УДК 517.952

В. Н. Гежа

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Об асимптотике уединённой внутренней волны в режиме волны разрежения

Транспортные потоки, процессы распространения новых технологий, процессы фильтрации и газовой динамики описываются квазилинейным уравнением первого порядка. Асимптотика решения задачи Коши для этого уравнения позволяет ввести важные с содержательной точки зрения характеристики динамического процесса, например, скорость распространения новых технологий в моделях диффузии технологий шумпетеровского типа. Скорость сходимости решения задачи Коши к асимптотике определяет характерные времена, на которых это понятия могут использоваться, и зависит от динамики внутренних волн. В статье с помощью метода характеристик изучается скорость выхода решений на асимптотику для квазилинейного уравнения первого порядка скалярного закона сохранения.

Ключевые слова: скалярный закон сохранения, асимптотика, внутренние ударные волны.

V. N. Gezha

Moscow Institute of Physics and Technology

On the asymptotics of a solitary internal wave in the rarefaction wave mode

Transport flows, diffusion processes of new technologies, processes of filtration and gas dynamics are described by the first order quasilinear equation. The asymptotics of the solution of the Cauchy problem for this equation allows us to introduce characteristics of the dynamic process which are important from a substantive view point, for example, the diffusion rate of new technologies in diffusion models of Schumpeter type technologies. The convergence rate of the Cauchy problem solution to the asymptotics determines the characteristic times for these concepts to be used and depends on the internal waves dynamics. Using the method of characteristics, the paper studies the rate for the solution to reach the asymptotics for the first order quasilinear equation of the scalar conservation law.

Key words: scalar conservation law, asymptotics, internal shock waves.

1. Введение

В данной работе рассматривается уравнение в частных производных вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0, x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \tag{1}$$

с заданным начальным условием типа Римана

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{2}$$

где $u_0(x)$ — непрерывная вещественная функция вида

$$u_0(x) = \begin{cases} u_-, x \leq x_- \\ g(x), x_- \leq x \leq x_+, \\ u_+, x \geq x_+ \end{cases}$$

где $u_- < u_+, x_- < x_+$ — некоторые константы.

Ещё в середине 19 века были найдены примеры гладких функций $F(u)$ и $u_0(x)$, для которых решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) имеют разрывы, названные позднее в газовой динамике *ударными волнами.* В связи с этим возникает необходимость в определении обобщённого решения — такого решения $u(x,t)$ в классе обобщённых функций, для которого возможно было бы сформулировать и доказать его существование и единственность для задачи Коши (1), (2). Рассмотрим определение, приведённое в работе [1] для более общего случая систем, в рамках нашей системы (1), (2).

Определение. [1] Ограниченная измеримая функция $u(x,t)$ называется обобщённым решением задачи (1), (2) в слое $\Pi_t = \mathbb{R} \times [0,T]$, если:

1)Для любой константы k и любой гладкой финитной в Π_t функции $w(x,t) \geq 0$ выполняется неравенство

$$\iint\limits_{\Pi_t} (|u-k|w_t + \operatorname{sign}\{u-k\}[F(u) - F(k)]w_x)dxdt \geq 0.$$

2)Существует такое множество E нулевой меры на $[0,T]$, что при $t \in [0,T] \setminus E$ функция $u(x,t)$ определена почти всюду в $\mathbb{R}$ и что для любого множества $K_R = \{|x| \leq R\} \subset \mathbb{R}:$

$$\lim_{t\to 0, t\in[0,T]\setminus E} \int\limits_{K_R} |u(t,x) - u_0(x)|dx = 0.$$

Там же, в работе [1], доказывается для более общего случая теорема о существовании и единственности подобного решения для соответствующей задачи Коши.

Возникает вопрос о поведении подобных решений $u(x,t)$ при $t \to \infty$. Этот вопрос был решён Гельфандом в работе [2] для специальных начальных условий вида

$$u_0(x) = \begin{cases} u_-, x \leq x_0 \\ u_+, x \geq x_0, \end{cases}$$

где $u_- < u_+$ — некоторые константы.

