УДК 519.86

А. К. Скиба[1], *Н. К. Скиба*[2]

[1] Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук
[2] ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет»

Анализ модели разработки газовых месторождений

Рассматривается непрерывная агрегированная динамическая модель газовых месторождений с взаимовлияющими скважинами. Аналитически исследуются различные режимы их разработки. Ставятся и решаются задачи на максимум накопленной добычи и на максимум прибыли. Предлагаемые к исследованию задачи относятся к классу задач оптимального управления со свободным правым концом и фиксированным временем.

Основным математическим аппаратом является принцип максимума Понтрягина. Дополнительно выявлены условия, при которых группу месторождений в модельном представлении можно рассматривать как одно целое месторождение.

Ключевые слова: задача оптимального управления со свободным правым концом и фиксированным временем, динамическая модель газового месторождения, максимизация прибыли, режимы разработки газового месторождения.

A. K. Skiba[1], *N. K. Skiba*[2]

[1]Federal Research Center «Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences
[2] Ministry of Science and Higher Education «Kuban State Technological University»

Analysis of the gas field development model

We consider a continuous aggregated dynamic model of gas deposits with interconnecting wells. Various modes of development are analyzed analytically. Problems of maximizing accumulated production and maximizing profit are posed and solved. Problems proposed for the study belong to a class of optimal control problems with a free right end and fixed time. The basic mathematical apparatus is the Pontryagin maximum principle. Additionally, conditions are identified under which a group of deposits in the model representation can be considered as a single deposit.

Key words: optimal control problem with a free right end and fixed time, dynamic model of gas deposits, profit maximization, gas deposits development modes.

Введение

В настоящее время мировая экономика растет, потребляя всё больше и больше энергоресурсов. Несмотря на активную политику энергосбережения общее потребление энергетических ресурсов на планете непрерывно растет и с начала XXI века увеличится по оценкам Министерства энергетики США к 2030 г. на 65%. Весомыми источниками спроса на энергию станут экономики развивающихся стран, на долю которых придется 40% всего прироста. В первую очередь это относится к Китаю, Индии и странам Латинской Америки.

Все энергоресурсы подразделяются на два типа: традиционные и альтернативные (нетрадиционные). В то же время традиционные энергоресурсы также подразделяют на три основные группы:

- углеводородное сырьё, используемое на тепловых электростанциях (ТЭС);
- энергия падающей воды, используемая на гидроэлектростанциях (ГЭС);
- ядерное топливо, используемое на атомных электростанциях (АЭС).

К альтернативным ресурсам относят солнечную, ветровую, геотермальную энергию, энергию морских приливов, энергию воды и течений. Данные источники энергии возобновляются и не приносят существенного вреда окружающей среде и человеку.

Доля традиционных энергоресурсов (нефть, газ и уголь) в совокупном потреблении первичных энергоносителей высока и сохраняется на уровне около 80 %.

По мере роста энергопотребления всё больше стран ощущают недостаток в энергоресурсах из-за их дефицитности, а также в силу изменчивости конъюнктуры мировых энергорынков. На них возникает всё возрастающий спрос. Поэтому актуальными становятся страны, имеющие энергоресурсы и желающие поставлять их на мировой рынок. К их числу относится и Россия.

Россия обладает крупнейшими запасами энергоресурсов, полезных ископаемых и других природных богатств, включая обширную территорию, охватывающую несколько временных и климатических поясов.

Среди обширного перечня энергоресурсов особое место занимает природный газ [1]. По своим характеристикам природный газ относится к невосполнимым полезным ископаемым, находящихся в недрах Земли при высоком давлении и температуре. Природный газ в пласте содержится в газообразном состоянии в виде отдельных скоплений (газовых месторождений) на глубине от 250 метров до 10 километров.

Для вскрытия продуктивного пласта и извлечения из него голубого топлива используют скважины. Скважины стараются разместить равномерно по всей территории месторождения. Это делается с целью по возможности обеспечить равномерное падение пластового давления в процессе извлечения природного газа из залежи [1].

В состав природного газа входят много полезных веществ, используемых в быту и в промышленности. Основным компонентом природного газа является метан, содержание которого достигает 98% по объёму. Наряду с метаном в состав газа входят и более тяжелые углеводороды: этан, пропан, бутан и пентан.

Доля газа в общем энергобалансе России существенна и составляет более половины от всех энергоносителей. В России больше всего газа тратится на производство электроэнергии и тепла. Остальной газ распределяется между населением, предприятиями ТЭК, коммунально-бытовым сектором, металлургией и другими многочисленными, но более мелкими потребителями.

