# Олимпиада по теоретической физике в МФТИ

Воскресенье 17 апреля 2016 г. 11:00 – 15:00
аудитория 110КПМ

## 1 «Космонавт-хулиган» (А.А. Пухов)

Космический корабль движется по низкой круговой орбите вокруг Земли с первой космической скоростью $v = 8$ км/с. Вышедший из корабля космонавт бросает в сторону Земли гайку со скоростью $u = 8$ м/с. Опишите движение гайки относительно корабля (временные и пространственные параметры) в плоскости орбиты.

## Решение

Эту задачу удобно решать в полярных координатах. Выберем такие единицы измерения, чтобы радиус орбиты (6400 км) был единицей, а период обращения корабля (1 ч 20 мин) был $2\pi$. Тогда уравнение движения гайки в неподвижной системе отсчета, связанной с центром Земли, имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{1}$$

Движение и корабля, и гайки происходят в плоскости круговой орбиты, поэтому (1) удобно переписать в полярных координатах: $\mathbf{r} = r \cdot \mathbf{e}_r$. Второй орт $\mathbf{e}_\varphi$ перпендикулярен $\mathbf{e}_r$ и направлен вперед вдоль круговой орбиты. Тогда $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$ и $\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_r$. Дифферненцируя радиус $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$, получаем $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$ и $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + 2\dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_r$. Таким образом, уравнение Ньютона (1) в полярных координатах принимает вид двух уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} &\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -r^{-2}, \\ &r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

из которых первое представляет собой радиальное уравнение Ньютона, а второе – закон сохранения момента импульса в центральном поле $r^2\dot{\varphi} = \mathrm{const}$. Мы ищем решения этих уравнений, близкие к круговому движению корабля $r_0 = 1$, $\varphi_0 = t$. Так как величина $u/v \sim 10^{-3}$ мала, мы должны исследовать влияние малого возмущения начального условия на эту невозмущенную орбиту. Решение, близкое к невозмущенному, ищем в виде $r = 1 + r_1$, $\varphi = t + \varphi_1$, где поправки малы. Подставляя его в (2), получаем после линеаризации уравнения в вариациях

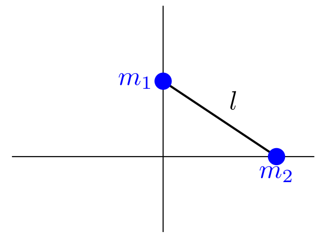
$$\begin{aligned} &\ddot{r}_1 = 3r_1 + 2\dot{\varphi}_1, \\ &\ddot{\varphi}_1 = -2\dot{r}_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Так как первая космическая скорость $v = 8$ км/с в наших единицах равна 1, то начальные условия к (3) имеют вид $r_1(0) = \varphi_1(0) = \dot{\varphi}_1(0) = 0$, $\dot{r}_1(0) = -10^{-3}$. Интегрируя второе уравнение, с учетом начальных условий имеем $\dot{\varphi}_1 = -2r_1$, откуда из первого уравнения следует, что $\ddot{r}_1 + r_1 = 0$. Окончательно, с учетом начальных условий, получаем

$$\begin{aligned} &r_1 = -10^{-3}\sin t, \\ &\varphi_1 = +2 \cdot 10^{-3}(-\cos t + 1). \end{aligned} \tag{4}$$

В первом приближении $\varphi_1$ и $r_1$ являются безразмерными ортогональными координатами, связанными с кораблем. Это означает, что относительно корабля гайка движется по эллипсу с большой осью $(2 \cdot 10^{-3}) \cdot 6400 \approx 12.8$ км и малой осью 6.4 км, центр которого находится за 6.4 км от корабля впереди по орбите. Поскольку масштаб орбиты велик, то космонавту поначалу покажется визуально, что гайка полетела к Земле. Примерно через час двадцать (период обращения корабля по орбите) гайка пробежит свою эллиптическую орбиту относительно корабля и вернется к нему сверху, с противоположной стороны. Гайка пролетит в нескольких десятках метров от корабля вследствие отличия реального движения от первого приближения, которое мы здесь рассмотрели.

