УДК 517.95

Д. А. Лощенова

Российский университет дружбы народов

О следах G-операторов, сосредоточенных на подмногообразиях

Исследуются следы операторов, ассоциированных с действиями компактных групп Ли. В ситуации, когда след сосредоточен на подмногообразии неподвижных точек действия группы, доказана псевдодифференциальность следа. В качестве следствия получена теорема конечности, а также построены фредгольмовы оснащения получаемых следов.

Ключевые слова: эллиптические операторы, задачи Соболева, неподвижные точки, действия групп Ли, фредгольмовы оснащения

D. A. Loshchenova

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

On the traces of G-operators supported on submanifolds

We study traces of operators associated with actions of compact Lie groups. In the situation when the trace is supported in a submanifold of fixed points of the action, we prove that the trace is a pseudodifferential operator. As a corollary, we prove finiteness theorem and construct Fredholm riggings of the obtained traces.

Key words: elliptic operators, Sobolev problems, fixed points, Lie group action, Fredholm riggings.

1. Введение

Для пары (M, X), состоящей из замкнутого гладкого многообразия M и его подмногообразия X, определена операция взятия следа, которая каждому оператору на M сопоставляет его след — некоторый оператор на подмногообразии X. Следы появились в работах по относительной эллиптической теории (см. [1–3]) и применяются в исследовании задач Соболева с граничными условиями на подмногообразиях произвольной размерности. В последнее время интерес к следам возник в связи с тем, что следы дают операторы новой природы. В частности, исследовались следы операторов, ассоциированных с действиями групп Ли G на основном многообразии M (такие операторы будем ниже называть G-операторами, см. [4]). Было установлено, что такие следы в общем случае уже не являются G-операторами, а локализованы на некоторых подмножествах подмногообразия X. Соответствующие общие теоремы о локализации получены в работе [5]. В работе [6] исследованы следы, которые сосредоточены на конечном множестве точек — неподвижных точек действия группы. В этой ситуации для следов (которые оказываются операторами Фурье–Меллина) была установлена теорема конечности и предъявлена формула индекса.

В настоящей работе рассматривается случай, когда неподвижные точки действия группы образуют подмногообразие произвольной размерности, вложенное в данное подмногообразие X. В этом случае основная теорема настоящей работы утверждает, что след G-оператора представляет собой псевдодифференциальный оператор с операторно-значным символом, причём для любого значения параметра этот символ является оператором Фурье–Меллина, изученным нами ранее. Этот результат даёт в качестве следствия теорему конечности. Однако, работая с символом — оператором Фурье–Меллина, мы уже не можем говорить о естественных условиях, при которых он обратим, а только об условиях, при которых он фредгольмов. Мы также рассматриваем ситуацию, когда символ не является обратимым, а является только фредгольмовым. В этом случае задача не является фредгольмовой. Однако её можно достроить до фредгольмовой задачи, пользуясь техникой оснащений, разработанной Б. Ю. Стерниным. Эта техника заключается в том, что если к данному псевдодифференциальному оператору с фредгольмовым операторно-значным символом добавить конечное число граничных и кограничных условий, этот оператор становится фредгольмовым (см. [7]). Мы применяем эту технику и строим оснащения следа G-оператора.

2. Постановка задачи

Рассматривается гладкое замкнутое многообразие M, замкнутое подмногообразие X с гладким вложением $i : X \longrightarrow M$ коразмерности ν и компактная группа Ли G, гладко действующая на многообразии M. На M рассматривается G-оператор (см. [4]):

$$D = \int_G D_g T_g dg,$$

где D_g — семейство псевдодифференциальных операторов порядка m, гладко зависящее от $g \in G$, T_g — оператор сдвига, индуцированный действием элемента $g \in G$:

$$T_g u(x) = u(g^{-1}x),$$

dg — мера Хаара на группе G.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы исследовать оператор

$$i^!(D) = i^* D i_* : H^s(X) \to H^{s-m-\nu}(X), \tag{1}$$

который называется *следом* оператора D на подмногообразии X (см. [1]), где i^* и i_* — операторы ограничения и коограничения, отвечающие вложению $X \to M$. Напомним, что оператор ограничения i^* действует непрерывно в пространствах

$$i^* : H^s(M) \to H^{s-\frac{\nu}{2}}(X), \quad s - \nu/2 > 0,$$

и сопоставляет функции на многообразии M ее ограничение на подмногообразие X: $i^*(u) = u|_X$, а оператор коограничения i_*, определяемый двойственным образом к оператору i^*, действует непрерывно в пространствах

$$i_* : H^{-s+\frac{\nu}{2}}(X) \to H^{-s}(M), \quad -s + \nu/2 < 0,$$

по формуле $i_*(u) = u \otimes \delta_X$, где δ_X — дельта-функция на подмногообразии X. Таким образом, след (1) корректно определен при $s < 0$, $s - m - \nu > 0$.

3. Действие группы вблизи неподвижного подмногообразия

Введем некоторые условия на действие группы G по отношению к подмногообразию X, в которых, с одной стороны, потребуем, чтобы неподвижные точки действия группы G образовывали подмногообразие в X, и, с другой стороны, наложим некоторые условия трансверсальности.

Пусть $X^G = \{x \in X \mid gx = x \ \forall g \in G\}$ — множество неподвижных точек на X и $G_X = \{g \in G \mid \exists x \in X \setminus X^G : gx \in X\}$ — множество элементов группы G, которые оставляют внутри X другие точки, кроме неподвижных.

