ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи
УДК 519.176

Пушняков Филипп Анатольевич

О числе рёбер в индуцированных подграфах специальных дистанционных графов

Специальность 01.01.09 —
«дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа выполнена на кафедре дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
профессор
Райгородский Андрей Михайлович

Ведущая организация: Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Защита состоится «28» августа 2020 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета ФПМИ.01.01.09.007 по адресу: 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (государственного университета):
https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php.

Работа представлена «05» июня 2020 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п.3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Рассмотрение дистанционных графов глубоко мотивировано некоторыми знаменитыми задачами комбинаторной геометрии, в частности — задачей Нельсона-Эрдеша-Хадвигера, проблемой Борсука, задачей о кодах с запрещенным расстоянием и другими. В задаче Нельсона-Эрдеша-Хадвигера ставится вопрос о хроматическом числе пространства $\mathbb{R}^n$: минимальном числе цветов, в которые можно раскрасить n-мерное евклидово пространство так, чтобы никакие две точки, отстоящие друг от друга на расстояние 1, не были окрашены в один и тот же цвет (см. [1] – [2]). С точки зрения теории графов, рассматривается задача о хроматическом числе бесконечного графа, вершинами которого являются все точки пространства $\mathbb{R}^n$, а ребро проводится между точками на расстоянии 1. Теорема Эрдеша–де Брейна утверждает, что бесконечный граф можно раскрасить в k цветов тогда и только тогда, когда в k цветов можно раскрасить каждый его конечный подграф (см. [3]). Тем самым, достаточно изучать хроматические числа конечных дистанционных графов — вершины дистанционного графа представляют собой конечное множество точек пространства $\mathbb{R}^n$, а ребро проводится в том и только том случае, если точки находятся на некотором фиксированном расстоянии друг от друга. Вообще, подобные графы обычно называют полными дистанционными графами. Смысл слова «дистанционный» понятен: ребра графа задаются парами точек, отстоящих друг от друга на некоторое расстояние — «дистанцию». А полнота понимается в том смысле, что мы провели в графе все возможные ребра.

В данной работе мы сконцентрируемся на рассмотрении специального дистанционного графа $G(n,3,1)$, вершинами которого являются точки в n-мерном булевом кубе, у которых ровно 3 единицы, а ребро между такими вершинами проводится тогда и только тогда, когда евклидово расстояние между соответствующими точками равно 2, или, что то же самое, когда скалярное произведение соответствующих векторов равно 1. Можно сформулировать данное определение в комбинаторных терминах, а именно, вершинами данного графа являются все возможные трехэлементные подмножества множества $\mathcal{R}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, а ребро проводится между подмножествами, имеющими ровно один общий элемент. Видимо, впервые подобные дистанционные графы были упомянуты в работе Надя (см. [4]), в которой граф $G\,(n{,}3{,}1)$ был использован в качестве примера графа с маленьким кликовым числом и маленьким числом независимости — примера графа, возникающего в классической теории Рамсея. Напомним, что *независимым множеством* графа G называется такое подмножество его вершин, что никакие две вершины этого подмножества не соединены ребром. *Числом независимости* $\alpha(G)$ называется наибольшая мощность независимого множества. Кликовым же числом называется мощность наибольшей клики — множества вершин, каждые две из которых соединены ребром. Числом Рамсея называется такое минимальное натуральное число $r\,(n)$, что в любом графе на $r\,(n)$ вершинах найдется либо клика размера n, либо независимое множество размера n. Ясно, что в графе $G\,(n,3,1)$ порядка $\frac{n^3}{6}$ вершин, а размер максимальной клики и максимального независимого множества не превосходят n. Таким образом, была получена на тот момент наилучшая конструктивная оценка $r\,(n) > c \cdot n^3$. Позже Франкл и Уилсон в своей работе [5] привели сверхполиномиальную оценку, также полученную с помощью дистанционных графов (см. [6]).