Теорема Гельфанда впоследствии была обобщена в статье 1987 года [3] для случая непрерывных монотонных начальных условий. Мы же приведём здесь недавний результат из статьи [4], обобщающий теорему для случая немонотонных начальных условий (такие условия могут встречаться в различных прикладных задачах, например, в математической физике или при моделировании шумпетеровской динамики распространения новых технологий (см. [5], [6])). Далее будем считать, что $\varphi(u) = F'(u)$.

Теорема. [4] *Пусть $\varphi(u)$ — непрерывно дифференцируемая функция, производная которой имеет только изолированные нули, и $S = \{u \mid F^{**}(u) < F(u)\}$, где будем считать, что S представимо в следующем виде: $S = (u_-^0, u_+^0) \cup (u_-^1, u_+^1) \cup ... \cup (u_-^L, u_+^L)$, где $u_-^0 = u_-, u_+^L = u_+$, а также $d\varphi(u_\pm^l)/du \neq 0, \quad l = 0, ..., L$. Тогда решение задачи Коши имеет следующую асимптотическую структуру*:

$$||u(\cdot,t) - \widetilde{u}(\cdot,t)||_{L_1(\mathbb{R}_x)} \to 0, \quad t \to +\infty,$$

$$\widetilde{u}(x,t) = \begin{cases} u_-, x < c_0 \cdot t + d_0 \\ \varphi^{-1}(x/t), c_l \cdot t + d_l \leq x < c_{l+1} \cdot t + d_{l+1}, \quad l = 0, ..., L-1, \\ u_+, x \geq c_L \cdot t + d_L \end{cases}$$

где функция $\varphi(u)$ определена на дополнении к множеству S, c_l соответственно определены по формулам

$$c_l = \frac{F(u_+^l) - F(u_-^l)}{u_+^l - u_-^l}, \quad l = 0, ..., L,$$

а d_l могут быть определены из начальных условий с помощью правил Максвелла:

$$\int\limits_{y_-^l}^{d_l} (u_0(x) - u_-^l)dx + \int\limits_{d_l}^{y_+^l} (u_0(x) - u_+^l)dx = 0,$$

где

$$u_0(y_-^l) = u_-^l, \quad l = 1, ..., L,$$

$$u_0(y_+^l) = u_+^l, \quad l = 0, ..., L-1,$$

$$u_0(y_-^0) = u_-, \quad u_0(y_+^L) = u_+.$$

При этом функции $y_\pm^l$ определены следующим образом:
Если $u_\pm^l \notin \{u_-, u_+\}$ или $u_\pm^l \in \{u_-, u_+\}$ и $d\varphi(u_\pm^l)/du > 0$, то

$$u_0(y_-^l) = u_-^l, \quad u_0(y_+^l) = u_+^l,$$

$$\int\limits_{y_-^l}^{x_+} (u_0(x) - u_-^l)dx = \max_y \int\limits_y^{x_+} (u_0(x) - u_-^l)dx,$$

$$\int\limits_{y_+^l}^{x_+} (u_0(x) - u_+^l)dx = \max_y \int\limits_y^{x_+} (u_0(x) - u_+^l)dx.$$

Если же $u_\pm^l \in \{u_-, u_+\}$ и $d\varphi(u_\pm^l)/du < 0$, то

$$u_0(y_-^l) = u_-^l, \quad u_0(y_+^l) = u_+^l,$$

$$\int\limits_{x_-}^{y_-^l} (u_0(x) - u_-^l)dx = \max_y \int\limits_{x_-}^{y} (u_0(x) - u_-^l)dx,$$

$$\int\limits_{x_-}^{y_+^l} (u_0(x) - u_+^l)dx = \max_y \int\limits_{x_-}^{y} (u_0(x) - u_+^l)dx.$$

Эта теорема показывает, что решение сходится к асимптотике по норме L_1, причём асимптотика может быть получена из начальных условий, но остаётся вопрос о характере сходимости. Структура асимптотики — это чередование участков ударных волн и волн разряжения.