Определение 3.1. Действие группы G будем называть *допустимым*, если

1) множество X^G является замкнутым подмногообразием в X, и для любой точки $x \in X \setminus X^G$ ее орбита Gx трансверсальна подмногообразию X;

2) множество G_X состоит из конечного числа элементов, и для любого элемента $g \in G_X$ имеем $gX = X$, где gX — образ многообразия X под действием элемента группы g.

Пример 3.2. На рис. 1 изображен пример, когда $M = \mathbb{R}^3$, $X = \mathbb{R}^2$, группа G действует поворотами вокруг прямой $X^G = \mathbb{R}^1$, лежащей в X.

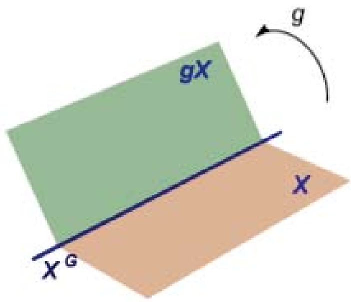

Рис. 1. Многообразия X, gX, X^G. Объемлющее пространство соответствует многообразию M

Пусть N — нормальное расслоение над многообразием X^G, отвечающее вложению $X^G \hookrightarrow M$. Далее будем отождествлять окрестность нулевого сечения в N с некоторой трубчатой окрестностью $U \subset M$ подмногообразия X^G в многообразии M с помощью фиксированного диффеоморфизма.

Пусть N_e — нормальное расслоение над многообразием X^G, отвечающее вложению $X^G \hookrightarrow X$. Оно является подрасслоением расслоения N, и окрестность нулевого сечения в нем также диффеоморфна некоторой трубчатой окрестности подмногообразия X^G, теперь уже в многообразии X. Будем считать, что последний диффеоморфизм отвечает фиксированному выше диффеоморфизму в следующем смысле: диаграмма

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\simeq} & U \\ \uparrow & & \uparrow \\ N_e & \xrightarrow{\simeq} & X \cap U \end{array} \tag{2}$$

(вертикальные стрелки обозначают вложения соответствующих пространств, а горизонтальные — указанные выше диффеоморфизмы) коммутативна.

Будем также считать, что в окрестности U действие группы G является послойно линейным по отношению к структуре векторного расслоения $N \to X^G$.

Для упрощения вычислений введем еще ограничение на размерности подмногообразий. А именно, будем считать, что выполнено соотношение

$$\mathrm{codim}_M X^G = 2\mathrm{codim}_X X^G.$$

На многообразии M в окрестности точки на подмногообразии X^G построим специальные координаты, которые будут использоваться в дальнейшем. Для этого зафиксируем элемент $g \in G \setminus G_X$. Пусть N_g — нормальное расслоение подмногообразия X^G, отвечающее вложению $X^G \hookrightarrow gX$[1]. Тогда из условия трансверсальности пересечения $X^G = X \cap gX$ следует разложение

$$TM|_{X^G} = TX^G \oplus N_e \oplus N_g$$

расслоения $TM|_{X^G} \to X^G$ в прямую сумму векторных расслоений. Следовательно, в силу коммутативности диаграммы (2), для любой точки из X^G существуют ее окрестность в M и

[1]В частности, расслоение N_e, введенное выше, является таким расслоением, если e — единица группы G.

координаты (y, z, z_g), в которых подмногообразие X^G задается уравнением $\{(z, z_g) = (0, 0)\}$, многообразие X — уравнением $\{z_g = 0\}$ и многообразие gX — уравнением $\{z = 0\}$.

Все перечисленные в этом пункте условия в совокупности будем называть *условиями допустимости* и считать в дальнейшем всегда выполненными.

4. Анализ структуры следа оператора

Начнем со следующего выражения для следа:

$$i^! D = i^* D i_* = \int_G i^* D_g T_g i_* \, dg = \int_G i^* D_g i_{gX*} T_g \, dg \tag{3}$$

(мы прокоммутировали операторы T_g и i_*), где i_{gX*} для каждого фиксированного g — оператор кограничения с подмногообразия gX — образа подмногообразия X под действием элемента g. Действительно, $T_g i_* = \left(T_g i_* T_g^{-1}\right) T_g = i_{gX*} T_g$, где второе равенство следует из определения оператора кограничения.

Теперь наша задача разбивается на две части: изучить оператор, стоящий в (3) под знаком интеграла, и затем изучить оператор, который представляется как интеграл от семейства таких операторов.

4.1. Подынтегральное выражение

Итак, под знаком интеграла в (3) имеем оператор

$$i^* D_g i_{gX*} : H^s(gX) \longrightarrow H^{s-m-\nu}(X).$$

Операторы такого вида называются *трансляторами* и изучались в работах [8–10, 14]. (Отметим, что терминология и первые работы о трансляторах принадлежат Б. Ю. Стернину (см. [7])). В частности, в работе [9] изучались трансляторы, отвечающие двум многообразиям, которые пересекаются трансверсально по некоторому гладкому подмногообразию. При наших условиях на действие группы при $g \in G \setminus G_X$ мы находимся именно в такой ситуации и потому можем применить результаты работы [9].

