УДК 517.572

А. И. Беспорточный, А. Н. Бурмистров

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Ненулевой минимум квадрата градиента гармонической функции

Рассмотрены гармонические функции в арифметических евклидовых пространствах размерности четыре и выше. Для каждой размерности $n > 3$ доказано существование такой функции, квадрат градиента которой достигает ненулевого строгого локального минимума во внутренней точке области гармоничности этой функции. (Аналогичный пример для трехмерного случая был известен ранее.) Тем самым доказана невозможность распространения на многомерные (три и выше) случаи двумерного принципа минимума, согласно которому для функций двух переменных во внутренней точке области гармоничности модуль градиента не может достигать строгого локального ненулевого минимума.

Ключевые слова: градиент гармонической функции, принцип минимума.

A. I. Besportochnyy, A. N. Burmistrov

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Nonzero minimum of the square of the gradient of a harmonic function

Harmonic functions in arithmetic Euclidean spaces of dimension four and higher are considered. For each dimension $n > 3$ the existence of a function whose square of the gradient reaches a non-zero strict local minimum at the inner point of the harmonicity domain of this function is proved. (A similar example for the three-dimensional case is known earlier.) This proves the impossibility of extending the two-dimensional minimum principle to multidimensional (three or more) cases. According to this principle, the modulus of the gradient of two variables function at the inner point of the harmonicity domain cannot reach a strict local nonzero minimum.

Key words: gradient of a harmonic function, minimum principle.

1. Введение

В последние годы повысился интерес к математическим исследованиям экстремальных свойств гидродинамических параметров [1–6]. К их числу относится исследование квадрата градиента гармонической функции. Это вопрос о величине скорости безвихревого течения несжимаемой жидкости [7, 8]. Закономерности расположения точек минимума и максимума скорости позволяют сделать вывод о свойствах течения. При этом ключевым является вопрос о возможности (или о невозможности) расположения точек строгого экстремума внутри течения. Например, из невозможности достижения максимума скорости во внутренней точке течения получен вывод о расположении точек зарождения кавитации на поверхностях обтекаемых тел [7, 8].

Перечислим известные в настоящее время закономерности и примеры, связанные с возможностью достижения экстремальных значений квадрата градиента гармонической функции во внутренней точке. Не будем останавливаться на простейшем одномерном случае, в котором квадрат градиента функции является константой.

1. Поскольку квадрат градиента гармонической функции является субгармонической функцией, вопрос о максимуме квадрата градиента решен давно для произвольной размерности. Квадрат градиента гармонической функции, заданной в ограниченной замкнутой области, не превосходит своего максимального значения на границе этой области.

2. Для любой размерности $n \geqslant 2$ можно привести следующие примеры гармонических функций. В одних примерах функция будет иметь *строгий нулевой* локальный минимум во внутренней точке области. В других примерах — *нестрогий нулевой* минимум. В третьих примерах — *нестрогий ненулевой* минимум. Этим объясняется то, почему ниже речь идет именно о «строгом ненулевом минимуме».

3. В двумерном случае квадрат градиента гармонической функции не может иметь строгий ненулевой минимум во внутренней точке.

4. В трехмерном случае существуют гармонические функции, квадрат градиента которых достигает ненулевого строгого локального минимума во внутренней точке области [6]. Существование таких функций доказывает невозможность распространения на трехмерный случай упомянутого выше двумерного свойства.

Таким образом, при $n = 2$ и $n = 3$ в настоящее время для каждого возможного случая либо известны примеры достижения строгого экстремума во внутренней точке, либо доказано, что достижение строгого экстремума во внутренней точке невозможно. Это означает, что в настоящее время вопрос, поставленный теоретической гидродинамикой (то есть для $n = 2$ и $n = 3$), решен полностью. Учитывая, что перечисленные в первых двух пунктах известные закономерности и примеры верны для произвольной размерности $n \geqslant 2$, можно сказать, что нерешенным остался только вопрос о точках строгого ненулевого минимума для размерности $n \geqslant 4$. Данная статья посвящена изучению возможности достижения строгого ненулевого минимума квадрата градиента гармонической функции во внутренней точке области для размерности $n \geqslant 4$. Основываясь на существовании трехмерного примера [6], для каждой размерности $n \geqslant 4$ доказано существование функции, гармонической в некоторой области G, квадрат градиента которой достигает ненулевого строгого локального минимума во внутренней точке.

