ОТЗЫВ
НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ
на диссертацию
Шубина Андрея Витальевича
«Простые числа в специальных последовательностях», представленную к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 - дискретная математика и математическая кибернетика

Главная цель работы А.В. Шубина – дать ответ на следующий вопрос. Пусть $0 < \alpha < 1$ – фиксированное число, и пусть $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\alpha)$ – множество тех натуральных чисел n, у которых дробная доля $\{n^{\alpha}\}$ меньше $\frac{1}{2}$. Занумеруем все подряд идущие простые числа из $\mathbb{E}$ по возрастанию: $q_1 < q_2 < \ldots < q_n < q_{n+1} < \ldots$. Пусть, далее, $m \geqslant 1$ – фиксированное целое число. Верно ли, что существует постоянная $c = c(m)$ такая, что неравенство

$$q_{n+m} - q_n \leqslant c(m) \tag{1}$$

будет выполнено для бесконечного множества номеров n?

С одной стороны, исследование множества простых из $\mathbb{E}$ было начато ещё И.М. Виноградовым в 1940 г. с помощью созданного им метода тригонометрических сумм и продолжено многочисленными последователями (Ю.В. Линник, Р.М. Кауфман, С.А. Гриценко, Д.И. Толев, К. Рен, Р. Бейкер, Г. Колесник, М.Е. Чанга и др.). С другой стороны, период с 2006 по 2016 гг. ознаменовался появлением целого ряда прорывных работ, связанных с доказательством существования «аномально малых» расстояний между соседними простыми числами натурального ряда (Д. Голдстон, Я. Пинтц, К.-Й. Йилдирим, Й. Мотохаши, И. Жанг, Дж. Майнард, А. Грэнвилл и др.).

Поэтому перед А.В. Шубиным стояла весьма непростая задача: изучить и творчески овладеть как классическими методами, восходящими к И.М. Виноградову, так и новейшими методами, созданными в последние полтора десятилетия. Эта задача была успешно решена соискателем. Полученные в ходе её решения результаты и составили представленную к защите работу. Перейдём к её содержанию.

В **первой главе** диссертации излагается история вопроса, намечаются цели работы и формулируются основные результаты (теоремы 1.1 - 1.5). Здесь же указывается на тесную связь задачи о существовании «малых» разностей $q_{n+m} - q_n$ с наличием аналога теоремы Бомбьери-Виноградова – оценки вида

$$\sum_{q \leqslant Q} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \leqslant X,\, p \in \mathbb{E} \\ p \equiv a \pmod q}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{p \leqslant X,\, p \in \mathbb{E}} 1 \right| \ll \frac{X}{(\ln X)^A}, \tag{2}$$

где $A > 0$ – сколь угодно большая постоянная, $Q = X^{\theta - \varepsilon}$, ε - сколь угодно малое положительное число, и, наконец, θ - некоторая постоянная с условием $0 < \theta \leqslant 1$, называемая «уровнем распределения». В частности, автор указывает на прямую связь между значением постоянной $c(m)$ в (1) со значением уровня распределения θ в (2): чем бóльшим можно взять θ в (2), тем меньшим можно сделать постоянную $c(m)$ в неравенстве (1) для бесконечного множества номеров n.

Во **второй главе** диссертации собраны воедино все основные обозначения, используемые автором, а также сформулированы (со ссылками на источники) вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основных теорем. Наличие этого небольшого по объёму раздела представляет, тем не менее, большое удобство для читателя.

В **третьей главе** автор показывает, как задача нахождения оценок типа (2) сводится к задаче отыскания оценок для величин вида

$$T = T(h) = \sum_{q \leqslant Q} \max_{(a,q)=1} \Big| \sum_{\substack{p \leqslant X,\, p \\ p \equiv a \pmod q}} \exp\left(2\pi i h p^{\alpha}\right) \Big| \tag{3}$$

(здесь $h \neq 0$ - не очень большое по модулю целое число). Такое сведение сразу показывает читателю, где находится «центр тяжести» исходной задачи.