В частности, из цитированной работы следует, что оператор $i^* D_g i_{gX*}$ является псевдодифференциальным оператором с операторно-значным символом (см. [11, 12]). Поскольку такие операторы технически трудно изучать в пространствах Соболева, мы, прежде чем формулировать какие-либо утверждения, заранее приведем оператор $i^* D_g i_{gX*}$ к оператору нулевого порядка. Положим

$$A_g = \Delta_X^{\frac{s-m-\nu}{2}} i^* D_g i_{gX*} \Delta_{gX}^{-\frac{s}{2}} : L^2(gX) \longrightarrow L^2(X),$$

где Δ_X и Δ_{gX} — операторы Лапласа на многообразиях X и gX соответственно.

Мы будем рассматривать оператор A_g как псевдодифференциальный оператор с операторно-значным символом, т.е. как оператор, действующий в сечениях гильбертовых расслоений, которые будут сейчас определены. Пусть $\mathcal{N}_g$ — гильбертово расслоение над X^G со слоем $L^2(N_{g,y})$ (см. [12], с. 74), где $N_{g,y}$ — слой расслоения N_g над точкой $y \in X^G$. Имеется естественный изоморфизм

$$L^2(N_g) \simeq L^2\left(X^G, \mathcal{N}\right). \tag{4}$$

Далее, оператор $i^* D_g i_{gX*}$ сосредоточен на подмногообразии X^G (напомним, что оператор C сосредоточен на подмногообразии X^G, если для любой гладкой функции φ с носителем вне этого подмногообразия композиции $C\varphi, \varphi C$ являются компактными операторами). Отсюда следует, что, пренебрегая компактными операторами, оператор $i^* D_g i_{gX*}$ (а также оператор A_g) можно рассматривать как транслятор, отвечающий трубчатым окрестностям подмногообразия X^G в многообразиях X и gX. Поэтому, пользуясь диффеоморфизмами из диаграммы (2) и изоморфизмом (4), мы можем с точностью до компактных операторов рассматривать оператор A_g как оператор

$$A_g : L^2\left(X^G, \mathcal{N}_g\right) \longrightarrow L^2\left(X^G, \mathcal{N}_e\right), \tag{5}$$

где e — единица группы G. Приведем основные свойства оператора A_g.

Предложение 4.1. *Пусть действие группы G допустимо. Тогда для каждого $g \in G \setminus G_X$ оператор A_g сосредоточен на подмногообразии $X^G \subset gX$ и с точностью до компактных операторов является псевдодифференциальным оператором (5), действующим в сечениях гильбертовых расслоений. Символ $\sigma(A_g)(y,\eta) : L^2(N_{g,y}) \longrightarrow L^2(N_{e,y})$ для каждых $(y,\eta) \in T^*X^G$ равен*

$$\sigma(A_g)(y,\eta) = (\Delta_z + \eta^2)^{\frac{s-m-\nu}{2}} j_e{}^* D_g\left(y, z, z_g, \eta, -i\frac{\partial}{\partial z}, -i\frac{\partial}{\partial z_g}\right) j_{g*}\,(\Delta_{z_g} + \eta^2)^{-\frac{s}{2}}, \tag{6}$$

где $j_g : N_{g,y} \hookrightarrow N_y$ — вложение подмногообразия $N_{g,y}$ в многообразие N_y (слой нормального расслоения к X^G, соответствующего вложению $X^G \hookrightarrow M$, в точке y), $\Delta z+\eta^2$ и $\Delta_{z_g}+\eta^2$ — операторно-значные символы операторов Лапласа Δ_X и Δ_{gX} соответственно, представленные как операторы с операторно-значимыми символами на подмногообразии X^G. [2]

Доказательство. По построению при всех $g \in G \setminus G_X$ оператор A_g является транслятором, отвечающим многообразиям X, X_g, которые пересекаются по гладкому замкнутому подмногообразию X^G, причем их пересечение трансверсально (что следует из условий допустимости и коммутативности диаграммы (2)). Теперь требуемое утверждение есть следствие работы [9]. Предложение доказано.

Замечание 4.2. Символ $\sigma(A_g)(y,\eta)$ обладает свойством компактной вариации и свойством скрученной однородности. А именно, разность $\sigma(A_g)(y,\eta) - \sigma(A_g)(y,\eta_1)$ при всех $\eta, \eta_1 \in T_y^*Y$ является компактным оператором, и выполнено соотношение $\sigma(A_g)(y,\lambda\eta) = \varkappa_\lambda \sigma(A_g)(y,\eta)\varkappa_\lambda^{-1}$, при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$, где $\varkappa_\lambda u(x) = u(\lambda x)$ — оператор растяжения.

4.2. Теорема о структуре следа оператора на подмногообразии

Вернемся к оператору (3). Поскольку вместо оператора $i^* D_g i_{gX*}$, фигурирующего в (3), мы стали изучать его приведенную версию (оператор A_g), будем далее рассматривать *приведенный след G-оператора D*, а именно, оператор

$$i_0^!(D) = \int_G A_g T_g dg, \text{ где } A_g = \Delta_X^{\frac{s-m-\nu}{2}} i^* D_g i_{gX*} \Delta_{gX}^{-\frac{s}{2}}.$$

Следующая теорема описывает природу следа G-оператора на подмногообразии и является одним из основных результатов работы.

Теорема 4.3. *Пусть действие группы G допустимо. Тогда оператор $A = i_0^!(D)$ сосредоточен на подмногообразии $X^G \subset X$; с точностью до компактных операторов является псевдодифференциальным оператором, действующим в сечениях гильбертова расслоения $\mathcal{N}_e$:*

$$A : L^2\left(X^G, \mathcal{N}_e\right) \longrightarrow L^2\left(X^G, \mathcal{N}_e\right)$$

с символом $\sigma(A)(y,\eta) : L^2(N_{e,y}) \longrightarrow L^2(N_{e,y}), \quad (y,\eta) \in T^*X^G$,

$$\sigma(A)(y,\eta) = \int_G \sigma(A_g)(y,\eta) T_g dg.$$

Доказательство. 1. Докажем утверждение о сосредоточенности.