Поскольку в данной статье вопрос о существовании строгого ненулевого минимума решен полностью (для произвольной размерности), то для представления полной картины в следующем разделе приведены доказательства первых трех перечисленных выше известных утверждений. Если читателя интересует только результат данной статьи, то упомянутый раздел можно пропустить.

2. Основные обозначения

Пусть $Ox_1x_2...x_n$ – прямоугольная декартова система координат в n-мерном арифметическом евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$, а $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_n$ – ортонормированный базис этой системы координат. И пусть функция $\psi(x_1, x_2, ..., x_n) \in C^2(G)$ такова, что $\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_n^2} = 0$.

В области G определено векторное поле $\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + ... + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\mathbf{e}_n$, которое будем называть градиентом функции ψ и обозначать $\nabla\psi$:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + ... + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\mathbf{e}_n.$$

Тогда

$$(\nabla\psi)^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)^2. \tag{1}$$

3. Известные экстремальные свойства квадрата градиента

Приведем доказательства первых трех перечисленных во введении известных утверждений.

1. Частные производные $\frac{\partial\psi}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, ..., n$, гармонической функции также являются гармоническими функциями: $\Delta\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Следовательно, лапласиан квадрата градиента (1) равен

$$\Delta\left[(\nabla\psi)^2\right] = \Delta\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)^2\right] =$$
$$= 2\left(\nabla\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\right)^2 + 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\Delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) + ... + 2\left(\nabla\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)\right)^2 + 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)\Delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right) =$$
$$= 2\left(\nabla\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\right)^2 + ... + 2\left(\nabla\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)\right)^2 \geqslant 0,$$

то есть $\Delta\left[(\nabla\psi)^2\right] \geqslant 0$. Согласно теореме Хопфа [9, 10], из этого неравенства следует, что если гармоническая функция ψ задана в ограниченной замкнутой области G, то $(\nabla\psi)^2 \leqslant \max\limits_{\partial G}(\nabla\psi)^2$ во всей области G.

2. Приведем три примера гармонических функций, имеющих минимумы квадрата градиента во внутренней точке области.

Первый пример (строгий нулевой минимум). При $n \geqslant 2$ квадрат градиента $(\nabla\psi)^2$ гармонической функции $\psi(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2 - (n-1)x_n^2$ равен $4\left[x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2 + (n-1)^2x_n^2\right]$ и имеет строгий нулевой минимум в начале координат.

Второй пример (нестрогий нулевой минимум). Тривиальным примером гармонической функции, имеющей нестрогий нулевой минимум квадрата градиента во внутренней точке, является функция, равная константе. Нетривиальным примером при $n \geqslant 3$ является функция

$$\psi(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-2}^2 - (n-2)x_{n-1}^2,$$

квадрат градиента которой принимает минимальное (нулевое) значение во всех точках прямой $x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = 0$.

В случае $n = 2$ нетривиальный пример с нестрогим нулевым минимумом невозможен. Для доказательства этого утверждения воспользуемся теорией функций комплексного переменного.

Пусть $\psi(x, y)$ – гармоническая в некоторой односвязной области функция. Обозначим: $f = \psi + i\vartheta$, где ϑ – сопряженная с ψ гармоническая функция. Функция f является регулярной функцией комплексной переменной $z = x + iy$. Допустим, что $(\nabla\psi)^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2$ имеет нестрогий нулевой минимум в некоторой внутренней точке A области. Это означает существование сходящейся к точке A последовательности таких точек из проколотой окрестности точки A, в которых $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 = 0$ (что равносильно $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$). Из условий Коши–Римана следует, что в точках этой последовательности равны нулю производные $\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$ и $\frac{\partial\vartheta}{\partial y}$, то есть равна нулю производная f'_z, которая также является регулярной функцией комплексной переменной. Согласно теореме единственности, $f'_z \equiv 0$ во всей области регулярности, содержащей точку A, то есть в рассматриваемой области гармоничности функции ψ. Поэтому обе производные $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ тождественно равны нулю в этой области. Следовательно, в двумерном случае возможен только тривиальный пример с нестрогим нулевым минимумом квадрата градиента: $\psi(x, y) = \text{const}$.

