

УДК 532.685

А. С. Волошин, В. А. Мазепов, Л. С. Панкратов, Ю. И. Скалько

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Усреднение и численное моделирование однофазного течения слабосжимаемой жидкости в трещиновато-пористых коллекторах

В работе исследовано усреднение периодической задачи двойной пористости, рассматриваемой в случае двух типов распределения матричных блоков: классическая задача двойной пористости (объемное распределение) и задача двойной пористости в тонком слое. В обоих случаях методом двухмасштабных разложений построены усредненные модели. Данные модели содержат дополнительный член, описывающий эффект памяти. В случае тонкого слоя в усредненной задаче наблюдается потеря размерности. В работе представлены результаты численного моделирования однофазного течения слабосжимаемой жидкости в тонком пористом слое.

Ключевые слова: усреднение, среда с двойной пористостью, однофазное течение, тонкий слой.

A. S. Voloshin, V. A. Mazepov, L. S. Pankratov, Yu. I. Skalko

Laboratory of Fluid Dynamics and Seismic, Moscow Institute of Physics and Technology

Homogenization and simulation for the slightly compressible single-phase flow in naturally fractured reservoirs

The paper deals with homogenization of a periodic double porosity type problem stated in a porous medium for two different types of the matrix blocks distribution: the classical double porosity problem and the double porosity problem in a thin layer. In both cases, by the method of two-scale asymptotic expansions, we construct the homogenized models. The resulting homogenized problems are double-porosity type models that contain the terms representing memory effects. In the case of the thin layer the loss of dimension is observed in the homogenized model. The numerical simulation of the single-phase flow in 2D thin fractured-porous layer is presented.

Key words: homogenization, double porosity media, single-phase flow, thin layer.

1. Введение

Данная работа посвящена аналитическому и численному анализу течения однофазной жидкости в трещиновато-пористых коллекторах.

Моделирование течения жидкостей в пористых средах является объектом интенсивных исследований в целом ряде инженерных дисциплин, таких как нефтедобыча, управление водными ресурсами, гражданская инженерия и многих других. Естественные трещиноватые коллекторы могут быть смоделированы с помощью двух континуальных сред с различными петрографическими свойствами: связанная система трещин и система топологически несвязных блоков. Система трещин характеризуется низким уровнем аккумуляции жидкости и высокой проницаемостью, в то время как матричные блоки имеют проницаемость значительно меньшую, чем в трещинах. Основная часть жидкости протекает через систему трещин. При этом уровень жидкости, аккумулярованной в блоках, относительно высок. Когда система трещин развита настолько, что матрица разбивается на отдельные изолированные блоки, течение из одного блока в другой отсутствует. Однако при этом

имеет место обмен между каждым блоком и окружающей его системой трещин. Более детальное описание такого сорта проблем можно найти, например, в [7, 15, 19]. Таким образом, глобальное описание процесса должно включать два различных механизма. Для некоторых соотношений проницаемостей и раскрытия трещин глобальное описание таких течений достигается введением так называемой модели двойной пористости. Эта модель была впервые введена для описания глобального поведения трещиновато-пористых сред в работе Barenblatt et al. [6] и с тех пор используется в разных инженерных науках, связанных с гидрогеологией, нефтедобычей и т.д. В этой работе мы имеем дело с моделированием течения слабосжимаемой жидкости через трещиновато-пористые нефтесодержащие слои, имея в виду изучение вытеснения нефти водой, что является важным механизмом добычи вторичной нефти. В последние годы заметно возрос интерес к проблемам течений жидкости в слабопроницаемых трещиноватых породах. Основной причиной такого интереса является тот факт, что трещиноватые коллекторы содержат более чем 20 % мировых запасов нефти (см., например, [18]). Данная работа направлена на теоретическое объяснение процессов течения нефти в трещиновато-пористых коллекторах.

