ определено решение u задачи Коши (1) – (2) и, в силу теоремы 2, справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - F(|u(t)|^2) = -E(u_0),\ t \in [0, T_1).$$

Согласно неравенству Гельдера

$$\|u\|_{p+2} \leq \|u\|_2^{1-\theta}\|u\|_r^{\theta}, \tag{7}$$

где $\theta \in (0, 1)$, $r > 2$ и $\frac{1}{p+2} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{r}$, и, следовательно, $\theta = \theta(r) = \frac{rp}{2(p+2)(r-2)}$.

Выберем $r > 2$ в (7) таким образом, чтобы выполнилось неравенство $\theta(r)(p+2) < 2$ (то есть $\frac{rp}{2(r-2)} < 2$), что всегда можно сделать при $p < 4$, так как $\frac{rp}{2(r-2)} \to \frac{p}{2}$ при $r \to +\infty$, а согласно предположению теоремы $p < 4$. Тогда $\|u\|_{p+2}^{p+2} \leq \|u\|_2^{(p+2)(1-\theta(r))}\|u\|_r^{(p+2)\theta(r)}$ в силу (7), а поскольку в силу теоремы Соболева при любом $r < 2^* = +\infty$ справедлива оценка $\|u\|_r \leq C_r\|\nabla u\|_2$, то из условия сохранения энергии получаем следующее соотношение:

$$\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 = -E(u_0) + F(|u|^2) \leq -E(u_0) + \frac{C_0}{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+2} \leq -E(u_0) + C_1\|\nabla u\|_2^{\beta}, \tag{8}$$

где $\beta = \theta(r)(p+2) < 2$.

Следовательно, при некоторых $c_2 \in R$ и $c_3 > 0$ справедливо неравенство $\|\nabla u\|_2^2 \leq c_2 + c_3\|\nabla u\|_2^{\beta}$, где $\beta < 2$. Поэтому существует такая постоянная $M > 0$, что $\|u(t)\|_{H^1} = \|\nabla u(t)\|_2 \leq M$ для любого $t \in [0, T_1)$.

Согласно теореме 1 существует такое $T_*(M) > 0$, что задача Коши (1) – (2) с начальным условием $u_0 \in H^1$ таким, что $\|u_0\|_{H^1} \leq M$, имеет единственное решение на отрезке

$[-T_*(M), T_*(M)]$. Поставим задачу Коши для уравнения (1) с начальным условием в точке $t_0 = T_1 - \frac{1}{2}T_*(M)$, задавыемым равенством

$$u|_{t=t_0} = u(T_1 - \frac{1}{2}T_*(M)) = u_0^*. \tag{9}$$

Так как $\|u_0^*\|_{H^1} \leq M$, то задача Коши (1), (9) имеет единственное решение на отрезке $[T_1 - \frac{3}{2}T_*(M), T_1 + \frac{1}{2}T_*(M)]$, следовательно, исходная задача (1) – (2) имеет решение на отрезке $[0, T_1 + \frac{1}{2}T_*(M)]$, а это противоречит определению величины T_1. Следовательно, выполняется равенство $T_1 = +\infty$.■

4. Теоремы о разрушении решений на ограниченном промежутке

Разрушение решения. Рассмотрим явление разрушения решения задачи Коши (1)–(2) в случае уравнения Шредингера с потенциалом $f(s) = s^{\frac{p}{2}}$, $s \geq 0$. Согласно определению 1 H^l-решения задачи Коши (1)-(2) как H^1-решение, так и H^2-решение на всем промежутке своего существования удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$u(t, -\pi + 0) = u(t, \pi - 0) = 0,\ t \in [0, T], \tag{10}$$

Теорема 4. *Если $p > 4$ то тогда существует $u_0 \in H^1$ такое, что $E(u_0) < 0$, $J(u_0) > 0$. Тогда существует число $T^* = T^*(G(u_0), E(u_0)) = \frac{1}{4pE(u_0)}(\sqrt{J(u_0)^2 - 8pE(u_0)G(u_0)} + J(u_0)) > 0$ такое, что точная верхняя грань T_1 промежутка существования H^1-решения задачи Коши (1), (2), (4) удовлетворяет условию $T_1 \leq T^*$.*

Кроме того, при этом $T_1 \in [T_*(\|u_0\|_{H_1}), T^*(G(u_0), E(u_0))]$ и справедливы равенства $\lim\limits_{t \to T_1 - 0} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty$; $\lim\limits_{t \to T_1 - 0} \|u(t)\|_{L_{p+2}} = +\infty$.