Экспорт природного газа составляет значительную часть экспорта России и является крупным источником поступлений в государственный бюджет. В настоящее время планируется расширить поставки газа за рубеж. Например, в прошлом года президентом России были поставлены вопросы о возможности использования ресурсов Иркутской области, Красноярского края и Ямала для поставок газа по западному маршруту. В декабре того же года было поручено Минэнерго РФ и «Газпрому» разработать проект газопровода через Монголию в Китай.

В отделе Методов проектирования развивающих систем ФИЦ ИУ РАН на протяжении многих лет велись работы по математическому моделированию нефтяных и газовых месторождений [2–4]. Данные модели при различных их модификациях подвергались исследованию. На них ставились и решались различные оптимизационные задачи. Кроме того динамические модели использовались для практических расчетов.

Среди оптимизационных задач, поставленных на упрощенной модели, особый интерес представляют две задачи: задача максимизации накопленной добычи для группы газовых месторождений с ограничением на пропускную способность газопровода [5] и задача максимизации длины их общей «полки» [6].

Данные задачи принадлежат к классу задач оптимального управления со смешанными ограничениями. Основным математическим аппаратом является принцип максимума Понтрягина в форме К. Эрроу [7]. Опираясь на этот математический аппарат, была решена важная задача из теории оптимального экономического роста [8]. Интересны другие работы, связанные с добычей газа [9, 10]. Перейдем к построению модели.

1. Построение и исследование модели разработки газового месторождения

Рассмотрим модель функционирования газового месторождения с взаимовлияющими скважинами [2–4]. Будем использовать следующие обозначения:

t – время, будем считать, что мы наблюдаем газовое месторождение, начиная с момента $t = 0$;

$q(t)$ – дебит добывающих скважин в момент t, который считаем постоянным для всех действующих скважин;

q^0 – начальный дебит добывающих скважин;

$n(t)$ – количество скважин, вводимых в строй в единицу времени (следует отметить, что n величина целочисленная, но для простоты исследования будем допускать для нее любые неотрицательные действительные значения, что можно сделать ввиду большого количества скважин, обычно бурящихся на месторождении);

$N(t)$ – фонд действующих скважин в момент t;

N^0 – начальный фонд действующих скважин;

$Q(t)$ – текущая добыча газа;

$V(t)$ – извлекаемый запас газа, оставшийся в месторождении в момент t;

V^0 – начальный извлекаемый запас газа;

δ – коэффициент дисконтирования;

c – продажная цена природного газа;

k – стоимость строительства одной скважины.

Между описанными выше переменными устанавливается взаимосвязь, которую запишем в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{V}(t) = -Q(t) = -q(t)N(t), \tag{1}$$

$$\dot{q} = -\frac{q^0}{V^0}q(t)N(t) = -\alpha q(t)N(t), \tag{2}$$

$$\dot{N} = n(t) \tag{3}$$

при начальных условиях

$$V^0 > 0, \tag{4}$$

$$q^0 > 0, \tag{5}$$

$$N^0 \geqslant 0. \tag{6}$$

Параметр $\alpha = \frac{q^0}{V^0}$, используемый в написании дифференциального уравнения (2), предназначен только для упрощения вида математических выражений. Будем считать, что в любой момент t месторождение покрыто равномерной сеткой скважин. Управление динамическим процессом разработки месторождения осуществляется за счет ввода новых скважин $n(t)$. Кроме того, будем считать, что разбуривание скважины и её ввод в разработку месторождения происходят в один и тот же момент времени.

Для иллюстрации возможностей модели рассмотрим два режима разработки газового месторождения.

Режим 1. Опишем поведение модели (1)-(6) на двух временных периодах разработки газового месторождения: на периоде от 0 до t_1 (> 0) темп разбуривания месторождения постоянен $n(t) = const(t)$ и в дальнейшем при $t > t_1$ бурение новых скважин не производится, т.е. $n(t) \equiv 0$. В предположении $N^0 = 0$ получаем следующие функции:

$$N(t) = \begin{cases} nt & \text{при } t \in [0, t_1], \\ nt_1 & \text{при } t > t_1; \end{cases} \tag{7}$$

$$q(t) = \begin{cases} q^0 \exp[-\frac{\alpha n}{2} t^2] & \text{при } t \in [0, t_1], \\ q(t_1) \exp[-N(t_1)(t - t_1)] & \text{при } t > t_1; \end{cases} \tag{8}$$

$$Q(t) = \begin{cases} q^0 nt \exp[-\frac{\alpha n}{2} t^2] & \text{при } t \in [0, t_1], \\ q(t_1) N(t_1) \exp[-N(t_1)(t - t_1)] & \text{при } t > t_1; \end{cases} \tag{9}$$

$$V(t) = \begin{cases} V^0 \exp[-\frac{\alpha n}{2} t^2] & \text{при } t \in [0, t_1], \\ V(t_1) \exp[-N(t_1)(t - t_1)] & \text{при } t > t_1. \end{cases} \tag{10}$$

Анализ функции (9) показывает, что на начальном этапе разбуривания месторождения добыча газа $Q(t)$ на месторождении возрастает. Это связано тем, что прирост добычи за счёт ввода новых скважин $n(t)$ превышает естественный темп падения добычи, связанный с извлечением запасов газа. Если t_1 имеет небольшое значение, то в момент t_1, когда прекращается ввод новых скважин, добыча $Q(t)$ достигает максимального значения. В этом случае на графике мы могли бы наблюдать характерный излом. Далее добыча падает.