При моделировании таких задач всегда присутствуют различные масштабы физических коэффициентов, которые входят в соответствующие уравнения. С другой стороны, размеры коллектора не позволяют полное микромасштабное описание процесса на большом интервале времени даже при использовании современных компьютеров и параллельных компьютерных технологий. Следовательно, необходим компромисс между желаемой точностью вычислений и доступными вычислительными ресурсами. Стандартным компромиссом является усреднение коэффициентов, что позволяет использовать достаточно «грубую» вычислительную сетку. Далее, мы рассматриваем пористую среду с двойной пористостью. Она состоит из двух пористых подобластей с контрастными петрографическими свойствами. Мы также предполагаем, что среда является периодической. Это предположение связано с разделением масштабов и существованием эквивалентных сред. Формально оно записывается следующим образом: $\varepsilon = l/L \ll 1$, где l — длина периода или характерный микроскопический масштаб, а L — размер макроскопической области или характерный макроскопический масштаб. Классическая модель двойной пористости, или ε^2 -модель (величина ε^2 является нормировкой абсолютной проницаемости матричных блоков), которая принята в данной работе, предполагает, что раскрытие трещин имеет тот же порядок, что и размеры блока. Соответствующая задача усреднения в случае объемного распределения блоков (классическая модель двойной пористости) впервые получена математически строго в работе [4] и затем была рассмотрена многими авторами (см., например, [8–17, 20]). Соответствующая задача усреднения в тонком слое с двойной пористостью рассмотрена в [2]. После ряда работ понятие двойной пористости главным образом связано с ε^2 -моделью. Более общее понятие двойной пористости введено в монографии [15], в которой среда называлась средой с двойной пористостью, если \mathbf{r} — соотношение между проницаемостью матричного блока и системы трещин таково, что $0 < \mathbf{r} \ll 1$.

Усреднение одно- и многофазных течений в неоднородных пористых средах являлось важной проблемой в течение многих лет и много различных методов было предложено. Этот вопрос широко описан в научной литературе. Не претендуя на полный обзор литературы, отметим только одну монографию по данному вопросу. А именно, мы ограничимся методом двухмасштабных асимптотических разложений, описанным в [13], где он применяется для моделирования течения жидкости в пористых средах. Численное моделирование одно- и многофазных течений в неоднородных пористых средах было также рассмотрено многими авторами. Здесь мы ссылаемся на монографии [13, 15] (см. также литературу в этих работах). Однако все результаты, связанные с численным моделированием течений жидкости в сильно неоднородных пористых средах, таких, как среды с двойной пористостью, получены для объемного распределения матричных блоков. Тонкие пористые слои с двойной пористостью, где наблюдается потеря размерности в усредненной модели, рассмотрены не были.

Таким образом, целью данной работы является демонстрация применения метода двухмасштабных асимптотических разложений к линейным задачам двойной пористости и численное моделирование однофазных течений слабосжимаемой жидкости в тонких трещиновато-пористых слоях для различных степеней контраста.

Данная работа организована следующим образом. Раздел 2 посвящен классической модели двойной пористости. Усредненная модель получена методом двухмасштабных асимптотических разложений. Макроскопическая модель описывается обычным законом Дарси в матричном блоке и аналогичными уравнениями в системе трещин, за исключением дополнительного члена, который описывает источник жидкости из матричных блоков. Используя идеи работы [3], мы получаем усредненную модель, которая описывается одним уравнением, содержащим нелокальный член по времени. В разделе 3 мы получаем усредненную модель течения в тонком пористом двумерном слое. Усредненное уравнение является одномерным и также содержит нелокальный по времени член. Наконец, в разделе 4 представлены результаты численного моделирования течения жидкости в двумерном тонком пористом слое для различных степеней контраста.

2. Усреднение классической модели двойной пористости

Раздел организован следующим образом. В разделе 2.1 мы вводим математическую модель однофазного течения в среде с двойной пористостью. В разделе 2.2 описывается метод двухмасштабных асимптотических разложений, и затем мы получаем классическую модель двойной пористости (см, например, [3–5]). В конце раздела мы показываем, как представить усредненную модель одним уравнением, содержащим дополнительный нелокальный член по времени.