Для случая $u_- > u_+$ и специальных начальных условий, отвечающих случаю одного участка ударной волны, в статье [7] доказано, что решение сходится к асимптотике за конечное время.

Теорема. [7] *Пусть $F(u)$ — выпуклая и пусть для начального условия выполнено: $u_0(x) = u_+$ при $x > N$ и $u_0(x) = u_-$ при $x < -N$ ($u_- > u_+$), а также $u_0(x)$ — ограничена и измерима. Тогда $\exists t_0 > 0$ такое, что решение $u(x,t)$ задачи Коши при $t \geq t_0$ совпадает* *с* u_+ *при* $x - kt - x_0 > 0$ *и с* u_- *при* $x - kt - x_0 > 0$, *где* $k = \frac{F(u_+)-F(u_-)}{u_+-u_-}$, *а* x_0 *определено равенством*

$$\int\limits_{-\infty}^{x_0} (u_0(x) - u_-)dx + \int\limits_{x_0}^{+\infty} (u_0(x) - u_+)dx = 0.$$

Тем не менее в случае $u_- < u_+$ сходимость за конечное время в общем случае отсутствует. Подобный эффект вызван внутренними ударными волнами, то есть ударными волнами, которые исчезают в асимптотике. Именно поэтому их изучение важно для разрешения вопроса о скорости сходимости к асимптотике в случае $u_- < u_+$.

В недавней работе Петросян [8] получены верхние оценки на скорость сходимости: Пусть $F(u)$ является дважды непрерывно дифференцированной и строго выпуклой. Предположим, что начальная функция $u_0(x)$ имеет односторонние предельные средние значения, не зависящие от смещения: $\forall a_0 \in R$

$$\frac{1}{y}\int\limits_{a}^{a+y} u_0(x)dx \to u_- \quad \text{при} \quad y \to -\infty \quad \text{равномерно} \quad \text{при} \quad a \le a_0,$$

$$\frac{1}{y}\int\limits_{a}^{a+y} u_0(x)dx \to u_+ \quad \text{при} \quad y \to +\infty \quad \text{равномерно} \quad \text{при} \quad a \ge a_0.$$

Теорема. [8] *Предположим, что* $\forall a_0 \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{a}^{a+y} (u_0(x) - u_-)dx = O(|y|^{a-}) \quad \textit{при} \quad y \to -\infty,$$

$0 \le a^- = \text{const} < 1$, *равномерно при* $a \le a_0$,

$$\int\limits_{a}^{a+y} (u_0(x) - u_+)dx = O(y^{a+}) \quad \textit{при} \quad y \to +\infty,$$

$0 \le a^+ = \text{const} < 1$, *равномерно при* $a \ge a_0$.

Пусть $a = \max\{a^-, a^+\}$, $u_- < u_+$. *Тогда существует константа* $T > 0$, *такая что*

$$|u(x,t) - \widetilde{u}(x,t)| \le C \cdot t^{-1+\frac{1}{2-a}}, C = \text{const} > 0$$

для $t > T$ *и* $x \in \mathbb{R}$, *где* $\widetilde{u}(x,t) = H(x/t)$,

$$H(t) = \begin{cases} u_-, x < \varphi(u_-) \cdot t \\ \varphi^{-1}(x/t), \varphi(u_-) \le x/t < \varphi(u_+) \\ u_+, x \ge \varphi(u_+) \cdot t. \end{cases}$$

Для начальных условий типа Римана мы можем считать, что величина a из теоремы выше стремится к $-\infty$, то есть верна оценка

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C = \text{const} > 0, \exists T > 0 : |u(x,t) - \widetilde{u}(x,t)| \le C \cdot t^{-1+\varepsilon} \quad \forall t > T, \forall x \in \mathbb{R}.$$

В данной работе для специальных начальных условий типа Римана выводится результат о том, что существует нижняя оценка вида

$$\exists \hat{C} = \text{const} > 0, \exists T > 0 : |u(x,t) - \widetilde{u}(x,t)| \ge \hat{C} \cdot t^{-1}, \quad \forall t > T, \forall x \in \mathbb{R},$$

то есть оценка из статьи Петросян для условий типа Римана не может быть улучшена в общем случае.

2. Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим уравнение (1) с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{3}$$

где $F(u)$ — равномерно выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая функция,

$$u_0(x) = \begin{cases} u_-, x < -N \\ G(x), x \in [-N;0] \\ J(x), x \in [0;M] \\ u_+, x > M, \end{cases}$$

а u_- и u_+ — некоторые константы, $u_- < u_+$, $G(x)$ и $J(x)$ — строго монотонно возрастающие дифференцируемые функции, для которых $G(0) > J(0)$, $G(-N) = u_-$, $J(M) = u_+$, $M, N \in \mathbb{R}_+$. Таким образом, в начальный момент времени мы имеем разрыв в точке $x = 0$, за эволюцией которого в дальнейшем хотим пронаблюдать. Известно, что для задачи (1),(3) новых разрывов появиться не может (это следует, например, из формулы Лакса-Олейник [9]), следовательно, только изначальный разрыв будет влиять на сходимость к асимптотике.

Сразу сделаем замечание, что замена координат позволяет привести любые подобные начальные условия с разрывом не в нуле к случаю выше, поэтому на самом деле положение разрыва в нуле не существенно и было выбрано нами для удобства рассуждений.

В каждый фиксированный момент времени t^* мы можем рассматривать зависимость решения от координаты x: $u(x,t^*)$ может быть представлено в виде графика. Обозначим за $h_1(t)$ зависимость ординаты нижней точки разрыва от времени, а за $h_2(t)$ зависимость ординаты верхней точки разрыва от времени. В этих обозначениях, $h_2(0) = G(0)$, $h_1(0) = J(0)$. Обозначим $R(t) = h_2(t) - h_1(t)$.

Теорема 1. *Для задачи Коши* (1),(3) *справедлива оценка* $R(t) \geq \frac{C}{t}$, *где* $C > 0$ — *некоторая константа, а* $R(t)$ *определена выше.*

Доказательство

Пусть $G^*(h) = G^{-1}(x)$, а $J^*(h) = J^{-1}(x)$. Благодаря тому, что G и J — строго монотонно возрастающие функции, G^* и J^* существуют и также являются строго монотонно возрастающими. Получаем следующее уравнение, вытекающее из метода характеристик [9], смысл которого состоит в том, что в момент времени t характеристики точки на левом участке возрастания и разрыва пересекутся (справа записана характеристика точки на левом участке возрастания, а слева — характеристика разрыва):

$$G^*(h_2(t)) + F'(h_2(t)) \cdot t = 0 + \int_0^t \frac{F(h_2(\tau)) - F(h_1(\tau))}{h_2(\tau) - h_1(\tau)} d\tau.$$

Аналогичное уравнение может быть записано для описания пересечения характеристик разрыва с характеристиками точек на правом участке возрастания.

Таким образом, получаем систему, неявно задающую $h_1(t)$ и $h_2(t)$:

$$\begin{cases} G^*(h_2(t)) + F'(h_2(t)) \cdot t = 0 + \int_0^t \frac{F(h_2(\tau)) - F(h_1(\tau))}{h_2(\tau) - h_1(\tau)} d\tau \\ J^*(h_1(t)) + F'(h_1(t)) \cdot t = 0 + \int_0^t \frac{F(h_2(\tau)) - F(h_1(\tau))}{h_2(\tau) - h_1(\tau)} d\tau. \end{cases} \tag{4}$$

Предложение 1. Для задачи (1),(3) функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$, введённые ранее, дифференцируемы по t.

Данное предложение напрямую следует из формулы Лакса–Олейник.

Лемма 1. *Для задачи (1),(3) справедлива оценка* $R(t) \geq \frac{C}{t^{\frac{\kappa}{\varepsilon}}}$, *где* $C > 0, \varepsilon = \min(F''(u) \mid u \in [h_1(0), h_2(0)])$, $\kappa = \max(F''(u) \mid u \in [h_1(0), h_2(0)])$.