[2]Эти символы получены из соответствующих операторов преобразованием Фурье по y.

Лемма 4.4. Оператор $i_0^!(D)$ сосредоточен на подмногообразии $X^G \subset X$.

Доказательство. В работе [6] дано доказательство в случае, когда X^G состоит из конечного числа изолированных точек. Доказательство в нашем случае дословно повторяет доказательство из [6].

2. Для доказательства второго утверждения теоремы о псевдодифференциальности сформулируем в виде леммы одно общее утверждение. Введем соответствующие обозначения. Пусть $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}\left(X^G, \mathcal{N}_e\right)$ — замыкание по норме алгебры псевдодифференциальных операторов, действующих в пространстве $L^2(X^G, \mathcal{N}_e)$ сечений гильбертова расслоения $\mathcal{N}_e$, со скрученно-однородными символами, $\bar{\Sigma}$ — замыкание по норме алгебры Σ гладких символов на S^*X^G со значениями в ограниченных операторах в слоях расслоения $\mathcal{N}_e$.

Лемма 4.5. *Пусть $B_t \in \bar{\Psi}$, $t \in T$, — семейство операторов, равномерно ограниченное по норме и сильно непрерывное по параметру t, лежащему в компакте T. Тогда оператор*

$$B = \int_T B_t dt, \tag{7}$$

где dt — некоторая мера на T, является псевдодифференциальным, т.е. $B \in \bar{\Psi}$, и его символ равен

$$\sigma(B) = \int_T \sigma(B_t) dt. \tag{8}$$

Доказательство. Отображение $\sigma : \bar{\Psi} \longrightarrow \bar{\Sigma}, \quad D \to \sigma(D)$ является гомоморфизмом C^*-алгебр, откуда следует, что нормы $\|\sigma(B_t)\|$ равномерно ограничены (той же константой, что и нормы $\|B_t\|$). Теперь, если мы представим интеграл (7) в виде предела по норме $B_N \to B$ при $N \to \infty$ интегральных сумм B_N и к каждой из этих сумм применим гомоморфизм σ, то получим, что B — псевдодифференциальный оператор, а его символ равен интегралу символов (8).

3. Вернемся к доказательству теоремы. Заметим, что семейство операторов

$$A_\varepsilon = \int_{U_\varepsilon} A_g T_g dg,$$

где $U_\varepsilon \subset G$ — дополнение к ε-окрестности множества G_X, сходится к оператору A по норме при $\varepsilon \to 0$, что следует из равномерной ограниченности норм операторов A_g и T_g.

Теперь, чтобы применить лемму 4.5 к оператору A_ε, нам надо показать, что оператор $A_g T_g$ является псевдодифференциальным оператором. Вспомним, что оператор A_g действует между сечениями расслоений $\mathcal{N}_g$ и $\mathcal{N}_e$, слои которых представлены функциональными пространствами на слоях нормальных расслоений N_g и N_e над подмногообразием X^G. Учитывая, что T_g действует послойно-линейно в слоях расслоения N_g, мы видим, что композиция $A_g T_g$, очевидно, является псевдодифференциальным оператором между сечениями расслоений $\mathcal{N}_g$ и $\mathcal{N}_e$ (его символ представляет собой композицию операторов $\sigma(A_g)(y, \eta)$ и T_g). Обозначая $B_g = A_g T_g$, мы видим, что выполнены условия леммы 4.5: сильная непрерывность и равномерная ограниченность по норме операторов B_g наследуются из аналогичных свойств семейства операторов D_g (которыми оно обладает по условию) и сильной непрерывности и равномерной ограниченности нормы семейства T_g операторов сдвига.

Итак, оператор A_ε является псевдодифференциальным при всех $\varepsilon > 0$. Поэтому псевдодифференциальным является и оператор A, равный пределу по норме операторов A_ε при $\varepsilon \to 0$. Эти же рассуждения дают искомую формулу для символа.

Теорема 4.3 доказана.

5. Приложения

5.1. Фредгольмовость

Положим $A = i_0^!$ и рассмотрим оператор

$$1 + A : L^2(X) \longrightarrow L^2(X).$$

Следствие 5.1. *Пусть символ $1+\sigma(A)$ обратим на S^*X^G. Тогда оператор $1+A$ фредгольмов.*

Доказательство. Согласно теореме 4.3 имеем $A \in \bar{\Psi}$, т.е. псевдодифференциальный оператор $1+A$ является эллиптическим и, следовательно, фредгольмовым в силу результатов работы [11].

В общем случае символ $1+\sigma(A)$ не является обратимым оператором, и говорить можно только о его фредгольмовости. Эта фредгольмовость может быть эффективно проверена, пользуясь результатами работы [6].