Третий пример (нестрогий ненулевой минимум). При $n \geqslant 3$ квадрат градиента гармонической функции $\psi(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + ... + x_{n-2}^2 - (n-2)x_{n-1}^2 + x_n$ равен $4\left[x_1^2 + ... + x_{n-2}^2 + (n-2)^2x_{n-1}^2\right] + 1$ и принимает минимальное ненулевое значение во всех точках прямой $x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = 0$.

Для случая $n = 2$ можно привести, в частности, следующий пример. Квадрат градиента гармонической функции $\psi(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ всюду равен числу 13 (нестрогий ненулевой минимум).

3. Чтобы доказать третье утверждение, приведенное во введении, еще раз воспользуемся теорией функций комплексного переменного. Пусть, как и выше, $\psi(x, y)$ – гармони-

ческая в односвязной области функция, а $f = \psi + i\vartheta$, где ϑ – сопряженная с функцией ψ гармоническая функция. Используя условия Коши–Римана, имеем

$$\left|f'_x\right|^2 = \left|\psi'_x\right|^2 + \left|\vartheta'_x\right|^2 = \left|\psi'_x\right|^2 + \left|\psi'_y\right|^2 = (\nabla\psi)^2.$$

Согласно следствию из принципа максимума модуля регулярной функции комплексного переменного [11, гл. I], модуль функции f'_x, если он не постоянен всюду, может иметь минимум во внутренней точке только в случае, если этот минимум равен нулю. Отсюда следует, что в двумерном случае квадрат градиента гармонической функции не может иметь строгий ненулевой минимум во внутренней точке области.

4. Трехмерный пример

В статье [6] приведен пример градиента гармонической функции трех переменных, квадрат которого достигает строгого ненулевого минимума во внутренней точке области. Однако выражение для самой функции не приведено, поскольку это не входило в цели статьи [6]. В настоящей работе представлено выражение для этой функции.

Приведем выражение для градиента этой функции в том виде, в котором оно представлено в статье [6] — в цилиндрической системе координат $Or\varphi z$. Координаты произвольной точки трехмерного пространства в системах координат $Ox_1x_2x_3$ и $Or\varphi z$ связаны друг с другом формулами: $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $x_3 = z$. Обозначим через $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ правую тройку единичных векторов в радиальном, окружном и осевом направлениях соответственно.

Пусть функция $g = g(r)$ является решением задачи Коши в двухсторонней окрестности точки $r = 0.5$ (штрих означает дифференцирование по аргументу r):

$$(g'/r)' = g/r, \tag{2}$$

$$g(0.5) = 0.5, g'(0.5) = 1. \tag{3}$$

Согласно теореме существования и единственности, решение задачи (2) — (3) существует в некоторой окрестности $(0.5-\delta;\, 0.5+\delta)$, $\delta > 0$.

Замечание. С помощью замены $g(r) = r\,f(r)$ уравнение (2) сводится к модифицированному уравнению Бесселя первого порядка, получающегося при формальной замене в уравнении Бесселя действительного аргумента на мнимый аргумент. Общее решение такого уравнения представляется через цилиндрические функции мнимого аргумента [11, гл. VII]. Этим можно воспользоваться и при необходимости получить явные выражения для $g(r)$.