Если t_1 имеет большое значение, то прирост добычи газа за счёт ввода новых скважин будет постепенно уменьшаться, и в момент $t_{max} = \sqrt{\frac{1}{\alpha n}}$ он совпадёт с естественным темпом падения добычи. В этот момент текущая добычи достигает своего максимального значения $Q_{max} = \sqrt{\frac{q^0 n V^0}{e}}$. Далее добыча газа падает.

Такие характерные особенности поведения добычи газа наблюдались на практике при разбуривании газовых месторождений.

Режим 2. Необходимо в динамике определить объем действующего фонда скважин, обеспечивающий полное извлечение всего запаса газа при постоянном заранее заданном уровне его добычи $\bar{Q}$. Интерес в постоянном уровне добычи газа проявляется как со стороны промысловиков, так и со стороны потребителей газа. Промысловикам постоянный уровень добычи необходим для закупки и настройки промыслового и транспортного оборудования под обеспечение добычи газа требуемого уровня. Потребителям газа постоянный уровень добычи необходим при решении вопроса о стабильном объёме закупок газа.

Приведённые выше доводы делают интересными исследование данного режима разработки месторождения. Перейдём к формальному описанию и исследованию упомянутого режима. Объем действующего фонда скважин изменяется по следующему закону:

$$N(t) = \frac{\bar{Q}}{q^0 - \alpha \bar{Q} t}. \tag{11}$$

Таким образом, функция (11) определена на полуинтервале $[0, t^*)$, где $t^* = \frac{V^0}{\bar{Q}}$. В конечный момент t^* происходит полное извлечение запасов газа из месторождения. В то же время $\lim_{t \to t^*} N(t) = \infty$. Следовательно, в этом случае сетка скважин уплотняется до бесконечности.

Такой режим невозможно полностью реализовать на практике. Однако он реализован частично. Этапу постоянной добычи газа предшествует этап нарастающей добычи (для небольших газовых месторождений этап нарастающей добычи может и отсутствовать). За этапом постоянной добычи следует этап падающей добычи. Проблема увеличения периода постоянной добычи особо актуальна в настоящее время, когда многие газовые месторождения исчерпывают свои извлекаемые запасы.

Перейдем к постановке и решению оптимизационных задач.

2. Постановка и решение оптимизационных задач с одним газовым месторождением

Задача 1. О максимизации накопленной добычи для одного газового месторождения

Для системы дифференциальных уравнений (1) – (3) *с начальными условиями* (4) – (6) *и фиксированного интервала времени* $[0, T]$ *требуется найти кусочно-непрерывную функцию* $\tilde{n}(t)$, *удовлетворяющую ограничениям*

$$0 \leq n(t) \leq \bar{n}(t),$$

и соответствующую ей траекторию $(\tilde{q}(t), \tilde{N}(t))$ *доставляющие максимальное значение функционалу*

$$\int_0^T Q(t)\, dt. \tag{12}$$

Правый конец оптимальной траектории $(\tilde{q}(t), \tilde{N}(t))$ *считается свободным. Функция* $\bar{n}(t)$ *в последнем двойном неравенстве является непрерывной кусочно-гладкой функцией.*

Поставленная задача относится к задаче оптимального управления. Однако её можно решить без применения аппарата оптимального управления.

Воспользовавшись (1) – (3), перепишем (12)

$$\int_0^T Q(t)\, dt = V^0[1 - \frac{q(T)}{q^0}] = V^0 \left\{1 - \exp\{-\alpha[N^0 T + \int_0^T \int_0^t n(\theta)\, d\theta\, dt]\}\right\} =$$

$$= V^0 \left\{1 - \exp\{-\alpha[N^0 T + \int_0^T (T-t) n(t)\, dt]\}\right\} \leq V^0 \left\{1 - \exp\{-\alpha[N^0 T + \int_0^T (T-t) \bar{n}(t)\, dt]\}\right\}.$$

Как видно из последнего выражения, функционал (12) достигает максимума при $\tilde{n}(t) = \bar{n}(t)$, т.е. при максимально возможном темпе бурения скважин.

Более интересной является следующая задача. В постановке этой задачи впервые используются параметры c, k и δ, описание которых дано в начале первого раздела настоящей статьи.