Предложение 5.2. *Оператор*

$$1+\sigma(A)(y,\eta) : L^2(N_{e,y}) \longrightarrow L^2(N_{e,y}),$$

для каждых $(y,\eta) \in S^*X^G$ является оператором Фурье–Меллина из [6] *и не зависит от параметра η с точностью до компактных операторов.*

Доказательство. Для фиксированных (y,η) оператор $\sigma(A)(y,\eta)$ действует на функциях на слое $N_{e,y}$, который вложен в слой N_y расслоения N. В силу условий допустимости, действие группы G на $N_{e,y}$ имеет единственную неподвижную точку $\{0\} \in N_y$, и для всех точек $x \in N_{e,y}$ орбиты Gx в пространстве N трансверсальны пространству $N_{e,y}$. При этом оператор $\sigma(A)(y,\eta)$ представляет собой след G-оператора, соответствующего указанной геометрии. Действительно, этот оператор равен

$$\sigma(A)(y,\eta) = \int_G \sigma(A_g)(y,\eta) T_g dg, \tag{9}$$

где

$$\sigma(A_g)(y,\eta) = (\Delta_z+\eta^2)^{\frac{s-m-\nu}{2}}\, {j_e}^*\, D_g(y,\eta)\, j_{g*}\, (\Delta_{z_g}+\eta^2)^{-\frac{s}{2}} \tag{10}$$

и операторно-значная функция $D_g(y,\eta)$ определена так же, как в формуле (6). Преобразуя выражение (10) и подставляя его в (9), получаем

$$\sigma(A)(y,\eta) = j^* \int_G (\Delta_z+\eta^2)^{\frac{s-m-\nu}{2}}\, D_g(y,\eta)\, (\Delta_{z_g}+\eta^2)^{-\frac{s}{2}}\, T_g dg\, j_*,$$

где j — вложение $N_{e,y} \hookrightarrow N_y$. Пользуясь свойством компактной вариации символа $\sigma(A)$, мы можем положить в формуле (10) $\eta = 0$. Имеем (с точностью до компактных операторов):

$$\sigma(A)(y,\eta) = j^* \int_G \Delta_z^{\frac{s-m-\nu}{2}} D_g(y,\eta) \Delta_{z_g}^{-\frac{s}{2}}\, T_g dg\, j_*,$$

т.е. $\sigma(A)(y,\eta)$ действительно представляет собой след G-оператора:

$$B(y,\eta) = \int_G \Delta_z^{\frac{s-m-\nu}{2}}\, D_g(y,\eta)\, \Delta_{z_g}^{-\frac{s}{2}}\, T_g\, dg, \tag{11}$$

порядок которого, как видно из (11), равен $\mathrm{ord} B(y,\eta) = -\nu$.

Итак, согласно работе [6], оператор $1+\sigma(A)(y,\eta)$ является оператором Фурье–Меллина для каждого (y,η). Независимость от значения параметра η следует из компактной вариации для $1+\sigma(A)$.

Символ оператора Фурье–Меллина $1+\sigma(A)(y,\eta)$ обозначим $\sigma_\gamma[1+\sigma(A)(y,\eta)](p)$. Он определен как аналитическая оператор-функция на прямой

$$\mathrm{Re}\, p = \gamma, \text{ где } \gamma = \dim N_{e,y}/2 = \mathrm{codim}_X X^G/2 = \mathrm{codim}_M X^G/4$$

(оператор $1+\sigma(A)(y,\eta)$ действует в пространствах L^2 на линейном пространстве $N_{e,y}$, размерность которого равна коразмерности вложения $X^G \hookrightarrow X$).

5.2. Оснащения

Пусть

$$P : L^2(Y, \mathcal{H}_1) \longrightarrow L^2(Y, \mathcal{H}_2)$$

— псевдодифференциальный оператор на гладком замкнутом многообразии Y, действующий между сечениями гильбертовых расслоений $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ над Y. Предположим, что символ $\sigma(P)$ является семейством фредгольмовых операторов.

Определение 5.3. *Оснащением* оператора P называется *фредгольмов* оператор вида

$$\begin{pmatrix} P & C \\ B & D \end{pmatrix} : \begin{matrix} L^2(Y, \mathcal{H}_1) \\ \oplus \\ L^2(Y, E) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} L^2(Y, \mathcal{H}_2) \\ \oplus \\ L^2(Y, F) \end{matrix},$$

где E, F — некоторые конечномерные векторные расслоения над Y, B, C, D — некоторые псевдодифференциальные операторы.

Утверждение 5.4. [10]. *Пусть символ оператора P обладает свойствами компактной вариации и скрученной однородности. Тогда оснащение оператора P существует, т.е. можно подобрать подходящие расслоения E, F и операторы B, C, D.*

Вернемся к многообразию X^G и оператору $1 + A$ на нем. Напомним, что оператор A является псевдодифференциальным оператором, действующим в пространствах

$$1 + A : L^2(X^G, \mathcal{N}_e) \longrightarrow L^2(X^G, \mathcal{N}_e),$$

с операторно-значным символом $1 + \sigma(A) : \pi^*\mathcal{N}_e \longrightarrow \pi^*\mathcal{N}_e$, где $\pi : S^*X^G \longrightarrow X^G$— естественная проекция.