В **четвёртой главе** соискатель доказывает оценку суммы (3) для случая $\theta = \frac{1}{3}$ и произвольного фиксированного нецелого $\alpha > 0$. Отметим, что подобный результат, отвечающий тому же уровню распределения $\theta = \frac{1}{3}$ и промежутку $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$ был получен в 2013 г. С.А. Гриценко и Н.А. Зинченко. Однако средств, ими применяемых, в рассматриваемом диапазоне изменения α ($\alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}$) уже недостаточно. В частности, при работе с возникающими тригонометрическими суммами вместо классической теоремы Й.Г. ван дер Корпута (лемма 2.3 работы) об оценке суммы «по k-й производной» автор использует более точный её аналог – теорему, установленную в 2017 г. Д. Хиз-Брауном (лемма 2.4). Сведение тригонометрической суммы из (3) по простым числам к двойным суммам двух типов с последующим сглаживанием проводится с помощью классического тождества И.М. Виноградова в форме Р. Вона (лемма 4.1).

Пятая глава работы наиболее ярко отражает оригинальный вклад диссертанта. Главнейшей заслугой автора является обнаружение им следующего замечательного факта. Оказывается, при малых α, а именно, при $0 < \alpha < \frac{1}{9}$, уровень распределения θ в (2) может быть взят бо́льшим $\frac{1}{3}$. Более точно, в этой главе автор доказывает оценку (2) для указанных α с $\theta = 2/5 - (3/5)\alpha$.

Доказательство этого результата объективно требует сложных аналитических инструментов и кропотливых вычислений. Этим вызван большой объём главы (43 страницы, т.е. около 60 % содержательной части диссертации).

В отличие от четвёртой главы, для исследования соответствующей суммы по простым числам требуются более тонкие средства. Так, вместо тождества Виноградова-Вона используется тождество Хиз-Брауна (лемма 5.1). Возникающие при этом кратные суммы сводятся к суммам уже не двух (как это было в предыдущей главе), а трёх типов. Если суммы первых двух типов исследуются по той же схеме, что и выше, то сумма третьего типа сводится с помощью технических лемм 5.2, 5.3 к «сглаженной» сумме по трём переменным. Впоследствии к суммам по первым двум переменным (из этих трёх) последовательно применяется формула суммирования Пуассона (лемма 5.4). Эта часть работы является наиболее трудной в техническом отношении. Для вычисления вкладов возникающих при этом тригонометрических интегралов с особенностями применяются леммы 5.5 и 5.6.

Тем не менее, автор успешно преодолевает все эти трудности (их объём, отвечающий второй «итерации» формулы суммирования Пуассона, превышает аналогичный для первой «итерации»). В итоге после применения всех перечисленных преобразований тройная сумма выражается (с некоторой допустимой погрешностью) через полные суммы Клоостермана. Применение к ним «корневой» оценки А. Вейля - Т. Эстермана (лемма 5.7) приводит к искомому результату. Этим завершается пятая глава работы.

В последней, **шестой главе** автор применяет доказанные в предыдущих главах утверждения к оценкам постоянных $c(m)$ в (1). Конечно, при этом автор существенно опирается на технику, развитую в работах Дж. Майнарда и, в частности, на модифицированное им решето А. Сельберга (§6.1). На этом пути соискателю в случае $0 < \alpha < 1$ удаётся доказать бесконечность множества простых чисел из $\mathbb{E}$, удовлетворяющих (1) с $c(m) = 9700m^3e^{6m}$ в случае фиксированного $m \geqslant 3$. В случаях $m = 1, 2$ соответствующее утверждение с указанным m тоже справедливо, однако возможность проведения при $m = 1, 2$ чуть более точных вычислений позволяет получить для $c(1)$ и $c(2)$ более точные верхние оценки.

Необходимо отметить, что подобные утверждения можно получить и в случае произвольного нецелого $\alpha > 1$ (конечно, с другими значениями постоянных $c(m)$). Однако специфика случая $\alpha > 1$ требует ряда дополнительных и притом весьма объёмных вычислений. По этой причине было решено не включать эти результаты в диссертацию и оставить их в качестве задела для будущей работы.

Представленная А.В. Шубиным диссертация является глубоким исследованием в теории распределения простых чисел. Её основные результаты были опубликованы в центральных математических журналах. Они представляют несомненный интерес для специалистов по аналитической теории чисел.

Таким образом, диссертационная работа Шубина Андрея Витальевича «Простые числа в специальных последовательностях» полностью соответствует требованиям «Положения о присуждении ученых степеней кандидата наук, доктора наук в МФТИ», а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 - дискретная математика и математическая кибернетика.

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук,
Ведущий научный сотрудник
ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук М.А. Королев

Подпись Королева М.А заверяю:
Зав. отделом кадров МИАН Высоцкая В.И.

ОТДЕЛ КАДРОВ
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук
МОСКВА