Большая часть данной работы посвящена исследованию графа $G\,(n{,}3{,}1)$. Данный граф важен не только для теории Рамсея, но также он сыграл важную роль в одном из первых продвижений в задаче Нельсона–Эрдеша–Хадвигера. В своей работе Ларман и Роджерс (см. [7]) использовали данный граф для оценки хроматического числа пространства. Они заметили, что хроматическое число пространства $\mathbb{R}^n$, которое мы будем обозначать $\chi\,(\mathbb{R}^n)$, никак не меньше хроматического числа графа $G\,(n,3,1)$, что давало рекордную на тот момент оценку $\chi\,(\mathbb{R}^n) \geqslant c \cdot n^2$. Впоследствии именно с помощью дистанционных графов Франкл и Уилсон установили, что $\chi\,(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.207... + o\,(1))^n$. Таким образом, они показали, что хроматическое число пространства растет экспоненциально с ростом n (см. [5]). Для этого они рассмотрели графы $G\,(n,r,s)$, обобщающие графы $G\,(n{,}3{,}1)$ следующим образом: в каждой вершине у них не три единицы, а r, а ребро проводится тогда и только тогда, когда скалярное произведение соответствующих векторов равно s. В 1991 году Дж. Кан и Г. Калаи использовали результаты Франкла и Уилсона для опровержения классической гипотезы Борсука о том, что всякое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ мощности больше 1 может быть разбито на $n+1$ часть меньшего диаметра (см. [1]–[8], [9]–[10]).

Следует также упомянуть, что дистанционные графы связаны с исследованием кодов с запрещенными расстояниями (см. [11], [12]), а клики в графе $G(n, \frac{n}{2}, \frac{n}{4})$ при n кратном 4 фактически являются строками матрицы Адамара. Матрицей Адамара называется квадратная матрица (таблица) размера $n \times n$, в которой все элементы суть 1 или -1 и любые две строки ортогональны (т. е. их скалярное произведение как векторов в $\mathbb{R}^n$ равно нулю). Легко заметить, что если для некоторого $n > 1$ существует матрица Адамара, то n обязано делиться на 4. Проблема в том, что до сих пор не известно, для всех ли n кратных 4 существует матрица Адамара размера $n \times n$. Для наших целей данные матрицы не слишком важны, и потому мы подробнее на них не останавливаемся.

В данной работе мы исследуем экстремальные свойства графа $G(n, r, s)$. А именно, мы исследуем число ребер в произвольном подграфе данного графа.

Обозначим через $r(W)$ количество ребер графа G на множестве $W \subseteq V$. Иными словами,

$$r(W) = |\{(x, y) \in E \mid x \in W,\ y \in W\}| \, .$$

Также положим

$$r(l) = \min_{|W|=l,\, W \subseteq V} r(W) \ .$$

В настоящей работе мы приведем практически полное исследование величины $r(l)$ для графов $G(n, 3, 1)$ и некоторые результаты для графов $G(n, r, s)$ более общего вида.

Содержание работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключения.

Во **введении** представлен обзор исследований, посвященных дистанционным графам. Также во введение описывается структура диссертации.

Первая глава посвящена постановке задачи и описанию классических результатов. В частности, в первой главе мы даем определение графа $G(n, r, s)$, независимого множества, числа независимости и величины $r(l)$, оценке которой посвящена данная диссертация. Заметим, что если $l \leqslant \alpha$, то

$r(l) = 0$ и обсуждать нечего. Если же $l > \alpha$, то, очевидно, в любом $W \subseteq V$ мощности l непременно найдутся ребра. Возникает интересный вопрос об изучении величины $r(l)$. Наконец, мы формулируем классическую теорему Турана и её аналог для дистанционных графов, которые дают базовые оценки величины $r(l)$ в общем случае.