Обозначим: $U = \{r,\varphi,z:\ 0.5-\delta < r < 0.5+\delta;\ \ -\pi < \varphi < \pi;\ \ -0.5 < z < 0.5\}$ – область, которая является разрезанной окрестностью окружности

$$\{r,\varphi,z:\ \ r = 0.5;\ \ -\pi < \varphi \leqslant \pi;\ \ z = 0\}.$$

Разрез полуплоскостью $\varphi = \pi$ обеспечивает односвязность области U. Рассмотрим в этой области векторное поле

$$\mathbf{V} = \left((g/r)\cos\, z + r\sin^2\varphi\right)\,\mathbf{e}_r + r\sin\varphi\cos\varphi\cdot\mathbf{e}_\varphi - \left(z + (g'/r)\sin\, z\right)\mathbf{e}_z. \tag{4}$$

Либо повторяя выкладки, предложенные в [6], либо с помощью непосредственной проверки (с учетом (2) – (3)) можно убедиться, что во всех точках односвязной области U выполнены равенства

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{V} = 0 \ \text{ и } \operatorname{div}\mathbf{V} = 0.$$

Для односвязной области это означает существование гармонического потенциала у поля $\mathbf{V}$, то есть существование гармонической в некоторой окрестности точки M (с координатами $r = 0.5$; $\varphi = 0$; $z = 0$) функции ψ_3 такой, что $\mathbf{V} = \nabla\psi_3$. Здесь и далее нижний индекс у гармонической функции ψ будет означать количество независимых переменных, от которых зависит эта функция. Приведем выражение для этой функции (с точностью до произвольной постоянной):

$$\psi_3 = (g'/r)\cos z + (r^2 \sin^2\varphi - z^2)/2.$$

Это выражение приводится впервые. В его верности можно убедиться непосредственной проверкой — сравнением $\nabla\psi_3$ с формулой (4).

Обозначим $D = (\nabla\psi_3)^2$. Непосредственной проверкой (с учетом (2) – (3)) можно убедиться и в том, что в точке M с декартовыми координатами $x_1 = 0.5$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$ выполнены достаточные условия строгого минимума квадрата градиента функции ψ_3: градиент $(\nabla\psi_3)^2$ равен нулю, а второй дифференциал $(\nabla\psi_3)^2$ является положительно определенной квадратичной формой от дифференциалов dr, $d\varphi$, dz: $d^2D = 10dr^2 + 2.5d\varphi^2 + 16dz^2$.

Рассматривая в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ гармоническую функцию ψ_3 как функцию переменных x_1, x_2, x_3, для второго дифференциала $(\nabla\psi_3)^2$ в точке $M(0.5, 0, 0)$ получим

$$d^2D(0.5, 0, 0) = 10dx_1^2 + 10dx_2^2 + 16dx_3^2. \tag{5}$$

При этом

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}(0.5, 0, 0) = 1, \ \ \frac{\partial\psi_3}{\partial x_2}(0.5, 0, 0) = \frac{\partial\psi_3}{\partial x_3}(0.5, 0, 0) = 0, \tag{6}$$

а

$$d^2\psi_3(0.5, 0, 0) = 3dx_2^2 - 3dx_3^2. \tag{7}$$

Значение величины $(\nabla\psi_3)^2$ в точке строгого минимума ($x_1 = 0.5$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$) не равно нулю (равно единице).

Учитывая сказанное, ниже будем исходить из следующего. Во-первых, существует гармоническая в некоторой области $U \subset \mathbf{R}^3$ функция $\psi_3(x_1, x_2, x_3)$, квадрат градиента которой $D(x_1, x_2, x_3) = (\nabla\psi_3)^2$ достигает строгого ненулевого минимума во внутренней точке области U, и этот минимум равен единице: $\min\limits_U \left[(\nabla\psi_3)^2\right] = 1$. Во-вторых, второй дифференциал $(\nabla\psi_3)^2$ является в упомянутой точке минимума положительно определенной диагональной квадратичной формой от дифференциалов dx_1, dx_2, dx_3, а градиент $(\nabla\psi_3)^2$ равен нулю.

