УДК 519.22

А. Е. Мазур

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

О слабой сходимости эмпирического процесса хвостов распределения для копульного временного ряда

В литературе по статистике экстремумов сформулированы условия, позволяющие получать результаты о слабой сходимости эмпирических хвостовых процессов, построенных по зависимым случайным величинам. В модели временного ряда с тяжелыми хвостами, полученного с помощью определенного преобразования гауссовского ряда, с гауссовским описанием зависимости, можно показать, что трудно проверяемые на практике условия могут быть заменены на легко проверяемые условия убывания корреляционной функции временного ряда.

Ключевые слова: гауссовская последовательность, область максимального притяжения Фреше, эмпирическая квантильная функция.

A. E. Mazur

Lomonosov Moscow State University

On weak convergence of the tail empirical process for copula time series

In the literature of statistics of extremes the conditions used to obtain the results of weak convergence of the tail empirical process for dependent sequences are given. In the model of time series with heavy tails constructed by the transformation of the Gaussian time series with Gaussian description of dependency we can show that the conditions, which are technically difficult to check in practice, could be replaced by easily checked conditions on decreasing of the correlation function of time series.

Key words: Gaussian sequence, maximum domain of attraction Fréchet, empirical quantile function.

Исследование статистических свойств экстремальных значений зависимых временных данных часто затруднено технически непростой проверкой условий слабой зависимости (перемешивания) далеко отстоящих по времени наблюдений. При исследовании экстремальных значений часто используется условие сильного перемешивания Розенблатта, но если данные можно моделировать гауссовским временным рядом, то проверка слабой зависимости может быть сведена к оцениванию скорости убывания корреляции.

Пусть $\xi_1, \xi_2, ...$ – стационарная гауссовская последовательность с нулевым средним, единичной дисперсией и ковариацией $R(j) = cov(\xi_i, \xi_{i+j})$, такой, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |kR(k)| < \infty, \tag{1}$$

и пусть f – такая функция, что

$$X_k = f(\xi_k),\ k = 1, ..., n,$$

– стационарный временной ряд с маргинальной функцией распределения F, принадлежащей области максимального притяжения Фреше с параметром $1/\gamma$, условия на f см. в [3]. Такой временной ряд мы называем гауссовским копульным временным рядом.

Обозначим $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ – хвост функции распределения F. Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность, стремящаяся к бесконечности при $n \to \infty$, и $\{\sigma_n > 0\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел такая, что $\lim_{n\to\infty} \sigma_n \to \sigma > 0$.

Определение 1. Эмпирическим нормированным хвостом функции распределения F называется статистика

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{n\bar{F}(u_n)} \sum_{i=1}^{n} I_{\{X_i > u_n + x\sigma_n\}}, \tag{2}$$

где I – индикатор события [6]. Введем также нормированный хвост функции распределения F:

$$T_n(x) = \frac{\bar{F}(u_n + x\sigma_n)}{\bar{F}(u_n)} \text{ при } \quad x \geq 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Условие 1. Пусть последовательность u_n такая, что нормированный хвост функции распределения F сходится к обобщенному распределению Парето:

$$T_n(x) \to T(x) = \left(1 + \gamma \frac{x}{\sigma}\right)_+^{-1/\gamma} \text{ при } \quad x \geq 0, \quad n \to \infty, \tag{4}$$

где $\gamma > 0$, а $x_+ = \max(x, 0)$ [1], [6].

Определение 2. Эмпирическим процессом, построенным по хвосту функции распределения F, называется статистика [6]:

$$e(\tilde{T}_n)(x) = \sqrt{n\bar{F}(u_n)}(\tilde{T}_n(x) - T_n(x)). \tag{5}$$

Разделим числовую прямую на большие блоки длины r_n и маленькие блоки длины l_n так, что

$$r_n = o(n) \quad \text{и} \quad l_n = o(r_n)$$

при $n \to \infty$. Пусть при этом выполнены соотношения

$$n\bar{F}(u_n) \to \infty \quad \text{и} \quad r_n\bar{F}(u_n) = O(1) \tag{6}$$

при $n \to \infty$.

В [6] доказана слабая сходимость в пространстве Скорохода статистики $e(\tilde{T}_n)(x)$ при $n \to \infty$ к п. н. непрерывному гауссовскому процессу с нулевым средним и ковариационной функцией $r(x, y)$. Кратко опишем условия сходимости, сформулированные там. Они накладывают ограничения на размер кластеров, состоящих из превышений заданных уровней, ограничивая их p-й момент, ограничения на зависимость между блоками превышений заданных уровней. Наконец, имеется условие, обеспечивающее экспоненциальную скорость убывания по u_n коэффициента сильного перемешивания. То есть утверждение теоремы 2.2 из [6] о слабой сходимости процесса $e(\tilde{T}_n)(x)$ предполагает выполнимость условий сильного перемешивания. В предлагаемой нами модели вместо проверки условия сильного перемешивания достаточно проверить явные условия на скорость убывания корреляционной функции исходной гауссовской последовательности.