## 2 Кинетический осциллятор (В.С. Булыгин)




Две массы $m_{1,2}$ без трения скользят по осям координат (см. рисунок). Массы соединены невесомой жёсткой связью длины $l$.

Введите удобные обобщённые координаты и исследуйте движение классической механической системы. Как период колебаний зависит от энергии? Как записать гамильтониан?

Если решение задачи вызывает трудности, можно ограничиться случаем $m_1 = m_2 = m$.

## Решение (М.Г. Иванов)

Описанная механическая система имеет одну степень свободы (каждая масса на оси — плюс одна степень свободы, связь — минус одна степень свободы).

Энергия системы — кинетическая энергия:

$$\mathcal{E} = K = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{y}^2}{2}. \tag{5}$$

Условие связи:

$$x^2 + y^2 = l^2.$$

Мы видим, что это соответствует движению частицы с координатами $x, y$ по окружности радиуса $l$, но массовые коэффициенты, входящие в кинетическую энергию (5) разные для осей $x$ и $y$.

Сделаем преобразование координат

$$X = \sqrt{m_1}x, \qquad Y = \sqrt{m_2}y.$$

В новых координатах массовые коэффициенты единичны

$$\mathcal{E} = K = \frac{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}{2},$$

уравнение окружности превращается в уравнение эллипса с полуосями $a = \sqrt{m_1}l$, $b = \sqrt{m_2}l$ (пусть $m_1 \geqslant m_2$)

$$\frac{X^2}{m_1 l^2} + \frac{Y^2}{m_2 l^2} = 1.$$

Таким образом, в новых координатах движение системы описывается как движение частицы с массой 1 по эллипсу.

Если взять в качестве обобщённой координаты — расстояние вдоль дуги эллипса $\xi$, то соответствующий гамильтониан — гамильтониан свободной частицы

$$H(\xi, p_\xi) = \frac{p_\xi^2}{2}.$$

Период —

$$T = \frac{L(a,b)}{\sqrt{2\mathcal{E}}},$$

где $L(a,b)$ — длина эллипса[1] с полуосями $a, b$, а $\mathcal{E}$ — энергия.

[1]Вычисление длины эллипса с помощью эллиптических интегралов мы не обсуждаем.

# 3 Электрон на поверхности углеродной нанотрубки (В.П. Крайнов)

Углеродная нанотрубка представляет собой одноатомный слой углерода, замкнутый в цилиндр. При этом одна углеродная связь оказывается ненасыщенной, и электрон может свободно перемещаться по поверхности цилиндрической нанотрубки радиуса R, находясь в потенциале

$$\widehat{V} = -\frac{\hbar^2 \varkappa}{m}\delta(r-R).$$

Получите спектр энергий и волновые функции “свободного” электрона в одностенной углеродной нанотрубке, считая, что электрон сильно локализован вблизи ее поверхности.

## Решение

Решение дано в атомных единицах измерения: $\hbar = m_e = e = 1$.

Радиус нанотрубки составляет величину порядка нанометра, т.е. $R = 20$ а.е. Величина $\kappa \sim UR$. Потенциал радиального притяжения электрона к нанотрубке $U$ порядка 1 а.е., так что условие $\kappa R \gg 1$ всегда выполняется с большим запасом.

Обозначим через $p_z$ постоянный импульс свободного электрона вдоль оси нанотрубки. Нас интересует квантование этого движения в радиальном направлении и квантования вращательного движения поперек оси нанотрубки. В цилиндрических координатах полная волновая функция имеет вид

$$\Psi_n(r,\varphi,z) = \psi(r)\,\exp(in\varphi + ip_z z).$$

Для радиальной волновой функции имеем стационарное уравнение Шредингера:

$$-\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \frac{d\psi(r)}{r\,dr} + \frac{n^2}{r^2}\psi(r) - 2\kappa\,\delta(r-R)\,\psi(r) = (2E_n - p_z^2)\psi(r).$$