Во **второй главе** мы изучаем граф $G(n, 3, 1)$. В частности, мы получаем точные оценки величины $r(l)$ для некоторых значений l. А именно, сперва мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Верны следующие утверждения:*

1. *Пусть функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таковы, что выполнено $n = o(f)$ и $g = o\left(n^2\right)$ при $n \to \infty$. Пусть функция $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнена цепочка неравенств $f(n) \leqslant l(n) \leqslant g(n)$. Тогда $r(l(n)) \sim \frac{l(n)^2}{2\alpha_n}$ при $n \to \infty$.*
2. *Пусть функция $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что существуют константы C_1, C_2, с которыми для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнена цепочка неравенств $C_1 \cdot n^2 \leqslant f(n) \leqslant C_2 \cdot n^2$. Тогда $r(l(n)) \sim \frac{l(n)^2}{2\alpha_n}$ при $n \to \infty$.*

Фактически, в данной теореме найдена асимптотика величины $r(l)$ для некоторого класса функций l. Однако, не для всех l удается найти точную оценку величины $r(l)$. Поэтому далее мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таковы, что выполнено $n^2 = o(f(n))$ и $g(n) = o\left(n^3\right)$ при $n \to \infty$. Пусть функция $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $f(n) \leqslant l(n) \leqslant g(n)$. Тогда существует такая функция $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $h(n) \sim \frac{5l(n)^2}{\alpha_n}$ при $n \to \infty$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнена цепочка неравенств $\frac{l(n)^2}{\alpha_n} \leqslant r(l(n)) \leqslant h(n)$.*

Как видно, здесь мы нашли порядок роста величины $r(l)$, однако зазор между константами достаточно существенный. Поэтому далее мы доказываем теорему, которая улучшает данный зазор.

Теорема 3. *Пусть функция $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что $n^2 = o(l)$ при $n \to \infty$. Тогда существует такая функция $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $h \sim \frac{3l^2}{2n}$ при $n \to \infty$ и $r(l(n)) \geqslant h(n)$ для любого достаточно большого $n \in \mathbb{N}$.*

Иными словами, новая оценка в полтора раза лучше старой. При этом в теореме 2 доказана верхняя оценка вида $\frac{5l^2}{n}$, и, тем самым, продвижение значимое.

Далее мы переходим к случаю больших l. А именно, доказываем следующую теорему.

Теорема 4. *Имеют место три случая:*

1. *Пусть функция* $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такова, что существуют константа* C *и функция* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такая, что* $n^2 = o(g)$ *при* $n \to \infty$ *и для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнена цепочка неравенств* $C \cdot n^3 \leqslant l(n) \leqslant C_n^3 - g(n)$. *Пусть* $c_n = 1 - \frac{l(n)}{C_n^3}$. *Тогда существует такая функция* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *что* $h = o(1)$ *при* $n \to \infty$ *и для любого достаточно большого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство* $r(l(n)) \geqslant \frac{n^5}{8}\left(1 - 2c_n + \frac{c_n^2}{3}(1 + h(n)) - \frac{10}{n} + \frac{20 \cdot c_n}{n} - \frac{10 \cdot c_n^2}{3n}(1 + h(n))\right)$.
2. *Пусть функция* $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такова, что существуют константы* B, C *и функция* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такая, что* $n = o(g)$ *при* $n \to \infty$ *и для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено* $g(n) \leqslant Bn^2$ *и* $C \cdot n^3 \leqslant l(n) \leqslant C_n^3 - g(n)$. *Пусть* $c_n = 1 - \frac{l(n)}{C_n^3}$. *Тогда существует такая функция* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *что* $h = o(1)$ *при* $n \to \infty$ *и для любого достаточно большого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство* $r(l(n)) \geqslant \frac{n^5}{8}\left(1 - 2c_n + \frac{2c_n^2}{9}(1 + h(n)) - \frac{10}{n} + \frac{20 \cdot c_n}{n} - \frac{20 \cdot c_n^2}{9n}(1 + h(n))\right)$.
3. *Пусть функция* $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такова, что существует такая константа* C, *что для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнена цепочка неравенств* $C_n^3 - Cn \leqslant l(n) \leqslant C_n^3$. *Пусть* $c_n = 1 - \frac{l(n)}{C_n^3}$. *Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство* $r(l(n)) \geqslant \frac{n^5}{8}\left(1 - 2c_n - \frac{10}{n} + \frac{20 \cdot c_n}{n}\right)$.