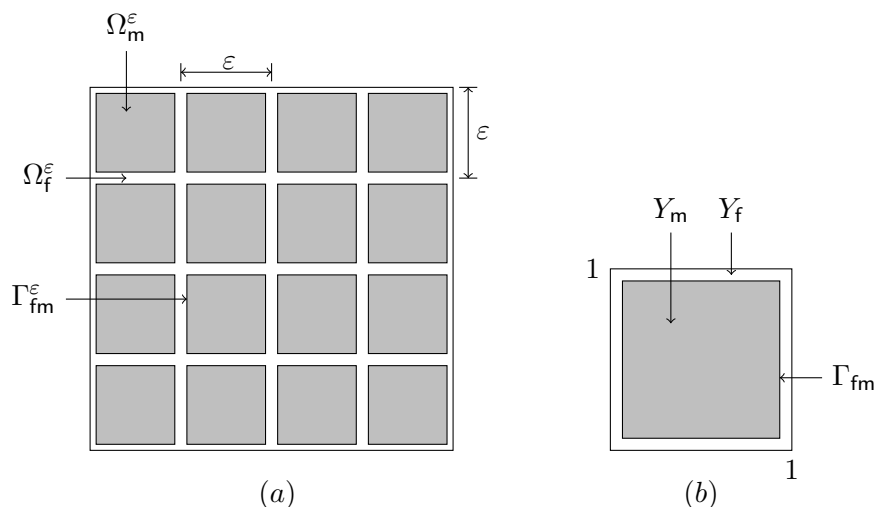


Рис. 1. (а) Область Ω с мезоструктурой, (б) Ячейка периодичности Y

2.1. Математическая модель течения

Рассмотрим ограниченную связную область с периодической структурой $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$). Мы будем масштабировать эту периодическую структуру параметром ϵ , который показывает отношение размера ячейки к размеру всей области Ω , и положим $\epsilon \rightarrow 0$. Пусть $Y \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1)^d$ — простейшая ячейка трещиновато-пористой среды (см. рис. 1(б)). Для простоты без потери общности, положим, что Y состоит из двух однородных пористых частей Y_m и Y_f , относящихся к матричному блоку и трещине соответственно. Таким образом, $Y = Y_m \cup Y_f \cup \Gamma_{fm}$, где Γ_{fm} обозначает границу этих двух частей. Пусть Ω_l^ϵ , где $l = \text{«f»}$ или «m» обозначает открытое множество, соответствующее пористой среде с индексом l .

Тогда $\Omega = \Omega_m^\varepsilon \cup \Gamma_{fm}^\varepsilon \cup \Omega_f^\varepsilon$, где $\Gamma_{fm}^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega_f^\varepsilon \cap \partial\Omega_m^\varepsilon \cap \Omega$ (см. рис. 1(a)) Введём также обозначения: $\Omega_T \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \times (0, T)$, $\Omega_{l,T}^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_l^\varepsilon \times (0, T)$, где $T > 0$ — фиксировано. Также введем проницаемость K^ε и пористость Φ^ε среды Ω . Мы полагаем

$$K^\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} K_f \mathbf{1}_f^\varepsilon(x) + \varepsilon^2 K_m \mathbf{1}_m^\varepsilon(x) \quad \text{и} \quad \Phi^\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_f \mathbf{1}_f^\varepsilon(x) + \Phi_m \mathbf{1}_m^\varepsilon(x), \quad (1)$$

где $\mathbf{1}_f^\varepsilon, \mathbf{1}_m^\varepsilon$ являются характеристическими функциями областей $\Omega_f^\varepsilon, \Omega_m^\varepsilon$ соответственно. Сделаем следующие предположения относительно проницаемости системы трещин и матричных блоков:

Гипотеза 1. Пористости Φ_f, Φ_m трещин и блоков не зависят от ε и таковы, что $0 < \Phi_m, \Phi_f < 1$.

Гипотеза 2. Значения K_f и K_m не зависят от ε и таковы, что $0 < K_m, K_f < \infty$.