Потребуем, чтобы символ $1 + \sigma(A)$ был эллиптическим оператором, т.е. символ Фурье–Меллина $\sigma_\gamma[1 + \sigma(A)(y, \eta)](p)$ был обратимым оператором для всех

$$(y, \eta, p) \in S^*X^G \times \{\mathrm{Re}(p) = \gamma\}, \quad \gamma = \mathrm{codim}_M X^G/4.$$

Тогда по утверждению 5.4 существует оснащение оператора $1 + A$, т.е. такие векторные расслоения E, F над X^G и операторы b, c, d на S^*X^G, что оператор

$$\sigma(B) = \begin{pmatrix} 1 + \sigma(A) & c \\ b & d \end{pmatrix} : \begin{matrix} \pi^*\mathcal{N}_e \\ \oplus \\ \pi^*E \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \pi^*\mathcal{N}_e \\ \oplus \\ \pi^*F \end{matrix} \tag{12}$$

является обратимым. Определим псевдодифференциальный оператор

$$B : L^2\left(X^G, \mathcal{N}_e \oplus E\right) \longrightarrow L^2\left(X^G, \mathcal{N}_e \oplus F\right) \tag{13}$$

с символом (12). По построению этот оператор фредгольмов. Итак, мы получаем

Следствие 5.5. *Оператор* (13)*, являющийся оснащением оператора $1 + A$, корректно определен* (*является псевдодифференциальным оператором с операторно-значным символом*) *и эллиптичен.*

Пример 5.6. Пусть символ $1 + \sigma(A)$ является семейством фредгольмовых операторов. Тогда все операторы $1 + \sigma(A)(y, \eta)$, $(y, \eta) \in S^*X^G$, имеют конечные ядро и коядро. Предположим, что эти ядра и коядра образуют конечномерные векторные расслоения

$$\mathrm{Ker} \to S^*X^G, \mathrm{Coker} \to S^*X^G.$$

Пусть все операторы $1 + \sigma(A)(y, \eta)$ являются мономорфизмами (т.е. у них отсутствует ядро), и имеются векторное расслоение E над X^G и изоморфизм $c : \pi^*E \longrightarrow \mathrm{Coker}$, тогда символ

$$\begin{pmatrix} 1 + \sigma(A) & c \end{pmatrix} : \begin{matrix} \pi^*\mathcal{N}_e \\ \oplus \\ \pi^*E \end{matrix} \longrightarrow \pi^*\mathcal{N}_e$$

можно взять в качестве символа оснащения оператора $1+A$. Иначе говоря, оператор $1+A$ превращается во фредгольмов оператор путем добавления кограничных условий.

Если же мы предположим, что все операторы $1+\sigma(A)(y,\eta)$ являются эпиморфизмами (т.е. у них отсутствует коядро), и пусть имеются векторное расслоение F над X^G и изоморфизм $b : \mathrm{Ker} \longrightarrow \pi^*E$. Тогда оператор

$$\begin{pmatrix} 1+\sigma(A) \\ b \end{pmatrix} : \pi^*\mathcal{N}_e \longrightarrow \begin{array}{c} \pi^*\mathcal{N}_e \\ \oplus \\ \pi^*F \end{array}$$

определяет символ оснащения оператора $1+A$. Таким образом, в этом случае оператор $1+A$ превращается во фредгольмов оператор путем добавления граничных условий.

6. Пример

Рассмотрим тор $M=\mathbb{T}^3$ с локальными координатами (y,z,t) и вложенный в него тор $X=\mathbb{T}^2$, задаваемый уравнением $\{t=0\}$. Предположим, что на объемлющем торе M действует группа $G=\mathbb{S}^1$ вращениями вокруг окружности $\{z=0,\, t=0\}$, а именно, элемент $\varphi\in G$ действует на точку $x=(y,z,t)$ как умножение на матрицу

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} x.$$

Многообразие X, сдвинутое под действием вращения на угол φ, будем обозначать φX.

Действие группы G удовлетворяет условиям допустимости: действительно, в нашем случае множество X^G неподвижных точек действия группы G задается уравнениями $\{z=0,\, t=0\}$ и является подмногообразием в X, а множество G_X “особых” точек группы G состоит из двух элементов: 0 и π; все остальные условия (трансверсальности и т.д.) очевидны из определения.

Далее, подразумевая локальное рассмотрение, многообразия M, X и X^G будем отождествлять с пространствами $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}$ соответственно, с теми же координатами (y,z,t). Тогда геометрическая картина выглядит так: в пространстве $\mathbb{R}^3$ фиксирована плоскость, и группа G действует вращениями вокруг прямой на этой плоскости (см. рис. 1).

Рассмотрим G-оператор D:

$$D=\Delta^{-1}\int_0^{2\pi} T_\varphi d\varphi : H^s(M)\longrightarrow H^{s+2}(M),$$

где Δ — оператор Лапласа на M. Тогда след $i^!(D)$ этого оператора на подмногообразии X равен

$$i^!(D)=\int_0^{2\pi} i^*\Delta^{-1}T_\varphi i_* d\varphi : H^s(X)\longrightarrow H^{s+1}(X)$$

и корректно определен при $s<0$ и $s+1>0$. Приведенный след равен

$$i_0^!(D)=\int_0^{2\pi} \Delta_X^{\frac{s+1}{2}} \left[i^*\Delta^{-1}T_\varphi i_*\right] \Delta_X^{-\frac{s}{2}} d\varphi : L^2(X)\longrightarrow L^2(X),$$