Доказательство

Продифференцируем систему (4) по t (мы имеем право это сделать, так как все функции, входящие в систему (4), дифференцируемы по своему аргументу на всей области определения):

$$\begin{cases} (G^*)^{'}(h_2(t)) \cdot h_2^{'}(t) + F^{'}(h_2(t)) + F^{''}(h_2(t)) \cdot h_2^{'}(t) \cdot t = \frac{F(h_2(t))-F(h_1(t))}{h_2(t)-h_1(t)}, \\ h_2(0) = G(0) \\ (J^*)^{'}(h_1(t)) \cdot h_1^{'}(t) + F^{'}(h_1(t)) + F^{''}(h_1(t)) \cdot h_1^{'}(t) \cdot t = \frac{F(h_2(t))-F(h_1(t))}{h_2(t)-h_1(t)}, \\ h_1(0) = J(0). \end{cases}$$

Выразим отсюда $h_2^{'}(t)$ и $h_1^{'}(t)$:

$$\begin{cases} h_2^{'}(t) = \frac{-F'(h_2)+[\frac{F(h_2)-F(h_1)}{h_2-h_1}]}{(G^*)^{'}(h_2)+F^{''}(h_2)\cdot t}, \\ h_2(0) = G(0), \\ h_1^{'}(t) = \frac{-F'(h_1)+[\frac{F(h_2)-F(h_1)}{h_2-h_1}]}{(J^*)^{'}(h_2)+F^{''}(h_2)\cdot t}, \\ h_1(0) = J(0). \end{cases}$$

Числитель правой части первого уравнения меньше нуля при любых $h_2 > h_1$ в силу равномерной выпуклости $F(u)$. Аналогично, числитель правой части второго уравнения больше нуля при любых $h_2 > h_1$. Так как функция $F(u)$ равномерно выпукла, то можно оценить её вторую производную на участке $[h_1(0); h_2(0)]$ как $0 < \varepsilon^{'} \leq \varepsilon \leq F^{''}(u) \leq \kappa < +\infty$. Из монотонного возрастания функций G^* и J^* и того факта, что $t > 0$, следует, что оба знаменателя являются положительными, то есть $h_2^{'}(t) < 0 \quad \forall t \geq 0$, а $h_1^{'}(t) > 0 \quad \forall t \geq 0$. Тогда мы можем записать следующую оценку:

$$\begin{cases} h_2^{'}(t) \geq \frac{-F'(h_2)+[\frac{F(h_2)-F(h_1)}{h_2-h_1}]}{\varepsilon\cdot t}, \\ h_2(0) = G(0), \\ h_1^{'}(t) \leq \frac{-F'(h_1)+[\frac{F(h_2)-F(h_1)}{h_2-h_1}]}{\varepsilon\cdot t}, \\ h_1(0) = J(0). \end{cases}$$

Вычитая из первого неравенства системы второе, получаем следующую оценку:

$$\begin{cases} R^{'}(t) \geq \frac{F'(h_1)-F'(h_2)}{\varepsilon\cdot t}, \\ R(0) = G(0) - J(0) > 0, \end{cases}$$

$$R^{'}(t) \geq \frac{F'(h_1) - F'(h_2)}{\varepsilon \cdot t} = \frac{F^{''}(\xi)}{\varepsilon} \cdot \frac{-R(t)}{t} \geq \frac{\kappa}{\varepsilon} \cdot \frac{-R(t)}{t}.$$

Покажем, что из этого следует оценка

$$R(t) \geq R(1) \cdot \frac{\text{const}}{t^{\frac{\kappa}{\varepsilon}}}.$$

Будем действовать в духе доказательства леммы Гронуолла:

$$R^{'}(t) \geq \frac{\kappa}{\varepsilon} \cdot \frac{-R(t)}{t}.$$

Перенося всё в левую часть и домножая на экспоненту, являющуюся положительной величиной, получаем

$$R^{'}(t) \cdot \exp\left(\int_1^t \frac{\frac{\kappa}{\varepsilon}}{\tau} d\tau\right) + R(t) \cdot \frac{\frac{\kappa}{\varepsilon}}{t} \cdot \exp\left(\int_1^t \frac{\frac{\kappa}{\varepsilon}}{\tau} d\tau\right) \geq 0.$$