Закон сохранения масс вместе с законом Дарси может быть записан в виде

$$\begin{cases} \Phi^\varepsilon u_t^\varepsilon - \operatorname{div}(K^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) = f(x, t) & \text{в } \Omega_T; \\ \nabla u^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = 0 & \text{на } \partial\Omega \times (0, T); \\ u^\varepsilon(x, 0) = u^{init}(x) & \text{в } \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

где u^ε обозначает избыточное давление в среде, w_t для произвольной функции w означает производную по времени от w и $\vec{\nu}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Запишем систему (2) отдельно для системы трещин и для матричных блоков. С этой целью введем следующие обозначения:

$$u^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \rho^\varepsilon(x, t) \mathbf{1}_f^\varepsilon(x) + \sigma^\varepsilon(x, t) \mathbf{1}_m^\varepsilon(x) \quad u^{init} \stackrel{\text{def}}{=} \rho^{init}(x) \mathbf{1}_f^\varepsilon(x) + \sigma^{init}(x) \mathbf{1}_m^\varepsilon(x), \quad (3)$$

где функции $\rho^{init}, \sigma^{init}$ не зависят от ε . Далее, получаем:

Уравнения течения в трещинах. Уравнения в системе трещин имеют вид

$$\begin{cases} \Phi_f \rho_t^\varepsilon - \operatorname{div}(K_f \nabla \rho^\varepsilon) = f(x, t) & \text{в } \Omega_f^\varepsilon \times (0, T); \\ K_f \nabla \rho^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = \varepsilon^2 K_m \nabla \sigma^\varepsilon \cdot \vec{\nu} & \text{на } \Gamma_{fm}^\varepsilon \times (0, T); \\ \rho^\varepsilon(x, 0) = \rho^{init}(x) & \text{в } \Omega_f^\varepsilon. \end{cases} \quad (4)$$

Уравнения течения в матричных блоках. Уравнения в матричных блоках имеют вид

$$\begin{cases} \Phi_m \sigma_t^\varepsilon - \varepsilon^2 \operatorname{div}(K_m \nabla \sigma^\varepsilon) = f(x, t) & \text{в } \Omega_m^\varepsilon \times (0, T); \\ \sigma^\varepsilon = \rho^\varepsilon & \text{на } \Gamma_{fm}^\varepsilon \times (0, T); \\ \sigma^\varepsilon(x, 0) = \sigma^{init}(x) & \text{в } \Omega_m^\varepsilon. \end{cases} \quad (5)$$

Условия на границе матрица–трещины Γ_{fm}^ε , (4)₂ и (5)₂ — это сохранение потока между двумя областями и непрерывность давления соответственно.

Основной задачей раздела 2 является изучение асимптотического поведения u^ε — решения (2) — при $\varepsilon \rightarrow 0$. Соответствующий анализ приведен ниже в разделе 2.2.

2.2. Усреднение системы (4) – (5)

В данном разделе, согласно [5], применяется метод двухмасштабных асимптотических разложений. Мы получим макроскопическую модель течения формальным образом. Ниже предполагается, что решение задачи (4) – (5) зависит от пространственной переменной следующим образом: (i) оно является функцией от макроскопической переменной $x \in \Omega$ и (ii) при каждом $x \in \Omega$, от микроскопической переменной $y \in Y$. Макроскопический и микроскопический масштабы связаны между собой параметром ε следующим образом: $y \stackrel{\text{def}}{=} x/\varepsilon$.

Это подразумевает, что $\nabla = \varepsilon^{-1}\nabla_y + \nabla_x$, где ∇_x и ∇_y являются градиентами по переменным x и y соответственно. Тогда $\rho^\varepsilon(x, t)$ и $\sigma^\varepsilon(x, t)$ будут иметь следующие разложения:

$$\rho^\varepsilon(x, t) = \rho^{(0)}(x, t) + \varepsilon\rho^{(1)}(x, y, t) + \dots, \quad \sigma^\varepsilon(x, t) = \sigma^{(0)}(x, y, t) + \varepsilon\sigma^{(1)}(x, y, t) + \dots, \quad (6)$$

где функции $\rho^{(k)}(x, y, t)$, $\sigma^{(k)}(x, y, t)$ являются Y -периодическими по y .