И, наконец, мы доказываем следующую верхнюю оценку.

Теорема 5. *Пусть дана произвольная функция* $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *с ограничением* $n = o(l)$. *Тогда существует такая функция* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *что* $h(n) \sim \frac{9l(n)^2}{2\alpha_n}$ *при* $n \to \infty$ *и для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство* $r(l(n)) \leqslant h(n)$.

В теореме 1 мы нашли асимптотическое значение величины $r(l)$ при $n \to \infty$. В случае теоремы 2 мы нашли порядок величины $r(l(n))$. Наконец, случай из теоремы 4 исследован не до конца, но оценка, полученная в нем, обладает тем свойством, что $r(l(n)) \sim |E_n|$ при $l(n) \sim |V_n|$ и $n \to \infty$.

Результат теоремы 3 улучшает оценку, полученную в теореме 2. Тем не менее, эта оценка по-прежнему не является точной: величина $r(l(n))$ удовлетворяет следующей цепочке неравенств:

$$\frac{3l(n)^2}{2\alpha_n}(1+o(1)) \leqslant r(l(n)) \leqslant \frac{9l(n)^2}{2\alpha_n}(1+o(1))$$

при $n \to \infty$. Между нижней и верхней оценками имеется зазор в 3 раза.

Посмотрим теперь на полученные результаты с несколько иной точки зрения. А именно, можно записать лучшую известную нам верхнюю оценку в виде

$$r(l(n)) \leqslant \frac{9l(n)^2}{2n}(1+o(1)) = \frac{n^5}{8}\left(1-2c_n+c_n^2\right)(1+o(1)), \tag{1}$$

где c_n из формулировки теоремы 4. В таком же виде можно записать и нижнюю оценку из той же теоремы:

$$r(l(n)) \geqslant \frac{n^5}{8}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}c_n+\frac{1}{3}c_n^2\right)(1+o(1)). \tag{2}$$

Конечно, если $c_n \to 0$, то оценки пунктов 1–3 новой теоремы асимптотически совпадают с оценкой (1) и в этом случае оценка (2) им не конкурент. Однако в условиях теоремы 4 возможно и что c_n не стремится к нулю (хотя и не превосходит константы, строго меньшей единицы). В этом случае оценки из пунктов 1–3 становятся лучше, чем оценка из теоремы 3 при выполнении неравенства

$$\frac{n^5}{8}\left(1-2c_n-\frac{10}{n}+\frac{20\cdot c_n}{n}\right) \geqslant \frac{3\left(c_n C_n^3\right)^2}{2},$$

которое выполнено при $c_n \leqslant 0.486\ldots$ и достаточно больших значениях $n \in \mathbb{N}$.

Результаты данной главы опубликованы в работах [13], [14], [15].

В **третьей главе** мы рассматриваем особые подграфы графа $G(n,3,1)$. Точнее, мы вводим понятие **звёздного множества**, размер которого напрямую влияет на эффективность оценок величины $r(l)$. А именно, будем называть независимое множество A *звездным* тогда и только тогда, когда существуют два таких элемента $x, y \in \mathcal{R}_n$, что для любой вершины $v \in A$ выполнено $x \in A, y \in A$. Диаметром $d(A)$ звездного множества A назовём мощность носителя A. И, наконец, диаметром $d(W)$ множества вершин W назовём максимальный диаметр звездного множества, содержащегося в W.