где Δ_X — оператор Лапласа на многообразии X, и изучим оператор вида

$$1+i_0^!(D) : L^2(X)\longrightarrow L^2(X). \tag{14}$$

По теореме 4.3 оператор $1+i_0^!(D)$ является псевдодифференциальным оператором на многообразии X^G с операторно-значным символом, который для каждого $y\in X^G$ является оператором, действующим на функциях в $L^2(N_y)$, где

$$N_y=\{(z,t)\mid t=0\}\simeq\{y=0,\, t=0\}\subset\mathbb{R}^3.$$

Вычислим символ оператора (14). Для этого зафиксируем y, применим оператор (14) к функции $u(z) \in L^2 N_y)$ и сделаем преобразование Фурье по y:

$$\Big[1+\sigma\big(i_0^! D\big)(y,\eta)\Big]\, u(z) = u(z) + \\ + \int_0^{2\pi} \left(\Delta_z+\eta^2\right)^{\frac{s+1}{2}} j^*\left[(\eta^2+\Delta_{z,t})^{-1}T_\varphi\right] j_*\left(\Delta_z+\eta^2\right)^{-\frac{s}{2}} u(z)d\varphi, \quad (15)$$

где $\Delta_{z,t}$ — оператор Лапласа на многообразии $\mathbb{R}^2_{z,t} \simeq \{y=0\}$, Δ_z — оператор Лапласа на многообразии $\mathbb{R}_z \simeq \{y=0,\, t=0\}$, $j:\mathbb{R}_z \hookrightarrow \mathbb{R}^2_{z,t}$ — вложение многообразия $\{y=0,\, t=0\}$ в многообразие $\{y=0\}$, η — двойственная переменная к y.

Утверждается, что для каждых фиксированных (y,η) оператор (15) — это оператор Фурье–Меллина на подмногообразии $\mathbb{R}_z$. В самом деле, поскольку символ обладает свойством компактной вариации, мы можем положить $\eta = 0$. Обозначим

$$1 + A = 1 + \sigma\big(i_0^! D\big)(y,0)$$

и изучим этот оператор.

Далее, следуя [6], получим действие оператора A после преобразования Фурье по переменным (z,t):

$$(1+\widetilde{A})u(\zeta) = u(\zeta) + \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}_\tau} \frac{|\zeta|^{s+1}}{|\zeta\cos\varphi+\tau\sin\varphi|^s}\frac{u(\zeta\cos\varphi+\tau\sin\varphi)}{\zeta^2+\tau^2}d\varphi d\tau,$$

где ζ, τ — двойственные переменные к z, t. Сделаем в последнем интеграле замену переменной $\tau \to \theta$ по формуле $\theta = \zeta\cos\varphi + \tau\sin\varphi$. Получим

$$(1+\widetilde{A})u(\zeta) = |\zeta| u(\zeta) + \int_{\mathbb{R}_\theta} \mathrm{Kr}(\zeta,\theta)u(\theta)\,\frac{d\theta}{|\theta|}, \quad (16)$$

где интегральное ядро $\mathrm{Kr}(\zeta,\theta)$ равно

$$\mathrm{Kr}(\zeta,\theta) = \int_0^{2\pi} \left|\frac{\zeta}{\theta}\right|^s \frac{|\zeta||\theta||\sin\varphi|}{\zeta^2+\theta^2-2\theta\zeta\cos\varphi}d\varphi = 2\left|\frac{\zeta}{\theta}\right|^s \ln\left|\frac{|\zeta|+|\theta|}{|\zeta|-|\theta|}\right|.$$

Разобьем функцию $u(\zeta)$ в сумму $u(\zeta) = u^+(\zeta) + u^-(\zeta)$, где $u^+(\zeta)$ — четная компонента и $u^-(\zeta)$ — нечетная. Тогда оператор (16) по отношению к указанному разбиению на четную и нечетную компоненту записывается в матричном виде:

$$(1+\widetilde{A})\begin{pmatrix} u^+(\zeta) \\ u^-(\zeta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4\pi\displaystyle\int_0^{+\infty} K\left(\frac{|\zeta|}{|\theta|}\right)\frac{d\theta}{|\theta|} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^+(\zeta) \\ u^-(\zeta)\end{pmatrix}, \quad (17)$$

где

$$K(t) = \frac{1}{\pi}t^s \ln\left|\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right..$$

Преобразование Меллина (см., например, [13]) $\mathcal{M}_{r\to p}u(r) = \int_{\mathbb{R}_+} t^p u(t)\,dt/t$ переводит оператор (17) в оператор умножения на матрицу:

$$(1+\widehat{A})\begin{pmatrix} u^+(p) \\ u^-(p)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4\pi\dfrac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi(p+s)}{2}\right)}{p+s} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^+(p) \\ u^-(p)\end{pmatrix}.$$

Эта матрица и есть символ Фурье–Меллина оператора A, который обозначается через $\sigma_{1/2}(1+A)(p)$. Отметим, что здесь выбирается весовая прямая $\mathrm{Re}\, p = 1/2$, так как оператор A действует в пространствах $L^2(X)$, поэтому, согласно определению символа оператора Фурье–Меллина (см. [6]), весовая прямая имеет вид $\mathrm{Re}\, p = \mathrm{codim}_X X^G/2 = 1/2$.

Предложение 6.1. *Оператор* (15) *фредгольмов при тех s, для которых*

$$\operatorname{tg}\left(\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{s}{2}\right)\right) \neq -\frac{1}{8\pi}-\frac{s}{4\pi}, \quad -1<s<0. \tag{18}$$

Доказательство. Матрица $\sigma_{1/2}(1+A)(p)$ вырождена, когда выполнено равенство

$$-(p+s) = 4\pi \operatorname{tg}\left(\pi(p+s)/2\right). \tag{19}$$

Представим $p+s$ в виде $p+s=\alpha+i\beta$, где α и β — вещественные числа (при этом $\alpha=1/2+s$), и рассмотрим мнимую часть уравнения (19). Получим соотношение

$$-\frac{1}{4\pi}\beta = \frac{\operatorname{sh}\pi\beta}{\cos\pi\alpha+\operatorname{ch}\pi\beta}. \tag{20}$$

Заметим, что левая и правая части равенства (20) для каждого α являются нечетными функциями переменной β, при этом для ненулевых β они принимают значения противоположных знаков. Поэтому равенство (20) выполнено только при $\beta=0$. Отсюда следует, что соотношение (19) не выполнено никогда, если у p присутствует мнимая часть. Подставляя в (19) $p=1/2$, получаем условие (18).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проекты № 16-31-00176, № 16-01-00373.