Подставляя (6) в (4) – (5), сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях параметра ε и действуя согласно [13], получаем классическую линейную модель двойной пористости:

$$\begin{cases} \Phi^* \rho_t - \operatorname{div}_x(K^* \nabla_x \rho) = |Y_f| f(x, t) - \Phi_m \int_{Y_m} \frac{\partial \sigma}{\partial t}(x, y, t) dy & \text{в } \Omega_T; \\ \nabla \rho \cdot \vec{\nu} = 0 & \text{на } \partial\Omega \times (0, T); \\ \rho(x, 0) = \rho^{init}(x) & \text{в } \Omega, \end{cases} \quad (7)$$

где σ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{cases} \Phi_m \sigma_t - K_m \Delta_y \sigma = f(x, t) & \text{в } Y_m \times \Omega_T; \\ \sigma = \rho & \text{на } \Gamma_{fm} \times \Omega_T; \\ \sigma(x, y, 0) = \sigma^{init}(x) & \text{в } Y_m \times \Omega. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $\rho(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \rho^{(0)}(x, t)$; $\sigma(x, y, t) \stackrel{\text{def}}{=} \rho^{(0)}(x, y, t)$; $\Phi^* \stackrel{\text{def}}{=} |Y_f| \Phi_f$ и K^* – постоянный усредненный тензор с элементами

$$K_{ij}^* \stackrel{\text{def}}{=} K_f \int_{Y_f} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial \zeta_j}{\partial y_i} \right) dy, \quad (9)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, а ζ_j ($j = 1, \dots, d$) является Y -периодическим решением ячеечной задачи:

$$\begin{cases} -\Delta_y \zeta_j = 0 & \text{в } Y_f; \\ \nabla_y \zeta_j \cdot \vec{\nu} = -\vec{e}_j \cdot \vec{\nu} & \text{на } \Gamma_{fm}. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь \vec{e}_j – это единичный вектор вдоль j -й координаты.

Замечание 1. Усредненную модель (7) – (10) можно обосновать строго математически так называемым методом двухмасштабной сходимости (см. [1]). Доказательство можно найти в [13, гл. 3].

Замечание 2. Согласно [13, гл. 1] можно показать, что элементы K_{ij}^* могут быть записаны следующим образом:

$$K_{ij}^* = K_f \int_{Y_f} (\vec{e}_j + \nabla_y \zeta_j) \cdot (\vec{e}_i + \nabla_y \zeta_i) dy. \quad (11)$$

Заметим, что классическая усредненная модель (7) – (8) является связной. Используя идеи работы [3], мы избавляемся от связности системы. А именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $S = S(x, \sigma)$ (дополнительный источниковый член) является функцией, определенной $S(x, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_m \int_{Y_m} \sigma_t(x, y, t) dy$. Тогда $S(x, \sigma) = -W_t \star (\Phi_m \rho_t - f)$, где символ \star обозначает оператор свертки,

$$W(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{Y_m} U(y, t) dy \quad (12)$$

и $U = U(y, t)$ является решением вспомогательной задачи

$$\begin{cases} \Phi_m U_t - K_m \Delta_y U = 0 & \text{в } Y_m \times (0, T); \\ U(y, t) = 1 & \text{на } \Gamma_{fm} \times (0, T); \\ U(y, 0) = 0 & \text{в } Y_m. \end{cases} \quad (13)$$

Заметим, что согласно лемме 1, задача (7) – (8) может быть записана как интегро-дифференциальное уравнение:

$$\begin{cases} \Phi^* \rho_t - \operatorname{div}_x(K^* \nabla_x \rho) = |Y_f| f - W_t \star (\Phi_m \rho_t - f) & \text{в } \Omega \times (0, T); \\ \rho = \rho^{init} & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (14)$$

3. Однофазное течение в двумерном тонком пористом слое

Пусть Ω^ε — прямоугольник в \mathbb{R}^2 , $\Omega^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} (0, L) \times (0, \varepsilon)$ и $Y \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1)^2$ — ячейка периодичности. Периодическая структура в среде Ω^ε показана на рис. 2.