Заметим, что выражение справа может быть переписано в виде

$$\frac{d}{dt}\left(R(t)\cdot\exp\left(\int_1^t \frac{\frac{\kappa}{\varepsilon}}{\tau}d\tau\right)\right)\geq 0.$$

Отсюда получем следующее утверждение:

$$R(t)\geq R(1)\cdot\frac{\text{const}}{t^{\frac{\kappa}{\varepsilon}}}=\frac{C}{t^{\frac{\kappa}{\varepsilon}}},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, при любом конечном $T>0$ можем считать, что $R(T)>0$ — некоторое число.

Тогда будем рассматривать $\varepsilon(T)=\min(F^{''}(u)\mid u\in[h_1(T),h_2(T)])$ и $\kappa(T)=\max(F^{''}(u)\mid u\in[h_1(T),h_2(T)])$. Так как производная h_1 по времени больше нуля, а производная h_2 по времени меньше нуля, то $[h_1(T),h_2(T)]$ постоянно сжимается с двух сторон с ростом T, из чего следует, что если $h_2(T)\to h_1(T)$ при $T\to+\infty$, то и $\kappa(T)\to\varepsilon(T)$ при $T\to+\infty$.

Предложение 2. Для задачи (1),(3) справедлива оценка $R(t)\leq\frac{C}{t^{\frac{\varepsilon}{\kappa+\varepsilon}}}$, где $C>0,\varepsilon=\min(F^{''}(u)\mid u\in[h_1(0),h_2(0)])$, $\kappa=\max(F^{''}(u)\mid u\in[h_1(0),h_2(0)])$. При этом $h_2(t)\to h_1(t)$ при $t\to+\infty$ и $\kappa(t)\to\varepsilon(t)$ при $t\to+\infty$, где $\kappa(t)=\max(F^{''}(u)\mid u\in[h_1(t),h_2(t)])$ и $\varepsilon(t)=\min(F^{''}(u)\mid u\in[h_1(t),h_2(t)])$.

Это предложение непосредственно следует из результата Петросян, приведённого ранее.

Покажем, что всегда можно уточнить оценку снизу, рассматривая поведение системы не в начальный момент времени, а в момент времени T:

$$\begin{cases}R^{'}(t)\geq\frac{F'(h_1)-F'(h_2)}{\varepsilon(t)\cdot t},\\ R(0)=G(0)-J(0)>0,\end{cases}$$

$$R^{'}(t)\geq\frac{F'(h_1)-F'(h_2)}{\varepsilon(T)\cdot t}=\frac{F^{''}(\xi)}{\varepsilon(t)}\cdot\frac{-R(t)}{t}\geq\frac{\kappa(t)}{\varepsilon(t)}\cdot\frac{-R(t)}{t}.$$

Будем действовать аналогично предыдущему доказательству для нижней оценки:

$$R^{'}(t)\geq\frac{\kappa(t)}{\varepsilon(t)}\cdot\frac{-R(t)}{t},$$

откуда получаем

$$R^{'}(t)\cdot\exp\left(\int_T^t\frac{\frac{\kappa(t)}{\varepsilon(t)}}{\tau}d\tau\right)+R(t)\cdot\frac{\frac{\kappa(t)}{\varepsilon(t)}}{t}\cdot\exp\left(\int_T^t\frac{\frac{\kappa(t)}{\varepsilon(t)}}{\tau}d\tau\right)\geq 0,$$

откуда в свою очередь

$$\frac{d}{dt}\left(R(t)\cdot\exp(\int_1^t\frac{\frac{\kappa(t)}{\varepsilon(t)}}{\tau}d\tau)\right)\geq 0,$$