Задача 2. О максимизации прибыли для одного газового месторождения

На фиксированном интервале времени $[0, T]$ *требуется максимизировать функционал*

$$\int_0^T [cQ(t) - kn(t)] \exp(-\delta t)\, dt \tag{13}$$

при дифференциальных связях (1) – (3) *с начальными условиями* (4) – (6), *со свободным правым концом и ограничениями на управление*

$$0 \leq n(t) \leq \bar{n}, \tag{14}$$

Управление $n(t)$ *относится к классу кусочно-непрерывных функций.*

В описании прибыли (13) используется коэффициент дисконтирования δ, введенный с целью соизмеримости доходов и затрат в различные моменты времени в будущем.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Оптимальное управление задачи о максимизации прибыли существует и принимает один вид из двух возможных вариантов:*

$$n(t) = \begin{cases} \bar{n} & \text{при } t \in [0, \hat{T}],\ \hat{T} \in (0, T) \\ 0 & \text{при } t \in (\hat{T}, T]; \end{cases} \tag{15}$$

$$n(t) \equiv 0. \tag{16}$$

Доказательство. Рассматриваемая задача 2 является задачей оптимального управления со свободным правым концом. Существование оптимального управления следует, например, из теоремы, приведённой в монографии [11, § 4.2]. Заметим, что дифференциальные уравнения (1) и (2) взаимосвязаны, и фазовые переменные $q(t)$ и $V(t)$ имеют линейную зависимость при любом допустимом управлении, т.е. $q(t) = \alpha V(t)$. Поэтому при решении поставленной задачи достаточно ограничиться двумя фазовыми переменными $q(t)$ и $N(t)$.

Для решения задачи 2 будем использовать принцип максимума Понтрягина [12, 13] для задачи со свободным правым концом. Выпишем гамильтониан, сопряженные уравнения и условия трансверсальности:

$$H = cqN - kn - \psi\alpha qN + \varphi n, \tag{17}$$

$$\dot{\psi} = \delta\psi - cN + \psi\alpha N, \tag{18}$$

$$\dot{\varphi} = \delta\varphi - cq + \psi\alpha q, \tag{19}$$

$$\psi(T) = \varphi(T) = 0. \tag{20}$$

Здесь для удобства исследования гамильтониан и сопряженные переменные представлены в модифицированной форме. Такую же модифицированную форму использовал К. Эрроу в своей работе [8].

Рассмотрим всевозможные начальные значения сопряженных переменных ψ и φ, которые могут удовлетворять условиям трансверсальности (20) или им вообще не удовлетворять.

Утверждение 1. *Сопряженная переменная $\psi(t)$ неотрицательна. Пусть некоторая траектория оптимальна и соответствующая этой траектории сопряженная переменная $\psi(\hat{t}) = 0$ при $0 \leq \hat{t} < T$, тогда $\psi(t) \equiv 0, \tilde{n}(t) \equiv 0, N^0 = 0$ и выполняется следующее неравенство:*

$$\frac{cq^0}{\delta}[1 - \exp(-\delta T)] \leq k. \tag{21}$$

Доказательство. Из сопряженного уравнения (18) видно, что при отрицательных значениях переменной $\psi(t)$ условия трансверсальности (20) не выполняются.

Переходим ко второй части утверждения 1.

Из предположения $\psi(\hat{t}) = 0$ при $0 \leq \hat{t} < T$, условий трансверсальности (20) и сопряженного уравнения (18) вытекает, что $\psi(t) \equiv 0, \tilde{n}(t) \equiv 0, \tilde{N}(t) \equiv 0$ не только на временном интервале $[\hat{t}, T]$, но и на всем рассматриваемом периоде $[0, T]$. Значит, месторождение не разрабатывается и дебит скважины $q(t) \equiv q^0$ на всем рассматриваемом периоде $[0, T]$.

С учетом условий трансверсальности (20) проинтегрируем дифференциальное уравнение (19) от 0 до T при условиях: $\psi(t) \equiv 0$ и $q(t) \equiv q^0$. В результате получаем

$$\varphi(t) = \frac{cq^0}{\delta}\left\{1 - \exp[-\delta(T - t)]\right\}. \tag{22}$$

Из (22) видно, что $\varphi(t)$ убывающая функция. Поскольку оптимальное управление $\tilde{n}(t) \equiv 0$ и при этом управлении достигается максимум гамильтониана, то $\varphi(0) \leq k$. Отсюда и из соотношения (22) следует выполнение неравенства (21). Утверждение 1 доказано.

Следствие. *Пусть на оптимальной траектории выполнено неравенство*

$$\frac{cq^0}{\delta}[1 - \exp(-\delta T)] > k, \tag{23}$$

тогда $\tilde{N}(T) > 0$.