Формально говоря,

$$d(W) = \max_{A \subset W} \{ d(A) \mid A \text{ является звездным множеством} \}.$$

Также для произвольной функции $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющей неравенству $\rho(n) \leqslant n$ для любого натурального n, и произвольного $W \subset V_n$ положим

$$r_\rho(W) = \begin{cases} r(W) & \text{при} \quad d(W) \leqslant \rho(n) \\ C_n^5 & \text{при} \quad d(W) > \rho(n) \end{cases}$$

Оказывается, ограничив максимальный возможный размер звездного множества, можно значительно улучшить нижние оценки величины $r(l)$ для широкого спектра значений l.

В таком случае справедлива

Теорема 6. *Пусть функции $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таковы, что $n^2 = o(l)$ при $n \to \infty$, и для любого натурального n выполнено неравенство $l(n) \leqslant C_n^3$. Тогда для любого $W \subset V_n$ мощности $l(n)$ выполнено неравенство*

$$r_\rho(W) \geqslant \frac{l^2}{n} \left(2 - \frac{\rho(n)^3}{6l} + o(1) \right) \tag{3}$$

при $n \to \infty$.

Ясно, теорема 6 не всегда является улучшением старых результатов. Более того, в некоторых случаях оценка из теоремы 6 является тривиальной. А именно, в случае $d(W) > \rho(n)$ доказывать нечего — число рёбер в произвольном подмножестве вершин графа $G(n, 3, 1)$ никак не может быть больше общего числа рёбер графа. Однако, в других случаях результат данной теоремы является значительным улучшением старых результатов. Например, если $l = \frac{C_n^3}{2}$, а $\rho = \frac{n}{2}$, то правая часть оценки из теоремы может быть записана в виде $\frac{l^2}{n}(1.75 - \dots)$, что является несомненным улучшением старых результатов. Результаты данной главы опубликованы в работе [16].

И, наконец, в **четвёртой главе** мы изучаем общий случай $G(n, r, s)$. В этой главе получены общие верхние и нижние оценки величины $r(l)$, которые являются следствиями естественных обобщений конструкций, разработанных для графа $G(n, 3, 1)$. А именно, результатами данной главы являются три теоремы. Во-первых, справедлива:

Теорема 7. *Пусть даны числа r,s. Пусть $G_n = G(n,r,s)$. Пусть $l = l(n) \to \infty$. Тогда*

$$r(l) \leqslant (1 + o(1)) \cdot \frac{l^2}{n^s} \cdot \frac{C_r^s \cdot r!}{2 \cdot (r-s)!}.$$

Также в данной главе мы отдельно рассматриваем интересный случай $s = 0$, мотивированный многими задачами экстремальной теории графов. Это случай так называемых *кнезеровских графов*. Получается, что в его рамках новая верхняя оценка из теоремы 7 тривиальна, ибо асимптотически равна $\frac{l^2}{2}$, а это асимптотика числа ребер полного графа на l вершинах! Как ни странно, это не свидетельство слабости новой оценки. Имеет место

Теорема 8. *Пусть $l > \alpha(G(n,r,0)) = C_{n-1}^{r-1}$. Тогда*

$$r(l) \geqslant \frac{l\left(l - \left(C_n^r - C_{n-r}^r\right)\right)}{2}.$$

Есть, наконец, интересный режим, в котором теорема 8 не работает. Это режим, когда $l \sim C_{n-1}^{r-1}$. В таком случае оценка теоремы 8 становится отрицательной. Здесь удается доказать следующую теорему.