из чего следует, что

$$R(t)\geq R(T)\cdot\exp\left(-\int_T^t\frac{\frac{\kappa(t)}{\varepsilon(t)}}{\tau}d\tau\right)\geq R(T)\cdot\exp\left(-\int_T^t\frac{\frac{\kappa(T)}{\varepsilon(T)}}{\tau}d\tau\right)=R(T)\cdot\frac{\text{const}}{t^{\frac{\kappa(T)}{\varepsilon(T)}}}.$$

Так как мы знаем, что $\kappa(T)\to\varepsilon(T)$ при $T\to+\infty$, то есть $\frac{\kappa(T)}{\varepsilon(T)}\to 1$ при $T\to+\infty$, то остаётся вопрос о том, сходится ли $\frac{1}{t^{\frac{\kappa(t)}{\varepsilon(t)}}}$ к $\frac{1}{t}$ при $T\to+\infty$.

Запишем разность в виде дроби:

$$\frac{1}{t^{\frac{\kappa(t)}{\varepsilon(t)}}} - \frac{1}{t} = \frac{1 - t^{\frac{\kappa(t)}{\varepsilon(t)}-1}}{t^{\frac{\kappa(t)}{\varepsilon(t)}}}.$$

Можно утверждать, что существует сходимость $\frac{1}{t^{\frac{\kappa(t)}{\varepsilon(t)}}}$ к $\frac{1}{t}$ при $t \to +\infty$, если ограничен числитель данной дроби. Числитель ограничен тогда и только тогда, когда ограничен его логарифм:

$$\left(\frac{\kappa(t)}{\varepsilon(t)} - 1\right) \cdot \ln(t) < \mathrm{const}.$$

Для доказательства сходимости нам необходимо доказать справедливость утверждения выше.

Вспомним, что $\kappa(t)$ и $\varepsilon(t)$ — это максимум и минимум на отрезке $[h_1(t); h_2(t)]$ непрерывной функции $F''(u)$. Тогда, обозначая за A максимум производной $F''(u)$ на отрезке $[h_1(0); h_2(0)]$, получаем следующую оценку:

$$\frac{\kappa(t)}{\varepsilon(t)} - 1 = \frac{\kappa(t) - \varepsilon(t)}{\varepsilon(t)} \leq \frac{R(t) \cdot A}{\varepsilon'}.$$

Отсюда, зная верхнюю оценку для $R(t)$, получаем, что

$$\frac{\kappa(t)}{\varepsilon(t)} - 1 \leq \frac{R(t) \cdot A}{\varepsilon'} \leq \frac{\mathrm{const} \cdot A}{\varepsilon'} \cdot \frac{1}{t^{\frac{\varepsilon}{\kappa+\varepsilon}}}.$$

Из этого при $t \to +\infty$ следует оценка вида $\frac{\kappa(t)}{\varepsilon(t)} - 1 \leq \frac{R(t) \cdot A}{\varepsilon'} \leq \frac{\mathrm{const}}{\ln(t)}$. Таким образом получаем, что $\frac{1}{t^{\frac{\kappa(t)}{\varepsilon(t)}}} \to \frac{1}{t}$ при $T \to +\infty$.

Таким образом, мы показали, что для системы (1),(3) справедлива следующая нижняя оценка: $R(t) \geq \frac{\mathrm{const}}{t}$. **Теорема доказана.**

Замечание 1. Учитывая, что мы показали, что координата верхней границы разрыва со временем уменьшается, а нижней — увеличивается, можно ослабить требования на $F(u)$, потребовав строгую выпуклость лишь на $[H(0), G(0)]$.

