ОТЗЫВ

на диссертацию
Шубина Андрея Витальевича
«Простые числа в специальных последовательностях», представленную к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 - дискретная математика и математическая кибернетика

Автор отзыва:
Ф.И.О.: **Резвякова Ирина Сергеевна**
Учёная степень: **кандидат физико-математических наук**
Год присуждения учёной степени и специальность, по которой присуждена учёная степень: **2005, 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел**
Место работы (полное название организации в соответствии с Уставом, подразделение): **Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Отдел теории чисел**
Должность: **старший научный сотрудник**
Контактная информация: **rezvyakova@mi-ras.ru**

Исследование множества простых чисел p, удовлетворяющих условию $\{\sqrt{p}\} < 0.5$ (здесь и далее $\{\cdot\}$ – знак дробной доли) было начато в 1940 г. И.М. Виноградовым. В частности, им был установлен асимптотический закон распределения простых чисел с таким свойством. Исследования И.М. Виноградова были продолжены в работах целого ряда специалистов по аналитической теории чисел, а его результаты уточнены и обобщены в различных направлениях.

В свете появления за последние 15 лет новых методов, которые позволили исследовать малые расстояния между соседними простыми числами и практически вплотную подойти к знаменитой проблеме простых чисел - близнецов, естественно поставить следующую задачу. Пусть $\alpha > 0$ - фиксированное нецелое число, $\mathbb{E}$ - множество натуральных чисел n, удовлетворяющих неравенству $\{n^\alpha\} < \frac{1}{2}$, и пусть $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$ – все простые числа, содержащиеся в $\mathbb{E}$ и занумерованные по возрастанию. Зададимся произвольным фиксированным целым числом $m \geqslant 1$. Можно ли тогда указать постоянную $C = C(m)$ так, чтобы неравенство $p_{n+m} - p_n \leqslant C$ выполнялось для бесконечного множества пар простых чисел из $\mathbb{E}$?

Решению этой задачи и посвящена диссертационная работа А.В. Шубина. Идейная сторона работы состоит в следующем. Прежде всего, из работ Дж. Майнарда известна связь между существованием ограниченных промежутков между соседними простыми числами (или, более общо, между числами p_n, p_{n+m}) из некоторого множества $\mathcal{A}$ (в частности, $\mathcal{A} = \mathbb{E}$) с существованием оценки типа

$$\sum_{q \leqslant X^{\vartheta-\varepsilon}} \max_{(a,q)=1} \Bigg| \sum_{\substack{p \leqslant X,\ p \in \mathcal{A} \\ p \equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{p \leqslant X,\ p \in \mathcal{A}} 1 \Bigg| \ll \frac{X}{(\ln X)^A}, \tag{1}$$

где $A > 1$, $\varepsilon > 0$ - произвольные постоянные, $0 < \vartheta < 1$. Последний параметр, называемый уровнем распределения, приобретает в таких вопросах особое значение: чем больше в приведённом неравенстве ϑ, тем меньшим оказывается значение постоянной $C(m)$. Отметим, что в частном случае $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ неравенство (1) известно для $\vartheta = \frac{1}{2}$ (теорема Бомбьери-Виноградова). Существует гипотеза Халберстама-Эллиотта о том, что оценка (1) верна и при $\vartheta = 1$, но она не доказана.

Далее, для вывода оценки (1) достаточно иметь подходящую оценку суммы

$$\sum_{q \leqslant X^{\vartheta-\varepsilon}} \max_{(a,q)=1} \Big| \sum_{p \leqslant X,\, p \equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)} e\big(hp^{\alpha}\big) \Big|, \tag{2}$$

где $e(x) = e^{2\pi i x}$, а p во внутренней сумме пробегает простые числа. Соответственно, исходная задача сводится к получению оценок для тригонометрических сумм с простыми числами.

Перечисленные выше ключевые этапы решения задачи и определяют структуру диссертации.

В главе 1 излагается история вопроса и формулируются основные утверждения, доказанные автором (теоремы 1.1-1.5).

В главе 2 приведен список обозначений и собраны вспомогательные леммы.

В главе 3 с помощью т.н. «стаканчиков» Виноградова показано, как оценка (1) получается из оценок величин (2).

В заключительной главе 6 проводится вывод верхних оценок постоянных $C(m)$ в случае $0 < \alpha < 1$ из неравенства (1) с помощью модифицированного Дж. Майнардом метода решета Сельберга.

Все перечисленные разделы по большей части опираются на известные ранее результаты и являются лишь необходимым связующим звеном между исходной задачей и оригинальными исследованиями автора.