Согласно теореме 1 о существовании и единственности локального H^1-решения задача Коши (1) – (2) при каждом $u_0 \in H^1$ имеет единственное H^1-решение $u \in C([0, T_1), H^1)$ на некотором промежутке $[0, T_1)$, причем в силу теоремы 2 имее место равенство $E(u(t)) = E(u_0)$, $t \in [0, T_1)$.

Для доказательства теоремы 4 изучим изменение на промежутке существования H^1-решения $[0, T)$ величин $J(t)$, $G(t)$, $t \in [0, T]$. Выведем уравнения, которым подчиняется закон изменения этих величин.

Лемма 7. *Если функция u является H^1-решением задачи (1) – (2), то справедливо равенство*

$$\frac{d}{dt}G(u(t)) = i \int\limits_{(-\pi,\pi)} ((x, x)(\Delta\bar{u}(t, x)u(t, x) - \Delta u(t, x)\bar{u}(t, x)))dx. \tag{11}$$

Доказательство. Если функция u является H^1-решением задачи (1), (2), (10), то она имеет производную $\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = -i(\Delta u(t, x) + Vu(t, x))$, причем поскольку функция u является H^1-решением, то $-\Delta u \in C((0, T), W_2^{-1}(-\pi, \pi))$ и $Vu(t, x) \in C((0, T), \mathrm{C}([-\pi, \pi]))$. Так как $C([-\pi, \pi]) \subset W_2^{-1}(-\pi, \pi)$ то $C((0, T), C([-\pi, \pi])) \subset C((0, T), W_2^{-1}(-\pi, \pi))$, и поэтому $\Delta u(t, x) + Vu(t, x)) \in C((0, T), W_2^{-1}(-\pi, \pi))$. Если $\bar{u}(t, x) \in H^1$, то $(x, x)\bar{u}(t, x) \in H^1$, поэтому при всех $t \in (0, T)$ определено действие функционала $i\frac{d}{dt}u(t, \cdot) \in W_2^{-1}(-\pi, \pi)$ на элемент $(x, x)\bar{u}(t, x) \in H^1$. Следовательно, функция $g(t) = G(u(t))$, $t \in [0, T)$, дифференцируема и справедлива формула (11).

Лемма 8. *Если функция u является H^2-решением задачи (1)-(2), то справедливо равенство*

$$\frac{d}{dt}G(u(t)) = 2i \int\limits_{(-\pi,\pi)} ((x, \nabla u(t, x))\bar{u}(t, x) - (x, \nabla\bar{u}(t, x))u(t, x))dx,\ t \in (0, T).$$

Согласно лемме 7 справедливо равенство (11). Поскольку функция u являктся H^2-решением задачи (1) – (2), то $\frac{d}{dx}((x,x)u(t,x)\nabla\bar{u}(t,x)) = (x,x)(\Delta\bar{u}(t,x)u(t,x) + (x,x)|\nabla u(t,x)|^2 + 2(x,\nabla\bar{u}(t,x))u(t,x)$ и равенство

$$\int\limits_{(-\pi,\pi)} \frac{d}{dx}((x,x)u(t,x)\nabla\bar{u}(t,x)) = \pi^2[u(t,\pi)\nabla u(t,\pi) - u(t,-\pi)\nabla u(t,-\pi)] = 0$$

справедливо в силу выполнения граничных условий (10) для H^2-решения и существования у такого решения следов производной $\nabla u(t,\pm\pi) \in C([0,T])$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}G)(u(t)) = -2i \int\limits_{(-\pi,\pi)} [(x,\nabla\bar{u}(t,x))u(t,x) - (x,\nabla u(t,x))\bar{u}(t,x)]dx = -J(t).\blacksquare$$

Для исследования дифференциального уравнения, описывающего эволюцию величины $J(t)$, потребуется некоторое усиление предположений о гладкости решения задачи Коши (1), (2), (10).