Квантовое число $n = 0, \pm1, \pm2\ldots$ определяет угловое квантование. Устраняем первую производную в уравнении путем замены волновой функции $\psi = u/\sqrt{r}$. Получаем

$$-\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{n^2 - 1/4}{r^2}u(r) - 2\kappa\,\delta(r-R)\,u(r) = (2E_n - p_z^2)\,u(r).$$

Мы увидим ниже, что волновая функция $u_n(r)$ сосредоточена в узкой области вблизи нанотрубки, т.е. $r \approx R$. Поэтому во втором слагаемом левой части уравнения можно заменить $r \to R$. Обозначая $x = r - R$ и $2\varepsilon = 2E_n - p_z^2 - \frac{n^2-1/4}{R^2}$, из (3) получим

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2u(x)}{dx^2} - \kappa\,\delta(x)\,u(x) = \varepsilon(x).$$

Это хорошо известное уравнение для частицы в одномерной дельта-яме. Его решение имеет вид $\varepsilon = -\kappa^2/2$; $u(x) = \sqrt{\kappa\,\exp(-\kappa|x|)}$.

Итак, энергетический спектр имеет вид

$$E_n = \frac{p_z^2}{2} - \frac{\kappa^2}{2} + \frac{n^2 - 1/4}{2R^2}.$$

Первое слагаемое в этой формуле — энергия продольного движения электрона, второе слагаемое — известное выражение для энергии связи в одномерной дельта-яме. Третье слагаемое отвечает энергии вращательного движения электрона в трубке. Волновая функция радиального движения имеет вид

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{\kappa}{R}}\,\exp(-\kappa|r-R|).$$

Она действительно очень быстро убывает при удалении от нанотрубки ввиду условия $\kappa R \gg 1$.

# 4 Газ в поле тяжести (И.Я. Полищук)

Чрезвычайно разреженный газ из $N$ электронов находится в поле тяжести в сосуде высоты $a$ и площади $S$ при температуре выше температуры вырождения. Качественно построить график теплоемкости, как функцию температуры определив характерные точки. Проанализировать возможность экспериментального наблюдения всех характерных точек на кривой теплоемкости.

## Решение

Средняя потенциальная энергия *классического* газа заполняющего прямоугольный параллелепипед высотой $a$ в гравитационном поле имеет вид

$$\begin{aligned}\overline{U} &= \frac{\int_0^a mgz\exp(-mgz/T)dz}{\int_0^a \exp(-mgz/T)dz} = \frac{-mgz\frac{T}{mg}\exp(-mgz/T)\Big|_0^a + T\int_0^a \exp(-mgz/T)}{\frac{T}{mg}(1-\exp(-mga/T))} \\ &= \frac{-aT\exp(-mgz/T)+\frac{T^2}{mg}(1-\exp(-mga/T))}{\frac{T}{mg}(1-\exp(-mga/T))} = T - \frac{mga}{\exp(mga/T)-1}\end{aligned} \tag{6}$$

Следовательно, теплоемкость равна

$$c = c_V + \frac{\partial\overline{U}}{\partial T} = c_V + 1 - \frac{\left(\frac{mga}{T}\right)^2\exp\left(mga/T\right)}{\left(\exp\left(mga/T\right)-1\right)^2} \tag{7}$$

В слабых полях (при высоких температурах) $(mga/T) \ll 1$. последний член обращается в единицу и $c = c_V$. Это физически понятный результат, так как потенциальная энергия перестает зависеть от температуры и не дает вклад в теплоемкость.

В сильных полях (при низких температурах) $(mga/T) \gg 1$ последний член обращается в нуль и $c = c_p = 5/2$. Этот результат, на первый взгляд, физически непонятен. В самом деле, в сильных полях газ фактически является двумерным. Но тогда в силу известной теоремы о равнораспределении энергии по степеням свободы должно быть $c_V = 1$, дело заключается в том, что в сильных полях, движение в направлении оси $z$ является квантованным и формула (6) неприменима. Оценим характреное значение температуры при котором становится существенным квантование поступательного движения. Пусть частица сосредоточена в области $\delta x$. Тогда потенциальная энергия по порядку величины есть $mg\delta x$. В силу соотношения неопределенностей кинетическая энергия при этом по порядку величины есть $\frac{\hbar^2}{m\delta x^2}$. Квантование существенно. если $mg\delta x < \frac{\hbar^2}{m\delta x^2}$, или при