5. Существование четырехмерного примера

Пусть $Ox_1x_2x_3x_4$ – прямоугольная декартова система координат в пространстве $\mathbf{R}^4$. Функция координат $x_3^2 - x_4^2$ является гармонической во всем пространстве $\mathbf{R}^4$. Поэтому гармонической по переменным x_1, x_2, x_3, x_4 в некоторой окрестности точки $M_4(0.5, 0, 0, 0)$ будет функция

$$\tilde{\psi}_4(\lambda, x_1, x_2, x_3, x_4) = \psi_3(x_1,\ x_2,\ x_3) + \lambda x_3^2 - \lambda x_4^2,$$

где $\lambda \neq 0$ – произвольная ненулевая константа. Квадрат градиента этой функции равен

$$B(\lambda, x_1, x_2, x_3, x_4) = (\nabla\tilde{\psi}_4)^2 = D(x_1, x_2, x_3) + 4\lambda x_3\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3} + 4\lambda^2x_3^2 + 4\lambda^2x_4^2. \tag{8}$$

Покажем, что при надлежащем выборе константы λ квадрат градиента функции $\tilde{\psi}_4(\lambda, x_1, x_2, x_3, x_4)$, то есть $B(\lambda, x_1, x_2, x_3, x_4)$, будет достигать строгого ненулевого минимума в точке $M_4(0.5, 0, 0, 0)$.

Проверим выполнение достаточных условий строгого минимума в точке M_4. Дифференцируя (8), находим

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} = \frac{\partial D}{\partial x_1} + 4\lambda x_3\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x_1\partial x_3}, \frac{\partial B}{\partial x_2} = \frac{\partial D}{\partial x_2} + 4\lambda x_3\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x_2\partial x_3},$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_3} = \frac{\partial D}{\partial x_3} + 4\lambda x_3 \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_3 \partial x_3} + 4\lambda \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} + 8\lambda^2 x_3, \frac{\partial B}{\partial x_4} = 8\lambda^2 x_4.$$

Отсюда, учитывая, что в точке $M_4(0.5, 0, 0, 0)$ градиент D равен нулю, а также используя последнее из равенств (6), для любого числа $\lambda \neq 0$ имеем

$$\frac{\partial B}{\partial x_i}(\lambda, 0.5, 0, 0, 0) = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{9}$$

Для второго дифференциала d^2B в точке M_4 с учетом соотношений (5) и (7) получим

$$d^2B(\lambda, 0.5, 0, 0, 0) = 10dx_1^2 + 10dx_2^2 + (16 - 24\lambda + 8\lambda^2)dx_3^2 + 8\lambda^2 dx_4^2. \tag{10}$$

Если положить, например, $\lambda = \lambda_4 = 4$, то второй дифференциал d^2B в точке M_4 окажется положительно определенной диагональной квадратичной формой от $dx_1,\ dx_2,\ dx_3,\ dx_4$. (Нижний индекс у символов λ_4 и M_4 подчеркивает, что число $\lambda = \lambda_4$ и точка M_4 используются для четырехмерного случая.) Вместе с равенствами (9) это означает, что $M_4(0.5, 0, 0, 0)$ является точкой строгого минимума функции $B(\lambda_4, x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Величина B в точке $M_4(0.5, 0, 0, 0)$, согласно (8), равна $D(0.5,\ 0,\ 0)$, то есть равна ненулевому минимуму $(\nabla\psi_3)^2$. Этот минимум равен единице (см. последний абзац третьего раздела), и поэтому $B(\lambda_4, 0.5, 0, 0, 0) = 1$.

Итак, функция

$$\psi_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \tilde{\psi}_4(\lambda_4, x_1, x_2, x_3, x_4) = \psi_3(x_1,\ x_2,\ x_3) + \lambda_4 x_3^2 - \lambda_4 x_4^2$$

является гармонической в некоторой окрестности точки $M_4(0.5, 0, 0, 0)$, а квадрат ее градиента достигает строгого ненулевого минимума в этой точке. Тем самым существование четырехмерного примера доказано.

6. Существование примеров для $n > 4$

Существование примеров для размерностей пять и выше доказывается последовательно. На основе существования примера для $n = 4$ доказывается существование примера для $n = 5$ и так далее. При этом все переходы к следующей размерности делаются одинаковым способом. Продемонстрируем переход от $n = 4$ к $n = 5$.