Лемма 9. *Предположим, что на промежутке* $[0,T]$ *существует* H^2*-решение задачи Коши (1), (2), (10). Тогда функция* J *удовлетворяет на промежутке* $[0,T]$ *дифференциальному уравнению*

$$\frac{d}{dt}J(t) = 2\int\limits_{(-\pi,\pi)} \{(x,\nabla\bar{u}(t,x))(\Delta u(t,x) + Vu(t,x)) + (x,\nabla u(t,x))(\Delta\bar{u}(t,x) + V\bar{u}(t,x))\}dx -$$

$$-2\int\limits_{(-\pi,\pi)} \{(x,\nabla(\Delta\bar{u}(t,x) + V\bar{u}(t,x))u(t,x) + (x,\nabla(\Delta u(t,x) + Vu(t,x))\bar{u}(t,x)\}dx. \qquad (12)$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = -i(\Delta u(t,x) + Vu(t,x))$, где $V = |u(t,x)|^p$, то справедливо следующее равенство

$$\frac{d}{dt}J(t) = 2i\int\limits_{(-\pi,\pi)} \{(x,\nabla\bar{u}(t,x))(-i(\Delta u(t,x)+Vu(t,x))) + (x,\nabla(i(\Delta\bar{u}(t,x)+V\bar{u}(t,x)))u(t,x) +$$

$$+(x,\nabla(i(\Delta u(t,x) + Vu(t,x)))\bar{u}(t,x) - (x,\nabla u(t,x))(i(\Delta\bar{u}(t,x) + V\bar{u}(t,x)))\}dx,$$

поэтому справедливо равенство (12).

Интеграл от каждого слагаемого под знаком интеграла в выражении (12) при условии, что функция u является H^2-решением задачи Коши, корректно определен как действие на элемент пространства Соболева линейного непрерывного функционала из сопряженного пространства. Так, $(x,\nabla(\Delta u(t,x))) \in W_2^{-1}(-\pi,\pi)$ и $(x,\nabla(V\bar{u}(t,x))) \in C([-\pi,\pi]) \subset W_2^{-1}$, но поскольку $u \in W_2^2(-\pi,\pi)$, то второе слагаемое под знаком интеграла определено; а первое слагаемое под знаком интеграла определено, поскольку $\Delta u(t,x) \in L_2(-\pi,\pi)$ $V\bar{u}(t,x) \in C([-\pi,\pi]) \subset L_2(-\pi,\pi)$ и $(x,\nabla\bar{u}(t,x)) \in W_2^1(-\pi,\pi)$.

Таким образом, если функция u является H^2-решением задачи Коши (1) – (2), то функция J непрерывно дифференцируема и справедливо равенство (12).

Для выполнения интегрирования по частям гладкости H^2- решения уже недостаточно. Ибо, как показано ниже в формуле (14), для интегрирования по частям во втором интеграле в выражении (12) требуется существование следа на границе промежутка $(-\pi,\pi)$ у функции $\Delta u(t,\cdot)$.

Поэтому рассмотрим поведение функционала J для H^3-решения.

Лемма 10. *Если функция* u *является* H^3*-решением задачи Коши* (1) – (2), то для функции J справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt}J(t) \geq -4pE.$$

Действительно, поскольку

$$\frac{d}{dx}(x(\Delta\bar{u}(t,x)+V\bar{u}(t,x)))u(t,x)) = (x,\nabla(\Delta\bar{u}(t,x)+V\bar{u}(t,x)))u(t,x) + (\Delta\bar{u}(t,x)+$$

$$+V\bar{u}(t,x)))u(t,x) + (x,\nabla u(t,x))(\Delta\bar{u}(t,x)+V\bar{u}(t,x)), \qquad (13)$$

и

$$\int\limits_{(-\pi,\pi)} \frac{d}{dx}(x(\Delta\bar{u}(t,x)+V\bar{u}(t,x)))u(t,x))dx =$$

$$= \pi(\bar{u}''(t,\pi)u(t,\pi)+|u(t,\pi)|^{p+2}) - (-\pi)(\bar{u}''(t,-\pi)u(t,-\pi)+|u(t,-\pi)|^{p+2}), \qquad (14)$$

то в случае однородного граничного условия Дирихле (10) справедливо равенство $\int\limits_{(-\pi,\pi)} \frac{d}{dx}(x(\Delta\bar{u}(t,x)+V\bar{u}(t,x)))u(t,x))dx = 0$, ибо при всех $t\in[0,T]$ выполняется граничное условие $u(t,\pm(\pi-0))=0$ и для H^3-решения функция $u''(t,x)$, $x\in(-\pi,\pi)$ имеет конечные пределы при $x\to\pm(\pi-0)$.