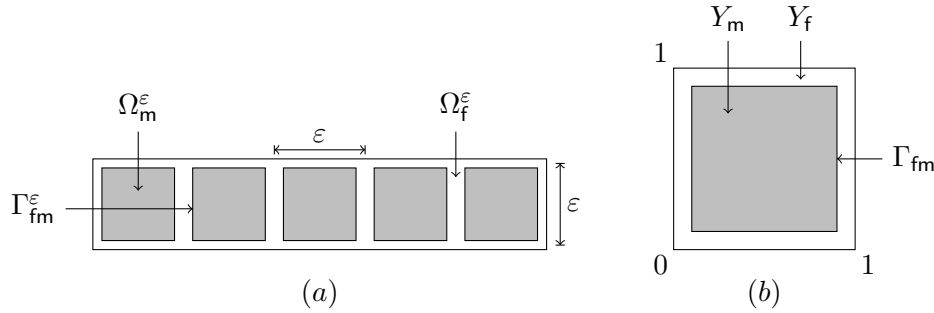


Рис. 2. (a) Область Ω с мезоструктурой, (b) Ячейка периодичности Y

Течение в трещиновато-пористом слое Ω^ε описывается уравнением

$$\begin{cases} \Phi^\varepsilon u_t^\varepsilon - \operatorname{div}(K^\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) = h(x) & \text{в } \Omega^\varepsilon \times (0, T); \\ \nabla u^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = 0 & \text{на } \partial\Omega^\varepsilon \times (0, T); \\ u^\varepsilon(x, 0) = u^{init}(x) & \text{в } \Omega^\varepsilon, \end{cases} \quad (15)$$

где $\vec{\nu}$ есть внешний вектор нормали к $\partial\Omega$, проницаемость K^ε и пористость Φ^ε среды Ω^ε определены в (1). Так же, как и в предыдущем разделе, здесь удобно ввести обозначение (3) и переписать уравнение (15) отдельно в трещинах и матричных блоках с подходящими граничными условиями.

Уравнения течения в трещинах. Уравнения в системе трещин имеют вид

$$\begin{cases} \Phi_f \frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}(K_f \nabla \rho^\varepsilon) = h(x) & \text{в } \Omega_f^\varepsilon \times (0, T); \\ K_f \nabla \rho^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = \varepsilon^2 K_m \nabla \sigma^\varepsilon \cdot \vec{\nu} & \text{на } \Gamma_{fm}^\varepsilon \times (0, T); \\ \nabla \rho^\varepsilon \cdot \vec{\nu} = 0 & \text{на } \partial\Omega^\varepsilon \times (0, T); \\ \rho^\varepsilon(x, 0) = \rho^{init}(x) & \text{в } \Omega_f. \end{cases} \quad (16)$$

Уравнения течения в матричных блоках. Уравнения в матричных блоках имеют вид

$$\begin{cases} \Phi_m \frac{\partial \sigma^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon^2 \operatorname{div}(K_m \nabla \sigma^\varepsilon) = h(x) & \text{в } \Omega_m^\varepsilon \times (0, T); \\ \sigma^\varepsilon = \rho^\varepsilon & \text{на } \Gamma_{fm}^\varepsilon \times (0, T); \\ \sigma^\varepsilon(x, 0) = \sigma^{init}(x) & \text{в } \Omega_m. \end{cases} \quad (17)$$

Цель этого раздела заключается в изучении асимптотического поведения u^ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так же, как в предыдущем разделе, мы можем показать, что задача (15) допускает усреднение, и усредненная задача имеет вид

$$\begin{cases} \Phi_f |Y_f| R_t - K^* \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} = |Y_f| h(\xi, 0) + S(R) & \text{в } (0, L) \times (0, T), \\ \frac{\partial R}{\partial \xi}(0, t) = \frac{\partial R}{\partial \xi}(L, t) = 0 & \text{на } (0, T), \\ R(\xi, 0) = 0 & \text{в } (0, L). \end{cases} \quad (18)$$