Положительность $\tilde{N}(T)$ вытекает из утверждения 1, дифференциального уравнения (3), начального условия (6) и ограничений на управление (14).

Утверждение 2. *Пусть* $\left(\tilde{q}(t)), \tilde{N}(t)\right)$ *является оптимальной траекторией при дополнительном условии* $\tilde{N}(T) > 0$, *тогда:*

- *на полуинтервале* $t \in [0.T)$ *выполнено двойное неравенство* $0 < \psi(t) < \frac{c}{\alpha}$ *и* $\psi(T) = 0$;
- *на полуинтервале* $t \in [0.T)$ *сопряженная переменная* $\varphi(t)$ *положительна и строго убывает и* $\varphi(T) = 0$.

Доказательство. Умножаем обе части сопряженного уравнения (18) на q и после преобразований с учетом (2) получаем

$$\frac{d}{dt}[\psi q] = \delta\psi q - cqN. \tag{24}$$

Умножим обе части дифференциального уравнения (24) на $\exp(-\delta t)$ и после несложных преобразований проинтегрируем обе части полученного равенства от t до T. Учитывая условия трансверсальности (20), приходим к соотношению

$$\psi(t)q(t)\exp(-\delta t) = c\int_t^T q(\theta)N(\theta)\exp(-\delta\theta)\,d\theta. \tag{25}$$

В силу положительности $q(t)$ и $N(T)$, непрерывности и неотрицательности $N(t)$ вытекает, что интеграл в правой части равенства (25) положителен. Отсюда положительна сопряженная переменная $\psi(t)$.

Принимая во внимание (2), преобразуем (24). В результате получаем следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}[(\psi - \frac{c}{\alpha})q\exp(-\delta t)] = \frac{c\delta}{\alpha}q\exp(-\delta t). \tag{26}$$

С учетом условия трансверсальности (20) проинтегрируем обе части полученного соотношения (26) от t до T

$$[\frac{c}{\alpha} - \psi(t)]q(t)\exp(-\delta t) = \frac{c}{\alpha}q(T)\exp(-\delta T) + \frac{c\delta}{\alpha}\int_t^T q(\theta)\exp(-\delta\theta)\,d\theta. \tag{27}$$

Правая часть равенства (27) положительна. Значит, $\psi(t) < \frac{c}{\alpha}$. Первая часть данного утверждения доказана. Переходим к доказательству последней части утверждения 2.

С сопряженным уравнение (19) проделаем те же операции, что и с уравнением (18). После всех преобразований решение сопряженного уравнения (19) представится в виде интегрального выражения

$$\varphi(t) = \int_t^T [c - \alpha\psi(\theta)]q(\theta)\exp[-\delta(\theta - t)]\,d\theta. \tag{28}$$

Отсюда следует, что сопряженная переменная $\varphi(t)$ положительна на полуинтервале $t \in [0, T)$.

Умножаем обе части сопряженного уравнения (18) на q и после преобразований с помощью (2) получаем

$$\frac{d}{dt}[\alpha\psi q - cq] = \delta\alpha\psi q. \tag{29}$$

Продифференцируем по t обе части сопряженного уравнения (18) и, подставив в полученное выражение (29), приходим к следующему дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{\varphi} - \delta\dot{\varphi} = \alpha\delta\psi q. \tag{30}$$

Умножаем обе части дифференциального уравнения (30) на $\exp(-\delta t)$ и после преобразований с учетом (2), (19) и (20) проинтегрируем от t до T полученный результат

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}(T)\exp[-\delta(T-t)] - \delta\alpha\int_t^T \psi(\theta)q(\theta)\exp[-\delta(\theta-t)]\,d\theta =$$

$$= -cq(T)\exp[-\delta(T-t)] - \delta\alpha\int_t^T \psi(\theta)q(\theta)\exp[-\delta(\theta-t)]\,d\theta. \tag{31}$$

Отсюда следует, что $\varphi(t)$ строго убывает. Утверждение 2 доказано.

Из максимизации гамильтониана (17), строгого убывания сопряженной переменной $\varphi(t)$, ограничений на управление (14) и условий трансверсальности (20) вытекает справедливость одного из соотношений (15) или (16). Теорема 1 доказана.