Поэтому в силу равенства (13)

$$\int\limits_{(-\pi,\pi)} (x,\nabla(\Delta\bar{u}(t,x)+V\bar{u}(t,x)))u(t,x)dx = -\int\limits_{(-\pi,\pi)} (\Delta\bar{u}(t,x)+$$

$$+V\bar{u}(t,x)))u(t,x) + (x,\nabla u(t,x))(\Delta\bar{u}(t,x)+V\bar{u}(t,x))dx$$

Следовательно, согласно равенству (12),

$$\frac{d}{dt}J(t) = 2\int\limits_{(-\pi,\pi)} \{(x,\nabla\bar{u}(t,x))(\Delta u(t,x)+Vu(t,x)) + (x,\nabla u(t,x))(\Delta\bar{u}(t,x)+V\bar{u}(t,x))\}dx +$$

$$+2\int\limits_{(-\pi,\pi)} (\Delta\bar{u}(t,x)+V\bar{u}(t,x)))u(t,x) + (x,\nabla u(t,x))(\Delta\bar{u}(t,x)+V\bar{u}(t,x))dx +$$

$$+2\int\limits_{(-\pi,\pi)} (\Delta u(t,x)+Vu(t,x)))\bar{u}(t,x) + (x,\nabla\bar{u}(t,x))(\Delta u(t,x)+Vu(t,x))dx =$$

$$= 4\int\limits_{(-\pi,\pi)} \{(x,\nabla\bar{u}(t,x))(\Delta u(t,x)+Vu(t,x)) + (x,\nabla u(t,x))(\Delta\bar{u}(t,x)+V\bar{u}(t,x))\}dx +$$

$$+2\int\limits_{(-\pi,\pi)} (\Delta u(t,x)\bar{u}(t,x)+\Delta\bar{u}(t,x)u(t,x))dx + 4\int\limits_{(-\pi,\pi)} |u(t,x)|^{p+2}dx. \qquad (15)$$

Рассмотрим сначала слагаемое

$$I_1 = \int\limits_{(-\pi,\pi)} \{(x,\nabla\bar{u}(t,x))\Delta u(t,x) + (x,\nabla u(t,x))\Delta\bar{u}(t,x)\}dx.$$

Поскольку

$$\frac{d}{dx}[\nabla u(t,x)(x,\nabla\bar{u}(t,x))] = (x,\nabla\bar{u}(t,x))\Delta u(t,x) + |\nabla u(t,x)|^2 + x\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{u}(t,x),$$

то

$$I_1 = \int\limits_{(-\pi,\pi)} \{-2|\nabla u(t,x)|^2 - (x,\nabla|\nabla u(t,x)|^2)\}dx +$$

$$+ (\nabla u(t,x)(x,\nabla \bar{u}(t,x)) + \nabla \bar{u}(t,x)(x,\nabla u(t,x)))|_{x=-\pi}^{x=\pi}.$$

Интегрируя по частям предпоследнее слагаемое, получим

$$I_1 = -\int\limits_{(-\pi,\pi)} |\nabla u(t,x)|^2 dx - x|\nabla u(t,x)|^2|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \nabla \bar{u}(t,x)(x,\nabla u(t,x)))|_{x=-\pi}^{x=\pi} \geq -\int\limits_{(-\pi,\pi)} |\nabla u(t,x)|^2 dx.$$

Для второго интеграла в выражении (15) имеем

$$\int\limits_{(-\pi,\pi)} (\Delta u(t,x)\bar{u}(t,x) + \Delta \bar{u}(t,x)u(t,x))dx =$$

$$= -2\int\limits_{(-\pi,\pi)} |\nabla u(t,x)|^2 dx + (\nabla u(t,x)\bar{u}(t,x) + \nabla \bar{u}(t,x)u(t,x))|_{x=-\pi}^{x=\pi}.$$

Внеинтегральное слагаемое равно нулю согласно граничному условию (10) и в силу существования следа у градиента H^3-решения на границе области (промежутка $(-\pi,\pi)$).

Кроме того, определив функцию $F(s) = \frac{2}{p+2} s^{\frac{p+2}{2}}$, получим

$$\int\limits_{(-\pi,\pi)} ((x,\nabla \bar{u}(t,x))Vu(t,x) + (x,\nabla u(t,x))V\bar{u}(t,x))dx = \int\limits_{(-\pi,\pi)} (x,\nabla F(|u(t,x)|^2))dx =$$

$$= xF(|u(t,x)|^2))|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int\limits_{(-\pi,\pi)} F(|u(t,x)|^2)dx.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}J(t) \geq -8\int\limits_{(-\pi,\pi)} |\nabla u(t,x)|^2 dx + 4\int\limits_{(-\pi,\pi)} |u(t,x)|^{p+2}(1 - \frac{2}{p+2})dx,$$