Пусть $Ox_1x_2x_3x_4x_5$ – прямоугольная декартова система координат в пространстве $\mathbf{R^5}$. Гармонической по переменным x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 в некоторой шаровой окрестности точки $M_5(0.5, 0, 0, 0, 0)$ будет функция

$$\tilde{\psi}_5(\lambda, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \psi_4(x_1,\ x_2,\ x_3, x_4) + \lambda x_4^2 - \lambda x_5^2,$$

где $\lambda \neq 0$ – произвольная ненулевая константа. Поскольку $\psi_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \psi_3(x_1,\ x_2,\ x_3) + \lambda_4 x_3^2 - \lambda_4 x_4^2$, имеем

$$\tilde{\psi}_5(\lambda, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \psi_3(x_1,\ x_2,\ x_3) + \lambda_4 x_3^2 + (\lambda - \lambda_4)x_4^2 - \lambda x_5^2.$$

Поэтому квадрат градиента функции $\tilde{\psi}_5$ можно представить в виде

$$(\nabla\tilde{\psi}_5)^2 = \left\{ D(x_1, x_2, x_3) + 4\lambda_4 x_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} + 4\lambda_4^2 x_3^2 \right\} + 4(\lambda - \lambda_4)^2 x_4^2 + 4\lambda^2 x_5^2. \tag{11}$$

Следует отметить, что выражение в фигурных скобках в формуле (11) является функцией переменных $x_1,\ x_2,\ x_3$.

Сравнивая (8) и (11), получаем, что

$$(\nabla\tilde{\psi}_5)^2 - B(\lambda_4, x_1, x_2, x_3, x_4) = 4(\lambda - \lambda_4)^2 x_4^2 + 4\lambda^2 x_5^2 - 4\lambda_4^2 x_4^2.$$

Из этого равенства видно, что в точке M_5 как величины, так и градиенты функций, стоящих в левой части, совпадают. Поэтому в точке $M_5(0.5, 0, 0, 0, 0)$ значение $(\nabla\tilde{\psi}_5)^2$ не равно нулю (равно $B(\lambda_4, 0.5, 0, 0, 0) = 1$), а градиент равен градиенту B и равен нулю.

Второй дифференциал $(\nabla\tilde{\psi}_5)^2$ в точке M_5, согласно (10) и (11), равен

$$d^2(\nabla\psi_3)^2 = 10dx_1^2 + 10dx_2^2 + (16 - 24\lambda_4 + 8\lambda_4^2)dx_3^2 + 8(\lambda - \lambda_4)^2 dx_4^2 + 8\lambda^2 dx_5^2.$$

Для положительной определенности второго дифференциала функции $(\nabla\tilde{\psi}_5)^2$ в точке M_5 достаточно выбрать $\lambda \neq 0$ так, чтобы величина $(\lambda - \lambda_4)$ не обращалась в ноль. Поскольку $\lambda_4 > 0$, можно, например, положить $\lambda = \lambda_5$, где $\lambda_5 = \lambda_4 + 1$.

Таким образом, функция

$$\psi_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \tilde{\psi}_5(\lambda_5, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \psi_3(x_1,\ x_2,\ x_3) + \lambda_4 x_3^2 + x_4^2 - (\lambda_4 + 1)x_5^2$$

будет гармонической в некоторой окрестности точки $M_5(0.5, 0, 0, 0, 0)$, а квадрат ее градиента будет достигать строгого ненулевого минимума в этой точке. Тем самым доказано существование примера для пространства размерности $n = 5$.