$$\delta x < \left(\frac{\hbar^2}{m^2 g}\right)^{1/3} \tag{8}$$

При температуре $T$ характерное значение $\delta x = T/mg$. Поэтому квантование существенно при температурах

$$T < T_c = mg\left(\frac{\hbar^2}{m^2 g}\right)^{1/3} \tag{9}$$

Оценка показывает, что $T_c \sim 10^{-25}$ эрг $\sim 10^{-16}$эрг·град·$T$. То есть $T \sim 10^{-9}$K. Обратим внимание, что с понижением температуры электронного газа до разумных значений, он гораздо раньше становится вырожденным при разумных плотностях и имеет место линейная зависимость теплоемкости, хотя и по другим причинам.

# 5 Бозонно-фермионный газ (С.Н. Бурмистров)

Найти условие для устойчивости газовой смеси бозонов и полностью спин-поляризованных $(s = 1/2)$ фермионов массой $m_f$ при нулевой температуре. Константы бозон-бозонного и фермион-бозонного взаимодействия равны $g$ и $\lambda$, соответственно.

## Решение

Поскольку фермионы полностью спин-поляризованы и, соответственно, $s$-рассеяние фермионов с одинаковыми проекциями спинов исчезает, то в первом приближении можно пренебречь взаимодействием между фермионами с малыми импульсами. В газовом приближении при нулевой температуре можно считать, что все бозоны находятся в основном состоянии с нулевым импульсом. Соответственно, полную энергию газовой смеси объемом $V$ можно записать как сумму кинетической энергии фермионов $E_{\text{кин}}$ и энергии взаимодействия $E_{\text{вз}}$ бозонов с бозонами и бозонов с фермионами

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{вз}} = \frac{3}{5}\varepsilon_f n_f V + \frac{1}{2} g n_b n_b V + \lambda n_b n_f V.$$

Здесь $\epsilon_F = p_F^2/2m_f$ - энергия Ферми, выраженная через импульс Ферми $p_F = \hbar(6\pi^2 n_f)^{1/3}$, а $n_f$ и $n_b$ - плотности фермионов и бозонов, соответственно.

Химические потенциалы фермионов и бозонов определяются как производные полной энергии по числу частиц $N_f = n_f V$ и $N_b = n_b V$

$$\mu_f = \partial E/\partial N_f = \varepsilon_f + \lambda n_b\,,$$
$$\mu_b = \partial E/\partial N_b = g n_b + \lambda n_f\,.$$

Необходимое условие для устойчивости смеси по отношению к флуктуациям плотности $n_f \to n_f + \delta n_f$ и $n_b \to n_b + \delta n_b$ при фиксированном числе частиц $N_f$ и $N_b$ это положительная определенность изменения энергии во втором порядке относительно флуктуаций плотности

$$\delta^2 E = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial n_b^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial n_b \partial n_f} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial n_f^2} > 0.$$

Изменение энергии в первом порядке по флуктуациям плотности зануляется, так как число бозонов и фермионов остается фиксированным.

Чтобы квадратичная форма с двумя переменными была всегда положительно определенной, ее коэффициенты должны удовлетворять двум условиям

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial n_b^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial n_b \partial n_f} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial n_f \partial n_b} & \frac{\partial^2 E}{\partial n_f^2} \end{vmatrix} > 0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial n_b^2} > 0.$$

Отсюда, $g > 0$ и $g(10\varepsilon_F/9n_f) - \lambda^2 > 0$. Следовательно, плотность фермионов не должна превышать критическое значение

$$n_f < n_{f,\,\mathrm{cr}} = \frac{4\pi^2}{3}\left(\frac{\hbar^2 g}{\lambda^2 m_f}\right)^3.$$

В противном случае однородное состояние газовой смеси неустойчиво и смесь расслоится на две фазы.