Теорема 9. *Пусть $l > \alpha(G(n,r,0)) = C_{n-1}^{r-1}$. Тогда*

$$r(l) \geqslant \min_{\beta \leqslant C_{n-1}^{r-1}} \max \left\{ l \cdot \left[\frac{l}{\beta}\right] - \beta \cdot \frac{\left[\frac{l}{\beta}\right] \cdot \left(\left[\frac{l}{\beta}\right] + 1\right)}{2}, (l - \beta)\left(\beta - r^2 C_{n-2}^{r-2}\right) \right\}.$$

Положения, выносимые на защиту

1. Получены оценки величины $r(l)$ для графа $G(n,3,1)$, в частности:
   (a) Точные оценки величины $r(l)$ для некоторых значений l.
   (b) Верхние и нижние оценки величины $r(l)$ для некоторых значений l.
   (c) Нижняя оценка величины $r(l)$ для подграфов специального вида.
2. Получены общие оценки величины $r(l)$ для графа $G(n,r,s)$ для произвольных r, s.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты важны для теории графов и гиперграфов, комбинаторной геометрии и экстремальной комбинаторики.

Достоверность результатов

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств.

Апробация результатов

Основные результаты работы докладывались на:

- 4th Polish Combinatorial Conference (2014)
- 57-я Научная Конференция МФТИ (2014)
- I Всероссийская научная конференция «Экстремальная комбинаторика и дискретная геометрия»; Адыгейский государственный университет (2018)

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в четырех работах автора и соавторов ([13] – [16]), список которых приведен в конце текста.

Личный вклад соискателя

Все результаты работ [13] – [16] получены соискателем. А. М. Райгородский участвовал в написании обзорной части и устранении ряда неточностей в первоначальных вариантах текстов.

Благодарности

Автор благодарен профессору А.М. Райгородскому за постановку задачи и внимательность к работе.

Список литературы

1. *Raigorodskii A.* Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics, AMS, Contemporary Mathematics. — 2014. — Vol. 625. — P. 93–109.
2. *Klee V.*, *Wagon S.* Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory // Math. Association of America. — 1991.
3. *Erdoś P.*, *Bruijn N. de.* A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations // Indag. Math. — 1951. — T. 13. — C. 371—373.
4. *Nagy Z.* A certain constructive estimate of the Ramsey number // Matematikai Lapok. — 1972. — Vol. 23, no. 26. — P. 301–302.
5. *Frankl P.*, *Wilson R.* Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. — 1981. — T. 1. — C. 357—368.
6. *Székely L.* Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems // Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest, J. Bolyai Math. Soc., Springer. — 2002. — Vol. 11. — P. 649–666.
7. *Larman D.*, *Rogers C.* The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. — 1972. — T. 19. — C. 1—24.
8. *Райгородский А.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи матем. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 107—146.
9. *Boltyanski V.*, *Martini H.*, *Soltan P.* Excursions into combinatorial geometry // Universitext, Springer, Berlin. — 1997.
10. *Райгородский А.* Вокруг гипотезы Борсука // Итоги науки и техники. Серия “Современная математика“. — 2007. — Т. 23. — С. 147—164.
11. *Мак-Вильямс Ф.*, *Слоэн Н.* Теория кодов, исправляющих ошибки // М.: Радио и связь. — 1979.

12. *Bassalygo L.*, *Cohen G.*, *Zémor G.* Codes with forbidden distances // Discrete Mathematics. — 2000. — Vol. 213. — P. 3–11.

13. *Пушняков Ф.* О числе рёбер в индуцированных подграфах специального дистанционного графа // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, № 4. — С. 550—558. — DOI: 10.4213/mzm10745. — URL: https://doi.org/10.4213/mzm10745.

14. *Пушняков Ф.* Новая оценка числа рёбер в индуцированных подграфах специального дистанционного графа // Пробл. передачи информ. — 2015. — Т. 51, № 4. — С. 371—377.

15. *Пушняков Ф.* О количествах ребер в порожденных подграфах некоторых дистанционных графов // Матем. заметки. — 2019. — Т. 105, № 4. — С. 592—602. — DOI: 10.4213/mzm11942. — URL: https://doi.org/10.4213/mzm11942.

16. *Ф. А. Пушняков*, *А. М. Райгородский*. Оценка числа ребер в особых подграфах некоторого дистанционного графа // Матем. заметки. — 2020. — Т. 107, № 2. — С. 286—298.