Теорема 1. *Пусть $X_1, ..., X_n$ – стационарный временной ряд, F – функция распределения случайной величины X_1, принадлежащая области притяжения функции распределения Фреше с хвостовым индексом $1/\gamma$. Пусть f – такая функция, для которой $X_k = f(\xi_k)$, $k = 1, ..., n$, где $\xi_1, ..., \xi_n$ – стационарная стандартная гауссовская последовательность с ковариационной функцией $cov(\xi_i, \xi_j) = R(j - i)$. Пусть выполнено условие* 1.

Далее, пусть $\delta_i = \sup\limits_{m\geq 1} |R(m)| < 1$ *и* $l_n = r_n^\alpha$, $0 < \alpha < \frac{1-\delta_1}{1+\delta_1}$. *Кроме того, пусть выполнено следующее:*

$$D2': \quad nf^{-1}(u_n + x\sigma_n)(\varphi(f^{-1}(u_n + x\sigma_n)))^{\frac{1-\delta_{l_n}}{1+\delta_{l_n}}} \sum_{k=l_n}^{\infty} |kR(k)| \to 0 \tag{7}$$

при $n \to \infty$, *где* φ *– плотность стандартного нормального распределения. И пусть выполнено условие второго порядка*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{U(tx)-U(t)}{a(t)} - \frac{x^\gamma - 1}{\gamma}}{A(t)} := H(x), \quad x > 0,$$

с $a(x) = x^\gamma$ *и* $H(x) = x^\gamma \frac{x^\rho - 1}{\rho}$, *где* $\rho < 0$, *функция* $U(t) = \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(t)$, *и где* $A(t)$ *– функция, не меняющая знак и стремящаяся к нулю при* $t \to \infty$.
Тогда

$$e(\tilde{T}_n)(\cdot) \xrightarrow{d} e(\cdot)$$

в пространстве Скорохода $D([0,\infty))$.

Одной из основных идей доказательства, которая приводится в [4], [5], является возможность оценки сверху коэффициента сильного перемешивания для последовательности

$$Z_k = \sum_{n=1}^{N-1} u_n I_{\{\xi_k \in [u_n, u_{n+1}]\}},$$

где I – индикатор события и $u_1 < \ldots < u_N$ при выполнении условия на корреляционную функцию (1) гауссовской стационарной последовательности ξ_k.

Автор благодарит В. И. Питербарга за постановку задачи и руководство работой, а также И. В. Родионова за полезные обсуждения.

Литература

1. *De Haan L., Ferreira A.* Extreme value theory: an introduction. New York : Springer, 2007.
2. *Лидбеттер М.Р., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. Москва : Мир, 1989.
3. *Мазур А. Е., Питербарг В.И.* Гауссовские копульные временные ряды с тяжелыми хвостами и сильной временной зависимостью, // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика., 2015. Т. 70., № 5. С. 197–201.
4. *Piterbarg V.I.* Asymptotic Methods in Theory of Gaussian Random Processes and Fields // Providence: American Mathematical Society, Ser. Translations of Mathematical Monographies, 2012. V. 148.
5. *Питербарг В.И.* Двадцать лекций о гауссовских процессах. Москва : МЦНМО, 2015.
6. *Rootzén H.* Weak convergence of the tail empirical process for dependent sequences // Stochastic Processes and their Applications. Elsevier, 2009. V. 119, N 2. P. 468–490.

References

1. *De Haan L., Ferreira A.* Extreme value theory: an introduction. New York : Springer, 2007.
2. *Leadbetter M.R., Lindgren G., Rootzen H.* Extremes and related properties of random sequences and processes. Moscow : Mir, 1989. (in Russian).

3. *Mazur A.E., Piterbarg V.I.* Gaussian copula time series with heavy tails and strong time dependence. Moscow University Mathematics Bulletin. 2015. V. 70, N 5. P. 197–201. (in Russian).

4. *Piterbarg V.I.* Asymptotic Methods in Theory of Gaussian Random Processes and Fields. Providence: American Mathematical Society, Ser. Translations of Mathematical Monographies, 2012. V. 148.

5. *Piterbarg V. I.* Twenty lectures about Gaussian processes. Moscow : MCCME, 2015. (in Russian).

6. *Rootzén H.* Weak convergence of the tail empirical process for dependent sequences. Stochastic Processes and their Applications. Elsevier., 2009. V. 119., N 2. P. 468–490.

Поступила в редакцию 29.10.2019