Здесь ξ является макроскопической переменной, $\xi \in (0, L)$; K^* – тензор усредненной проницаемости:

$$K^* = |Y_f| - \int_{Y_f} \frac{\partial \chi}{\partial y_2} dy,$$

где y_2 является переменной по оси абсцисс и χ обозначает y_2 -периодическое решение ячеистой задачи:

$$\begin{cases} -\Delta_y \chi = 0 & \text{в } Y_f; \\ \frac{\partial(\chi - y_2)}{\partial y_1} \nu_1 = 0 \text{ и } \frac{\partial(\chi - y_2)}{\partial y_2} \nu_2 = 0 & \text{на } \Gamma_{mf}; \\ \frac{\partial(\chi - y_2)}{\partial y_1} = 0 & \text{на } \partial Y \cap \{y = 0, 1\}; \end{cases}$$

$S(R)$ – добавочный источниковый член, определяемый выражением $S(R) \stackrel{\text{def}}{=} -\Phi_m W_t \star R_t + W h(\xi, 0)$, где функция W определена в (12) – (13).

Замечание 3. Заметим, что граничные условия (15)₂ на вертикальных частях $\partial\Omega^\epsilon$ (см. рис. 2(a)) не имеют значения в процессе усреднения. Например, их можно заменить граничными условиями Дирихле или третьим краевым условием.

Замечание 4. С помощью метода двухмасштабной сходимости можно показать, что усредненный результат (18) является математически строгим. Доказательство можно найти в [2].

4. Численное моделирование

В этом разделе показаны результаты численного моделирования однофазного течения в тонком трещиновато-пористом слое. Вначале рассматривается задача (15) при различных значениях степени контраста. А именно, полагаем $K^\epsilon(x) = K_f \mathbf{1}_f^\epsilon(x) + \epsilon^n K_m \mathbf{1}_m^\epsilon(x)$, где $n > 0$ – параметр, $u^\epsilon(x, 0) = 0$, $u^\epsilon(0, x_2, t) = 1$, $u^\epsilon(1, x_2, t) = 0$, $(\nabla u^\epsilon \cdot \vec{\nu})(x_1, \pm 2.5, t) = 0$. На рис. 3 показано численное решение задачи в критическом случае $n = 2$ для $\epsilon = 0.05$. Этот результат затем сравнивается с соответствующими моделями для $n = 1.5$, $n = 4$ (см. рис. 4).



Рис. 3. Избыточное давление жидкости в тонком слое для ϵ^2 -модели

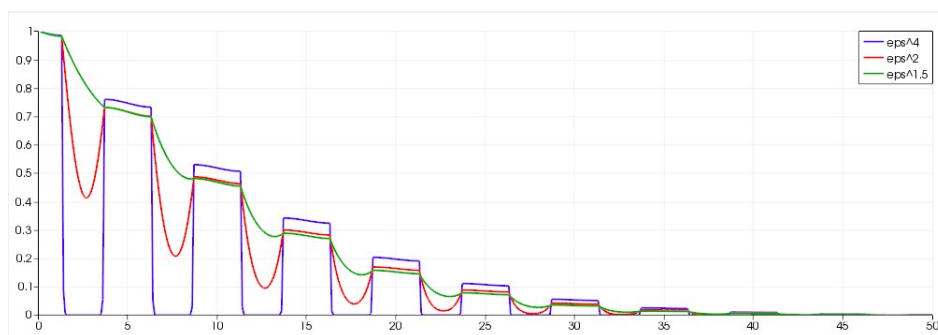


Рис. 4. Избыточное давление жидкости в тонком слое для различных степеней контраста (сечение $y = 0$)

На рис. 4 показано влияние контраста абсолютных проницаемостей. В случае ϵ^2 -модели наблюдается пропитка матричных блоков с характерной глубиной порядка размера блока. В случае $\epsilon^{1.5}$ -модели блок ведет себя как трещина, но с меньшей проницаемостью. В случае ϵ^4 -модели среда ведет себя как перфорированная.