3. Модель группы газовых месторождений

Рассмотрим группу газовых месторождений с взаимовлияющими скважинами [2–4], которая состоит из m месторождений. Между введенными выше фазовыми переменными устанавливаются дифференциальные зависимости, которые описываются в виде системы дифференциальных уравнений

$$\dot{V}_i(t) = -q_i(t)N_i(t), \tag{32}$$

$$\dot{q}_i = -\frac{q_i^0}{V_i^0}q_i(t)N_i(t) = -\alpha_i q_i(t)N_i(t), \tag{33}$$

$$\dot{N}_i = n_i(t) \tag{34}$$

при начальных условиях

$$V_i^0 > 0, \tag{35}$$

$$q_i^0 > 0, \tag{36}$$

$$N_i^0 \geqslant 0. \tag{37}$$

Для удобства вводятся параметры $\alpha_i = \frac{q_i^0}{V_i^0}$. Смысл всех обозначений тот же, что и в первом разделе настоящей статьи. Индексом i обозначается номер месторождения. Фазовыми переменными являются $q_i(t)$ и $N_i(t)$. Управлением динамическим процессом осуществляется за счет ввода в строй в единицу времени новых скважин $n_i(t)$.

Возникает вопрос, при каких условиях m месторождений можно рассматривать в модели как одно целое месторождение?

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть на временно отрезке $[0,T]$ для всех месторождений из рассматриваемой группы выполняются равенства*

$$\frac{q_i^0}{V_1^0}N_1(t) = \frac{q_2^0}{V_2^0}N_2(t) = \ldots = \frac{q_m^0}{V_m^0}N_m(t) = \gamma(t), \tag{38}$$

т.е. темп падения дебита на всех месторождениях одинаков и он равен $\gamma(t)$, тогда на том же временном отрезке m месторождений можно представить как одно месторождение с дебитом

$$q(t) = \left(\sum_{i=1}^m q_i(t)N_i(t)\right)/\sum_{i=1}^m N_i(t), \tag{39}$$

с совокупным числом скважин $N(t) = \sum_{i=1}^{m} N_i(t)$, *с извлекаемым запасом газа* $V(t) = \sum_{i=1}^{m} V_i(t)$.

1) Падение дебита описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{q} = -\frac{q^0}{V^0} q(t) N(t) = -\alpha q(t) N(t) = -\gamma(t) q(t), \tag{40}$$

где $\alpha = \frac{q^0}{V^0}$.

2) Для дебита на временном отрезке $[0, T]$ *справедливо следующее равенство:*

$$\frac{q^0}{V^0} = \frac{q(t)}{V(t)}. \tag{41}$$

Результаты данной теоремы будут полезной при учете различных категорий запасов газа. В этом случае запасы не только естественным образом уменьшаются за счет добычи природного газа, но и пополняются за счет подключения в разработку все новых месторождений.

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Доказательство. Проинтегрируем все дифференциальные уравнения (33) от 0 до t. В результате получаем

$$q_i(t) = q_i^0 \exp\,[-\int_0^t \frac{q_i^0}{V_i^0} N_i(\theta)\, d\theta] = q_i^0 \exp\,[-\int_0^t \gamma(\theta)\, d\theta], \qquad i = \overline{1,m}. \tag{42}$$

С учетом равенств (38) приходим к следующим формулам:

$$q_i(t) = q_i^0 \exp\,[-\int_0^t \gamma(\theta)\, d\theta], \qquad i = \overline{1,m}. \tag{43}$$

Умножим обе части каждой формулы (43) на соответствующее ей $N_i(t)$. Полученные равенства просуммируем и разделим на $\sum_{i=1}^{m} N_i(t)$. После проведенных математических преобразований с учетом (39) приходим к формуле для вычисления значений дебита

$$q(t) = [(\sum_{i=1}^{m} q_i^0 N_i(t)) / \sum_{i=1}^{m} N_i(t)] \exp\,[-\int_0^t \gamma(\theta)\, d\theta]. \tag{44}$$

Далее выразим $N_i(t)$ через $N_1(t)$. Для этого воспользуемся равенствами (38) и введя обозначение $\beta_i = \frac{q_1^0 V_i^0}{q_i^0 V_1^0}$, в результате получаем

$$N_i(t) = \frac{q_1^0 V_i^0}{q_i^0 V_1^0} N_1(t) = \beta_i N_1(t), \qquad i = \overline{1,m}. \tag{45}$$

Учитывая (45), преобразуем дробь в правой части равенства (44):

$$(\sum_{i=1}^{m} q_i^0 N_i(t)) / \sum_{i=1}^{m} N_i(t) = (\sum_{i=1}^{m} q_i^0 \beta_i) / \sum_{i=1}^{m} \beta_i = (\sum_{i=1}^{m} q_i^0 N_i^0) / \sum_{i=1}^{m} N_i^0 = q^0. \tag{46}$$