Проводя аналогичные рассуждения, можно доказать существование примеров для размерности шесть, семь и так далее. В итоге получим, что при переходе от размерности $n - 1 \geqslant 4$ к размерности n функция ψ_n может быть определена через функцию ψ_{n-1} по формуле $\psi_n = \psi_{n-1} + \lambda_n x_{n-1}^2 - \lambda_n x_n^2$, где $\lambda_n = \lambda_{n-1} + 1$ (или $\lambda_n = \lambda_4 + n - 4$). Поэтому для размерности $n \geqslant 5$ примером гармонической функции, квадрат градиента которой достигает строгого ненулевого минимума в точке с координатами $x_1 = 0.5$, $x_2 = ... = x_n = 0$, является функция

$$\psi_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \psi_3(x_1,\ x_2,\ x_3) + \lambda_4 x_3^2 + x_4^2 + ... + x_{n-1}^2 - (\lambda_4 + n - 4)x_n^2.$$

7. Заключение

Для пространств любой размерности $n \geqslant 4$ доказано существование функций, квадрат градиента которых достигает строгого ненулевого минимума во внутренних точках области гармоничности этих функций. Таким образом, в статье решен вопрос о возможности достижения экстремальных значений квадрата градиента гармонической функции во внутренней точке области гармоничности этой функции.

Литература

1. *Голубкин В.Н., Сизых Г.Б.* Принцип максимума функции Бернулли // Ученые записки ЦАГИ. 2015. Т. 46, № 5. С. 53–56.
2. *Сизых Г.Б.* Признак наличия точки торможения в плоском безвихревом течении идеального газа // ТРУДЫ МФТИ. 2015. Т. 7, № 2(26). С. 108–112.
3. *Беспорточный А.И., Бурмистров А.Н., Сизых Г.Б.* Вариант теоремы Хопфа // Труды МФТИ. 2016. Т. 8, № 1. С. 115–122.
4. *Голубкин В.Н., Ковалёв В.П., Сизых Г.Б.* Принцип максимума давления в плоских течениях идеальной несжимаемой жидкости // Ученые записки ЦАГИ. 2016. Т. 47, № 6. С. 28–36.
5. *Голубкин В.Н., Сизых Г.Б.* Экстремальные свойства давления в плоских дозвуковых течениях // ТРУДЫ МФТИ. 2016. Т. 8, № 4. С. 149–154.
6. *Сизых Г.Б.* Минимум скорости потенциального течения жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 3. С. 12–17.
7. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973.
8. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.

9. *Hopf E.* Elementare Bemerkungen uber die Losungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Elliptischen Typus // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1927. V. 19. P. 147–152.

10. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Издательство иностранной литературы, 1957.

11. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

References

1. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* Maximum principle for Bernoulli function. TsAGI Science Journal. 2015. V. 46, I. 5. P. 485–490.

2. *Sizykh G.B.* Sign of the presence of braking points in a planar irrotational flow of an ideal gas. Proceedings of MIPT. 2015. V. 7, N 2. P. 108–112. (in Russian).

3. *Besportochnyy A.I., Burmistrov A.N., Sizykh G.B.* Version of the Hopf theorem. Proceedings of MIPT. 2016. V. 8, N 1. P. 115–122. (in Russian).

4. *Golubkin V.N., Kovalev V.P., Sizykh G.B.* Maximum principle for pressure in ideal incompressible fluid flows. TsAGI Science Journal. 2016. V. 47, I. 6. P. 28–36. (in Russian).

5. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* Property of the extreme pressure values in plane subsonic flows. Proceedings of MIPT. 2016. V. 8, N 4. P. 149–154. (in Russian).

6. *Sizykh G.B.* Minimum skorosti potentsialnogo techeniia zhidkosti. Fluid Dynamics. 2017. N 3. P. 12–17. (in Russian).

7. *Sedov L.I.* A cource in continuum mechanics. V. 2. Moscow: Nauka, 1973. (in Russian).

8. *Batchelor G.K.* An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 2000.

9. *Hopf E.* Elementary remarks on the solutions of partial differential equations of second order of Elliptic type. Meeting reports of the Prussian Academy of Sciences. 1927. V. 19. P. 147–152. (in German).

10. *Miranda C.* Partial Differential Equations of Elliptic Type. Moscow: Publ. IL, 1957. (in Russian).

11. *Lavrentiev M.A., Shabat B.V.* Methods of the theory of functions of a complex variable. Moscow: Science, 1973. (in Russian).

Поступила в редакцию 25.03.2017