то есть

$$\frac{d}{dt}J(t) \geq -4p\int\limits_{(-\pi,\pi)} (\frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2 - \frac{1}{p+2}|u(t,x)|^{p+2})dx - (8-2p)\int\limits_{(-\pi,\pi)} |\nabla u(t,x)|^2 dx \geq -4pE$$

при условии, что $p > 4$.■

Следовательно, $J(t) \geq J(0) - 4pEt$, $t \in [0,T]$, а так как $\frac{d}{dt}G(t) = -J(t)$, то $\frac{d}{dt}G(t) \leq 4pEt - J(0)$. Таким образом, $G(t) \leq G(0) - J(0)t + 2pEt^2$, $t \in [0,T]$ и справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть $p > 4$ и начальная функция $u_0 \in H^3(-\pi,\pi)$ удовлетворяет условию $E(u_0) < 0$. Тогда длина T_3 интервала существования H^3-решения задачи Коши (1), (2), (10) ограничена сверху величиной $T^*(u_0) = \frac{1}{4pE(u_0)}(\sqrt{J(u_0)^2 - 8pE(u_0)G(u_0)} + J(u_0))$. Причем если H^3-решение существует на интервале $[0,T_3)$, то $\lim\limits_{t\to T_3-0} \|u(t,\cdot)\|_{H^1} = +\infty$, $\lim\limits_{t\to T_3-0} \|u(t,\cdot)\|_{L_{p+2}} = +\infty$ и $\lim\limits_{t\to T_3-0} \|u(t,\cdot)\|_{L_\infty} = +\infty$.*

Теорема 6. *Пусть $u_0 \in H^l$ при некотором $l \in \mathbf{N}$ и пусть на отрезке $[0,T]$ существует H^1-решение $u(t;u_0)$, $t \in [0,T]$ задачи Коши (1), (2), (10). Тогда $u(t;u_0) \in H^l$ при любом $t \in [0,T]$.*

Действительно, если $u(t;u_0)$, $t \in [0,T]$ является H^1-решением задачи (1), (2), (10), то в силу теоремы вложения $u(t;u_0) \in C([0,T],C([-\pi,\pi]))$. Следовательно, $V = |u(t;u_0)|^p \in C([0,T],C([-\pi,\pi]))$.

Сначала рассмотрим случай $l = 2$. Из уравнения (1) следует, что

$$i\frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial x}u(t;u_0)) = \Delta(\frac{\partial}{\partial x}u(t;u_0) + (1+p)V(\frac{\partial}{\partial x}u(t;u_0)) + p|u(t;u_0)|^{p-2}(u(t;u_0)^2(\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(t;u_0))), \quad (16)$$

а вторая производная решения по пространственной переменной удовлетворяет уравнению

$$i\frac{d}{dt}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t;u_0)) = \Delta(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t;u_0) + (1+p)V(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t;u_0)) + p|u(t;u_0)|^{p-2}(u(t;u_0)^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{u}(t;u_0))) +$$

$$+ V_1(u,\bar{u})(\frac{\partial}{\partial x}u(t;u_0)))^2 + V_2(u,\bar{u})|\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(t;u_0))|^2 + V_3(u,\bar{u})(\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(t;u_0)))^2, \quad (17)$$

в котором V_1, V_2, V_3 – непрерывные комплекснозначные функции от пары комплексных переменных.

Заметим, что

$$\|V_1(u,\bar{u})(\frac{\partial}{\partial x}u(t;u_0)))^2\|_{C([0,T],H)} \leq$$

$$\leq \|V_1(u,\bar{u})\|_{C([0,T],L_\infty)}\|\frac{\partial}{\partial x}u(t;u_0))\|_{C([0,T],L_\infty)}\|\frac{\partial}{\partial x}u(t;u_0))\|_{C([0,T],H)} \leq C_V\|u\|_{H^1}C_{emb}\|u\|_{H^2}\|u\|_{H_1}.$$

Поэтому для H^1-решения u задачи Коши (1), (2), (10) с начальной функцией $u_0 \in H^2$ и нелинейной функцией $f \in C^2_{loc}(\mathbf{C})$ справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{H^2} \leq \|u_0\|_{H^2} + C(\|u\|_{C([0,T],H^1)})\int\limits_0^t \|u(s)\|_{H^2}ds.$$

Из полученной оценки следует, что $\|u\|_{C([0,T],H^2)} \leq \|u_0\|_{H^2}e^{TC(\|u\|_{C([0,T],H^1)})}$.