Изложению последних посвящены главы 4 и 5, составляющие сердцевину работы, наиболее важную ее часть. Остановимся на их содержании более подробно.

В главе 4 автор находит оценку для тригонометрической суммы вида

$$\sum_{p \leqslant X,\, p \equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)} e\big(hp^{\alpha}\big) \tag{3}$$

с простыми числами (h - не очень большое целое число, отличное от нуля), равномерную по параметру q. Сложность нахождения такой оценки состоит в том, что разность q прогрессии, по простым числам которой ведется суммирование, может расти очень быстро с ростом X, достигая значения $X^{1/3-\varepsilon}$. Прогрессия $p \equiv a (\mathrm{mod}\, q)$ становится очень «редкой» и уловить осцилляцию в тригонометрической сумме становится все сложнее. Тем не менее, автору удается справиться с этой трудностью.

Необходимо отметить, что подобные суммы исследовались в 2013 г. С.А. Гриценко и Н.А. Зинченко, которые в случае $0.5 \leqslant \alpha < 1$ и $\vartheta = \frac{1}{3}$ нашли для них подходящую оценку и в итоге доказали аналог теоремы Бомбьери -Виноградова (1) с уровнем распределения $\vartheta = \frac{1}{3}$ для всех указанных значений α.

Как и указанные авторы, А.В. Шубин начинает исследование суммы (3) с применения к ней тождества Вона и сведения ее к двойным суммам двух типов. Далее, в отличие от С.А. Гриценко и Н.А. Зинченко, он применяет более изощренную технику (в частности, недавний (2017 г.) результат Д.Р Хизбрауна об оценках тригонометричских сумм в терминах k-й производной функции, стоящей в экспоненте). Этот момент в рассуждения оказывается принципиальным: применение более сильных аналитических инструментов позволяет А.В. Шубину получить необходимую оценку тригонометрической суммы с простыми для любого фиксированного нецелого $\alpha > 0$.

Пожалуй, главной частью диссертации А.В. Шубина является глава 5. В ней автор показывает, как в случае малых значений параметра α, $0 < \alpha < \frac{1}{9}$, уровень распределения ϑ в (1) можно заменить числом, бо́льшим $\frac{1}{3}$. Этот результат представляется весьма важным, так как до настоящего времени неравенств (1) с уровнем распределения $\vartheta > \frac{1}{3}$ ни при каких $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ известно не было.

В техническом отношении глава 5 является достаточно сложной. В ней автор применяет сумме (3) тождество Хизбрауна и разбивает ее на линейную комбинацию кратных тригонометрических сумм трех типов. Суммы первого и второго типов исследуются методами, применяемыми в главе 4. Оценка сумм третьего типа сводится в итоге к оценке сравнительно небольшого числа тройных сумм с гладкими финитными коэффициентами. В свою очередь, к каждой из тройных сумм дважды применяется формула суммирования Пуассона. Благодаря этому исходная тройная сумма выражается через суммы Клоостермана. Оценка Вейля таких сумм приводит в конце концов к успеху.

Повторное применение формулы суммирования Пуассона требует очень большого числа аккуратных выкладок, которые автор добросовестно проделал. Итогом всей этой деятельности становится новая оценка суммы (3), а вместе с ней - и величин (2), (1) при $\vartheta \leqslant \frac{2}{5} - \frac{3}{5}\alpha$. Легко видеть, что новая верхняя граница уровня распределения при $0 < \alpha < \frac{1}{9}$ превышает «барьер» $\frac{1}{3}$.

К содержанию диссертации имеется замечание, не снижающее её достоинств. Так, автор не продемонстрировал в работе то, как достигнутое им увеличение уровня распределения в случае $0 < \alpha < \frac{1}{9}$ отражается на уменьшении констант $C(m)$.

Подводя итог, отметим, что полученные в диссертации результаты являются новыми. Их доказательства изложены полно и аккуратно. Основные результаты работы докладывались на международных конференциях и научных семинарах, опубликованы в центральных математических журналах. Автореферат соответствует содержанию диссертации.

Диссертация является научно-квалификационной работой, результаты которой вносят весомый вклад в аналитическую теорию чисел. Она отвечает всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней кандидата наук, доктора наук в МФТИ», а ее автор - Шубин Андрей Витальевич - заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 - дискретная математика и математическая. кибернетика.

Дата:

Подпись / расшифровка подписи И.Резв (И.С. Резвякова)

Подпись Резвяковой И.С заверяю:
Зав. отделом кадров МИАН

Высоцкая В.И.

Федеральное государственное бюджетное учреждение Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук
ОТДЕЛ КАДРОВ
МОСКВА