Литература

1. *Стернин Б.Ю.* Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности // Труды Моск. Мат. общ-ва. 1966. С. 346–382.
2. *Новиков С.П., Стернин Б.Ю.* Следы эллиптических операторов на подмногообразиях и K-теория // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170. С. 1265–1268.
3. *Новиков С.П., Стернин Б.Ю.* Эллиптические операторы и подмногообразия // Докл. АН СССР. 1966. Т. 171. С. 525–528.
4. *Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.* Нелокальные эллиптические операторы для компактных групп Ли // Докл. АН. 2010. Т. 431, вып. 4. С. 457–460.
5. *Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.* О следах операторов, ассоциированных с действиями компактных групп Ли // Фунд. и прикл. матем. 2016. Т. 21, № 3. С. 1–18.
6. *Лощенова Д.А.* Задачи Соболева, ассоциированные с действиями групп Ли // Дифф. уравн. 2015. Т. 51, № 8. С. 1056–1069.
7. *Стернин Б.Ю.* Эллиптические морфизмы на многообразиях с особенностями (оснащение эллиптического оператора) // Докл. АН СССР. № 12. 1971. С. 45–48.
8. *Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.* Об индексе эллиптических трансляторов // Докл. АН. 2011. Т. 436, № 4. С. 443–447.
9. *Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.* Эллиптические трансляторы на многообразиях с точечными особенностями // Дифф. уравн. 2012. Т. 49, № 4. С. 1612–1620.
10. *Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.* Индекс задач Соболева на многообразиях с многомерными особенностями // Дифф. уравн. 2014. Т. 50, № 2. С. 229–241.
11. *Luke G.* Pseudodifferential operators on Hilbert bundles // J. Diff. Equations. 1972. P. 566–589.
12. *Nazaikinskii V., Savin A., Schulze B.-W., Sternin B.* Elliptic Theory on Singular Manifolds // CRC-Press, Boca Raton. 2005.

13. *Бейтмен Т., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. Том 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина // М.: Наука. 1969.

14. *Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.* Эллиптические трансляторы на многообразиях с многомерными особенностями // Дифф. уравн. 2013. Т. 49, № 4. С. 513–527.

References

1. *Sternin B.Yu.* Elliptic and parabolic problems on manifolds with a boundary consisting of components of different dimension. Trudy Moskov. Mat. Obsh. 1966. P. 346–382.

2. *Novikov S.P., Sternin B.Yu.* Traces of elliptic operators on submanifolds and K-theory. Dokl. AN USSR. 1966. V. 170. P. 1265–1268. (in Russian).

3. *Novikov S.P., Sternin B.Yu.* Elliptic operators and submanifolds. Dokl. AN USSR. 1966. V. 171. P. 525–528. (in Russian).

4. *Savin A.Yu., Sternin B.Yu.* Nonlocal elliptic operators for compact Lie groups. Dokl. AN. 2010. V. 431, N 4. P. 457–460. (in Russian).

5. *Savin A.Yu., Sternin B.Yu.* On traces of operators associated with actions of compact Lie groups. Fund. and Appl. Math. 2016. V. 21, N 3. P. 1–18.

6. *Loshchenova D.A.* Sobolev problems associated with the actions of lie groups. Differ. Equations. 2015. V. 51, N 8. P. 1056–1069.

7. *Sternin B.Yu.* Elliptic morphisms (riggings of elliptic operators) for submanifolds with singularities. Dokl. AN USSR. 1971. V. 12. P. 45–48. (in Russian).

8. *Savin A.Yu., Sternin B.Yu.* On the index of elliptic translators. Dokl. AN. 2011. V. 436, N 4. P. 443–447.

9. *Savin A.Yu., Sternin B.Yu.* Elliptic translators on manifolds with point singularities. Differ. Equations. 2012. V. 49, N 4. P. 1612–1620.

10. *Savin A.Yu., Sternin B.Yu.* Index of Sobolev problems on manifolds with many-dimensional singularities. Differ. Equations. 2014. V. 50, N 2. P. 229–241.

11. *Luke G.* Pseudodifferential operators on Hilbert bundles. J. Diff. Equations. 1972. P. 566–589.

12. *Nazaikinskii V., Savin A., Schulze B.-W., Sternin B.* Elliptic Theory on Singular Manifolds. CRC-Press, Boca Raton. 2005.

13. *Bateman T., Erdelyi A.* Tables of integral transforms. Transformations of Fourier, Laplace, and Mellin. Volume 1. Transformations of Fourier, Laplace, and Mellin.Transforms of Fourier, Laplace, and Mellin. V. 1. Transforms of Fourier, Laplace, and Mellin. M.: Nauka. 969.

14. *Savin A.Yu., Sternin B.Yu.* Elliptic translators on manifolds with multidimensional singularities. Differ. Equations. 2013. V. 49, N 4. P. 513–527. (in Russian).

Поступила в редакцию 20.06.2017