В этом случае формула (44) представится в следующем виде:

$$q(t) = q^0 \exp\,[-\int_0^t \gamma(\theta)\, d\theta]. \tag{47}$$

Для завершения доказательства первой части теоремы 2 осталось показать, что

$$\frac{q^0}{V^0} N(t) = \gamma(t). \tag{48}$$

Сначала покажем, что

$$N_1(t) = \frac{N_1^0}{N^0} N(t). \tag{49}$$

Действительно, с учетом (45) получаем

$$\frac{N_1^0}{N^0}N(t) = \frac{N_1^0}{\sum_{i=1}^m N_i^0}\sum_{i=1}^m N_i(t) = \frac{N_1^0}{N_1^0\sum_{i=1}^m \beta_i}N_1(t)\sum_{i=1}^m \beta_i = N_1(t). \tag{50}$$

Используя (39), (45), (49) и (38), преобразуем левую часть равенства (48):

$$\frac{q^0}{V^0}N(t) = \frac{\sum_{i=1}^m q_i^0 N_i^0}{V^0N^0}N(t) = \frac{N_1^0\sum_{i=1}^m q_i^0\frac{q_1^0V_i^0}{q_i^0V_1^0}}{V^0N^0}N(t) =$$

$$\frac{q_1^0N_1^0\sum_{i=1}^m V_i^0}{V_1^0V^0N^0}N(t) = \frac{q_1^0}{V_1^0}N_1(t) = \gamma(t). \tag{51}$$

Первая часть теоремы 2 доказана. Перейдем к доказательству второй части этой теоремы.

При выводе дифференциальных уравнений (33) предполагалось, что дебит газовой скважины пропорционален пластовому давлению, которое, в свою очередь, пропорционально извлекаемому запасу газа, т.е.

$$\frac{q_i^0}{V_i^0} = \frac{q_i(t)}{V_i(t)}, \qquad i = \overline{1,m}. \tag{52}$$

Отсюда равенства (38)и (45) представятся в следующем виде

$$\frac{q_i(t)}{V_1(t)}N_1(t) = \frac{q_2(t)}{V_2(t)}N_2(t) = \ldots = \frac{q_m(t)}{V_m(t)}N_m(t) = \gamma(t), \tag{53}$$

$$N_i(t) = \frac{q_1(t)V_i(t)}{q_i(t)V_1(t)}N_1(t), \qquad i = \overline{1,m}. \tag{54}$$

Воспользовавшись (39), (45), (52), (54) и (49), преобразуем левую часть равенства (41):

$$\frac{q^0}{V^0} = \frac{\sum_{i=1}^m q_i^0N_i^0}{V^0N^0} = \frac{N_1^0\sum_{i=1}^m q_i^0\frac{q_1^0V_i^0}{q_i^0V_1^0}}{V^0N^0} = \frac{N_1(t)\sum_{i=1}^m q_i(t)\frac{q_1(t)V_i(t)}{q_i(t)V_1(t)}}{V(t)N(t)} = \frac{q(t)}{V(t)}. \tag{55}$$

Теорема 2 полностью доказана.

4. Заключение

Настоящая работа посвящена анализу непрерывной агрегированной динамической модели разработки газовых месторождений с взаимовлияющими скважинами. На базе рассматриваемой модели аналитически исследуются два режима их разработки. В первом режиме исследуется в динамике поведение добычи газа на месторождении. На первом этапе разработки фонд скважин, начиная с нулевого значения, меняется по линейному закону. Далее фонд скважин остается постоянным. Выявлены характерные особенности такой разработки.

Второй режим связан с попыткой как можно дольше удержать добычу газа на заранее заданном уровне. Оказывается, что такой период конечен и в конце периода количество задействованных в разработке скважин стремится к бесконечности, что практически невозможно.

Следующая часть работы посвящена решению двух оптимизационных задач. Одна задача относится к максимизации добычи, другая – к максимизации прибыли. Обе задачи являются задачами оптимального управления. Однако первую задачу можно решить без привлечения мощного математического аппарата, что и было сделано. Для решения второй задачи привлекли принцип максимума Понтрягина.

Последняя часть работы относится к группе газовых месторождений. Основная её цель заключается в поиске условий, при которых группу газовых месторождений можно рассматривать как одно целое месторождение. Данное условие будет полезно при определении пропускной способности газопровода. В этом случае мы должны учесть все запасы газа во всех категориях, начиная от прогнозных ресурсах (категория $D3$) до достоверных запасов (категория A).