Случай произвольного l рассматривается с применением метода математической индукции. ■

Вернемся к доказательству теоремы 4. Пусть $u_0 \in H^3$. Тогда согласно следствию 1 к теореме 1 существует такое $T > 0$, что задача Коши имеет единственное H^3-решение на промежутке $[0,T)$. Если T_3^* есть точная верхняя грань длин интервалов, на которых существует H^3-решение задачи Коши, а T_1^* – точная верхняя грань длин интервалов, на которых существует H^1-решение задачи Коши, то согласно теореме 6 $T_1^* = T_3^*$.

Так как на промежутке $[0,T_1^*)$ существует H^3-решение задачи Коши, то на этом интервале функции J, G удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных неравенств

$$\frac{d}{dt}G(t) = -J(t),\ t \in (0,T_1^*); \qquad \frac{d}{dt}J(t) \geq -4pE(u_0),\ t \in (0,T_1^*).$$

Поэтому $T_1^* \leq \frac{1}{4pE(u_0)}(\sqrt{J(u_0)^2 - 8pE(u_0)G(u_0)} + J(u_0))$, то есть промежуток существования H^1-решения конечен, на промежутке $[0,T_1^*)$ существует единственное H^3-решение задачи Коши, а при $t \to T_1^* - 0$ выполняются условия

$$\lim_{t\to T_1^*-0}\|u(t,\cdot)\|_{H^1} = +\infty; \quad \lim_{t\to T_1^*-0}\|u(t,\cdot)\|_{L_{p+2}} = +\infty.$$

При этом в силу теоремы 2 следующие функции принимают на всем промежутке $[0,T_1^*)$ постоянные значения:

$$P(t) = \|u(t)\|_H^2,\ t \in [0,T_1^*); \quad E(t) = \int\limits_{-l}^{l}[\frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2 - \frac{1}{p+2}|u(t,x)|^{p+2}]dx,\ t \in [0,T_1^*). ■$$

Литература

1. *Gasinski L., Papageorgiou N.S.* Nonlinear analysis. Series in Mathematical Analysis and Applications / Ed. by R.P. Agarwal and D. O'Regan. 2005. Vol. 9.
2. *Йаакбариех А., Сакбаев В.Ж.* Корректность задачи для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента // Изв. вузов. сер. матем. 2015. № 4. С. 17–25.
3. *Митидиери, Похожаев С.И.* Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. 2001. Т. 234.
4. *Fujita H.* // J. Fac. Sci. Univ. Proc. Tokio, Sec. 1A. 1966. V. 13. 109–124.
5. *Zhidkov P.E.* Lecture Notes in Math. 2001.
6. *Сакбаев В.Ж.* Градиентный взрыв решений задачи Коши для уравнения Шрёдингера // Тр. МИАН. 2013. Т. 283. С. 171–187.
7. *Glassey R.T.* On the blowing up of solution to the Cauchy Problem for nonlinear Schrodinger equations // J. Math. Phys. 1977. V. 18:9. P. 1794–1797.
8. *Ginibre J., Velo G.* On a class of nonlinear Schrodinger equations. I. The Cauchy problem, general case // J. Funktional Analysis 1979. V. 32, N 1. P. 1–32.

References

1. *Gasinski L., Papageorgiou N.S.* Nonlinear analysis. Series in Mathematical Analysis and Applications. Ed. by R.P. Agarwal and D. O'Regan. 2005. Vol. 9.
2. *Yaakbarieh A., Sakbaev V. Zh.* The correctness problem for parabolic differential-difference equations with shifts temporal variables. News of the Universities, mathematics part. 2015. N 4. P. 17–25. (in Russian).
3. *Mitidieri, Pohozhaev S.I.* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2001. V. 234. (in Russian).
4. *Fujita H.* J. Fac. Sci. Univ. Proc. Tokio, Sec. 1A. 1966. V. 13. 109–124.
5. *Zhidkov P.E.* Lecture Notes in Math. 2001.
6. *Sakbaev V. Zh.*, The explosion of the gradient of solutions of the Cauchy problem for the schroedinger equation. Proceedings MIAN. 2013. V. 283 (2013), P. 171–187. (in Russian).
7. *Glassey R.T.* On the blowing up of solution to the Cauchy Problem for nonlinear Schrodinger equations. J. Math. Phys. 1977. V. 18:9. P. 1794–1797.
8. *Ginibre J., Velo G.* On a class of nonlinear Schrodinger equations. I. The Cauchy problem, general case. J. Funktional Analysis 1979. V. 32, N 1. P. 1–32.

Поступила в редакцию 12.07.2015