

ОТЗЫВ
научного руководителя
на диссертацию Костиной Ольги Андреевны
«Раскраски и разбиения множеств на сферах»,
представленную к защите на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация О.А. Костиной посвящена актуальным проблемам комбинаторной геометрии. Первая из этих проблем была поставлена на рубеже 40-х и 50-х годов XX века Нелсоном и Хадвигером. Она состоит в отыскании минимального количества цветов, в которые можно так покрасить все точки n -мерного евклидова пространства, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1. Вторая проблема была предложена Борсуком в 1933 году. А именно, Борсук высказал гипотезу, что всякое множество диаметра 1 в n -мерном евклидовом пространстве может быть разбито на $n+1$ часть меньшего диаметра.

За десятилетия, прошедшие с момента постановок обеих проблем, были получены многочисленные результаты и предложены интересные и важные обобщения первоначальных величин.

Так, n -мерное евклидово пространство заменили произвольным метрическим пространством, а одно расстояние, которому запрещено достигаться между точками одного цвета, заменили множеством расстояний и даже конфигурацией (евклидова теория Рамсея).

В работе Костиной речь об одном расстоянии, но в качестве метрического пространства рассматривается сфера в n -мерном евклидовом пространстве с радиусом r , не меньшим, чем $1/2$ (иначе, разумеется, множество диаметра 1 не поместится).

Для задачи о раскраске изучать сферы впервые предложил Эрдеш в начале 80-х. Ловас доказал, что при любом радиусе, строго большем $1/2$, минимальное число цветов, называемое хроматическим числом сферы, растет не медленнее, чем n . Он же сформулировал неверное утверждение о том, что и верхняя оценка хроматического числа линейна по размерности. В 2010 году я доказал, что на самом деле хроматическое число растет экспоненциально, используя для этого линейно-алгебраический метод в комбинаторике.

Для гипотезы Борсука сферы возникают в ином контексте. Известно, что гипотеза Борсука неверна. А именно, назовем числом Борсука наименьшее количество частей строго меньшего диаметра, на которые разбивается произвольное множество диаметра 1 в n -мерном пространстве. Согласно гипотезе оно равно $n+1$. Однако сейчас мы знаем, что число Борсука ограничено сверху экспонентой и снизу - константой в степени корень из размерности. Все контрпримеры при этом лежат на сферах асимптотического радиуса $1/\sqrt{2}$. И возникает вопрос, существуют ли контрпримеры на сферах, у которых радиусы ближе к величине $1/2$. Вместе с

Купавским мы доказали в свое время, что контрпримеры есть при любом $r > 1/2$ и установили нижнюю оценку соответствующего числа Борсука, которая при данном радиусе растет как константа в степени, равной корню некоторой степени $k(r)$ из n . Мы также использовали линейно-алгебраический метод в комбинаторике.

В диссертации Костиной рассматриваются различные модификации конструкций из моих и моих с Купавским работ о хроматических числах сфер и о проблеме Борсука на сферах. Модифицируется и линейно-алгебраический метод. Основная цель - уточнение констант в основаниях экспоненциальных нижних оценок хроматических чисел и субэкспоненциальных нижних оценок чисел Борсука.

В первой главе диссертации автору удастся значительно улучшить оценки хроматических чисел сфер в евклидовом пространстве.

Во второй главе диссертации автор получает новые нетривиальные нижние оценки хроматических чисел сфер в пространствах с произвольной гильбертовой метрикой.

В главе 3 автор устанавливает новые оценки для чисел Борсука.

Все результаты работы новые, нетривиальные, опубликованы в хороших журналах, доложены на семинарах и конференциях.

Таким образом, диссертационная работа Костиной Ольги Андреевны полностью соответствует требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней» Минобрнауки РФ к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика.

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук, профессор



А.М. Райгородский

Подпись А.М. Райгородского заверяю

Ученый секретарь МФТИ



Ю. И. Скалько