Литература

1. *Вяхирев Р.И., Коротаев Ю.П., Кабанов Н.И.* Теория и опыт добычи газа. Москва : Недра, 1998.
2. *Маргулов Р.Д., Хачатуров В.Р., Федосеев А.В.* Системный анализ в перспективном планировании добычи газа. Москва : Недра, 1992.
3. *Хачатуров В.Р., Соломатин А.Н., Злотов А.В.* [*и др.*]. Планирование и проектирование освоения нефтегазодобывающих регионов и месторождений: Математические модели, методы, применение / Под ред. В.Р. Хачатурова. Москва : УРСС: ЛЕНАНД, 2015.
4. *Skiba A.K.* Dynamic model analysis of gas deposit developments // 2018 Eleventh International Conference Management Of Large-Scale System Development (MLSD). IEEE Conference Publications, IEEE Xplore Digital Library. P. 619–622.
5. *Skiba A.K.* Maximization of the Accumulated Extraction in a Gas Fields Model. Evtushenko Y., Jacimovic M., Khachay M., Kochetov Y., Malkova V., Posypkin M. (eds), Int. Conf. on Optimization and Applications (OPTIMA 2018) // Communications in Computer and Information Science. Springer. 2019. V. 974. P. 453–469. DOI 10.1007/978-3-030-10934-9_32.
6. *Скиба А.К.* Поиск в модели газовых место рождений максимальной длины их общей «полки» // Труды МФТИ. 2019. Т. 11, № 2. С. 49–61.
7. *Эрроу К.* Применение теории управления к экономическому росту // Матем. экономика. Москва : Мир, 1974. С. 7–45.
8. *Skiba A.K.* Optimal Growth with a Convex-concave Production Function // Econometrica. 1978. V. 3(46). P. 527–539.
9. *Соломатин А.Н., Скиба А.К., Хачатуров В.Р.* Моделирование разработки группы газовых месторождений с учетом их ликвидации // Автоматика и телемеханика. 2018. № 11. С. 16-31. DOI 10.31857/S000523100002774-5.
10. *Skiba A.K.* Prime Cost Analysis in the Model of Gas Fields // Optimization and applications (OPTIMA-2017): Proceedings of VIII International Conference on Optimization Methods and Applications «Optimization and Applications>. Montenegro, Petrovac, October 2017 . Moscow : Federal Research Center «Informatics and Control» of RAS, 2016. P. 524–530. http://ceur-ws.org/Vol-1987/paper75.pdf
11. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. Москва : Наука, 1972.
12. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. Москва : Наука, 1976.
13. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. Москва : Наука, 1975.

References

1. *Vyakhirev R.I., Korotaev Y.P., Kabanov N.I.* Theory and experience of gas production. Moscow: Nedra, 1998. (in Russian).
2. *Margulov R.D., Khachaturov V.R., Fedoseev A.V.* The system analysis in advance planning of gas production. Moscow : Nedra, 1992. (in Russian).

3. *Khachaturov V.R., Solomatin A.N., Zlotov A.V., et el.,* Planning and design of development of oil and gas extraction regions and fields: Mathematical models, methods, application. Ed. by V.R. Khachaturov Moscow : URSS: LENAND, 2015. (in Russian).

4. *Skiba A.K.* Dynamic model analysis of gas deposit developments. 2018 Eleventh International Conference Management Of Large-Scale System Development (MLSD). IEEE Conference Publications, IEEE Xplore Digital Library. P. 619–622.

5. *Skiba A.K.* Maximization of the Accumulated Extraction in a Gas Fields Model. Evtushenko Y., Jacimovic M., Khachay M., Kochetov Y., Malkova V., Posypkin M. (eds), Int. Conf. on Optimization and Applications (OPTIMA 2018). Communications in Computer and Information Science, Springer. 2019. V. 974. P. 453–469. DOI 10.1007/978-3-030-10934-9_32.

6. *Skiba A.K.* Finding in the model of gas fields the maximum length of their common «shelf». Proceeding of MIPT. 2019. V. 11, N 2. P. 49–61.

7. *Arrow K.* Application of control theory to economic growth. Mathematical economy. Moscow : Mir, 1974. P. 7–45. (in Russian).

8. *Skiba A.K.* Optimal Growth with a Convex-concave Production Function. Econometrica. 1978. V. 3(46). P. 527–539.

9. *Solomatin A.N., Skiba A.K., Khachaturov V.R.* Modeling of the Development of a Group of Gas Deposits While Accounting for Their Liquidation. Automation and Remote Control. 2018. N 11. P. 16–31. DOI 10.31857/S000523100002774-5. (in Russian).

10. *Skiba A.K.* Prime Cost Analysis in the Model of Gas Fields. Optimization and applications (OPTIMA-2017): Proceedings of VIII International Conference on Optimization Methods and Applications «Optimization and Applications». Montenegro, Petrovac, October 2017. Moscow : Federal Research Center «Informatics and Control» of RAS, 2016. P. 524–530. http://ceur-ws.org/Vol-1987/paper75.pdf

11. *Lee E.B., Markus L.* Fundamentals of the theory of optimal control. Moscow : Nauka, 1972. (in Russian).

12. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishechenko E.F.* The mathematical theory of optimal processes. Moscow : Nauka, 1976. (in Russian).

13. *Moiseev N.N.* Elements of the Theory of Optimal Systems. Moscow : Nauka, 1975. (in Russian).

Поступила в редакцию 19.02.2020