Замечание 2.: Данная оценка очевидно может быть перенесена на класс начальных условий, которые за конечное время приходят к виду (3). Более того, существуют начальные условия, при которых скорость сходимости верхней и нижней границ разрыва имеет вид $\frac{\mathrm{const}}{t}$, то есть оценка не может быть улучшена для общего случая начальных условий вида (2). Пример таких начальных условий для $F(u) = u^2$:

$$u_0(x) = \begin{cases} -1, x < -1,5, \\ \frac{4}{3}x + 1, x \in [-1,5; 0], \\ \frac{4}{3}x - 1, x \in [0; 1,5], \\ 1, x > 1,5. \end{cases} \tag{5}$$

Как несложно получить, к примеру с помощью формулы Лакса-Олейник, решением задачи Коши (1),(5) будет

$$u(x,t) = \begin{cases} -1, x < -1,5 - 2t, \\ \frac{4x+3}{3+8t}, x \in [-1,5 - 2t; 0], \\ \frac{4x-3}{3+8t}, x \in [0; 1,5 + 2t], \\ 1, x > 1,5 + 2t. \end{cases}$$

В данном случае при каждом фиксированном t при $x = 0$ решение будет иметь разрыв, размер которого зависит от t как $R(t) = \frac{6}{3+8t}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-07-00285).

Литература

1. *Кружков С.Н.* Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187, № 1. С. 29–32.
2. *Гельфанд И.М.* Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // УМН. 1959. Т. 14, № 2(86). С. 87–158.
3. *Кружков С.Н., Петросян Н.С.* Асимптотическое поведение решений задачи Коши для нелинейных уравнений первого порядка // УМН. 1987. Т. 42, № 5. С. 3–40.
4. *Хенкин Г.М., Шананин А.А.* Проблема Коши–Гельфанда и обратная задача для квазилинейного уравнения первого порядка // Функц. анализ и его прил. 2016. Т. 50, № 2. С. 61–74.
5. *Куликовский А.Г., Чугайнова А.П.* Об условиях распада нелинейной волны в вязкоупругой среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38, № 2. С. 315–323.
6. *Хенкин Г.М., Шананин А.А.* Математическое моделирование шумпетеровской инновационной динамики // Матем. моделирование. 2014. Т. 26, № 8. С. 3–19.
7. *Ильин А.М., Олейник О.А.* Асимптотическое поведение решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при больших значениях времен // Матем. сб. 1960. Т. 51(93), № 2. С. 191–216.
8. *Petrosyan N.S.* Asymptotic Time-Behaviour of Solutions to Scalar Conservation Law with a Convex Flux Function // EPJ Web of Conferences 224, 01005, 2019.
9. *Evans L.C.* Partial Differential Equations. AMS, 2010.

References

1. *Kruzhkov S.N.* Generalized solutions of the Cauchy problem as a whole for nonlinear equations of the first order. Rep. USSR Academy of Sciences. 1969. V. 187, N 1. P. 29–32. (in Russian).
2. *Gelfand I.M.* Some problems of the theory of quasilinear equations. UMN. 1959. V. 14, N 2(86). P. 87–158. (in Russian).
3. *Kruzhkov S.N., Petrosyan N.S.* Asymptotic behavior of solutions of the Cauchy problem for first-order nonlinear equations. UMN. 1987. V. 42, N 5. P. 3–40. (in Russian).
4. *Khenkin G.M., Shananin A.A.* The Cauchy – Gelfand problem and the inverse problem for a first-order quasilinear equation. Func. Analysis and its app. 2016. V. 50, N 2. P. 61–74. (in Russian).
5. *Kulikovskii A.G., Chugainova A.P.* On the decay conditions of a nonlinear wave in a viscoelastic medium. J. Comput. mat. and mat. Phys. 1998. V. 38, N 2. P. 315–323. (in Russian).
6. *Khenkin G.M., Shananin A.A.* Mathematical modeling of Schumpeterian innovative dynamics. Matem. Mod. 2014. V. 26, N 8. P. 3–19. (in Russian).
7. *Ilyin A.M., Oleinik O.A.* Asymptotic behavior of the solutions of the Cauchy problem for some quasilinear equations with large times. Mat. Comp. 1960. V 51(93), N 2. P. 191–216. (in Russian).
8. *Petrosyan N.S.* Asymptotic Time-Behaviour of Solutions to Scalar Conservation Law with a Convex Flux Function. EPJ Web of Conferences 224, 01005, 2019.
9. *Evans L.C.* Partial Differential Equations. AMS, 2010.

Поступила в редакцию 23.03.2020