Далее сравнивается решение исходной задачи с усредненной для того же тонкого слоя. Результаты приведены на рис. 5, на которых видно, что график усредненной модели является огибающей семейства кривых неусредненных решений при $\varepsilon \rightarrow 0$. Неусредненное решение содержит области трещин и блоков, причем решение именно в области трещин соответствует решению усредненной задачи.

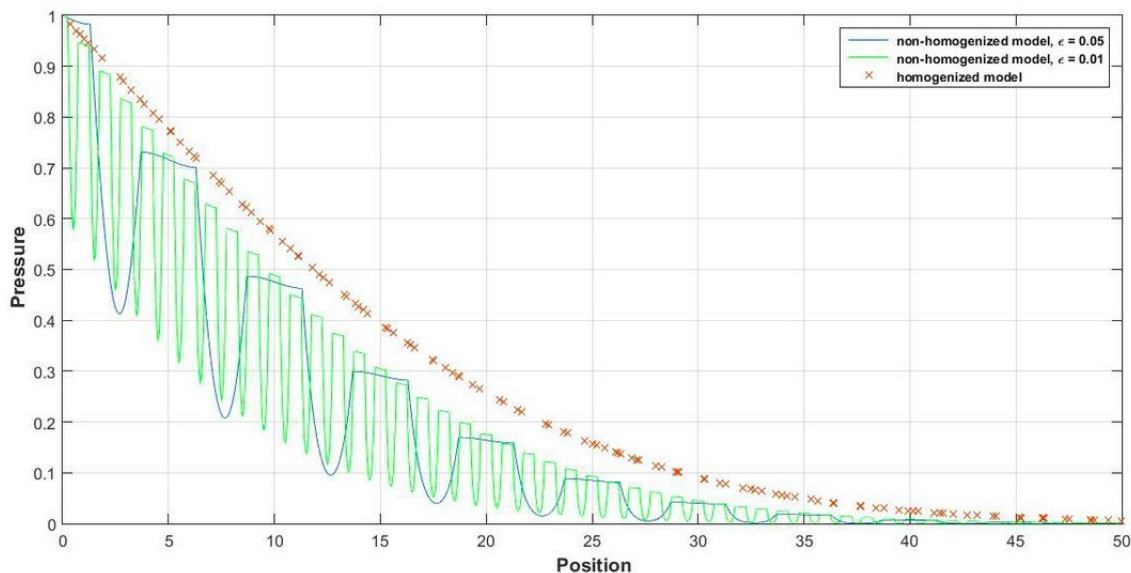


Рис. 5. Избыточное давление жидкости в момент времени $t = 1$ мин для начальной модели ($\varepsilon = 0.05$ — синяя кривая, $\varepsilon = 0.01$ — зеленая кривая) и для усредненной модели (красные точки)

5. Заключение

В работе представлены усредненные модели однофазных течений слабосжимаемых жидкостей в средах с двойной пористостью. В частности, показано, как расщепить усредненную модель и представить ее в форме исходных уравнений с дополнительным членом, описывающим эффект памяти. Проведено прямое моделирование среды с двойной пористостью, показано влияние степени контраста на вид решения в матричных блоках и показана численная сходимость этих решений к решению усредненной задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Благодарности. Эта работа была финансирована проектом РФФ N 15-11-00015. Работа была выполнена в лаборатории флюидодинамики и сейсмоакустики Московского физико-технического института (РАЕР 5-100). Авторы благодарны проф. М. Юраку, А. В. Колдобе и А. В. Конохову за плодотворные дискуссии.

Литература

1. Allaire G. Homogenization and two-scale convergence // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 28. P. 1482–1518.
2. Amaziane B., Pankratov L., Piatnitski A. Homogenization of a single phase flow through a porous medium in a thin layer // Math. Models Methods Appl. Sci. 2007. V. 17. P. 1317–1349.
3. Amaziane B., Pankratov L., Rybalko V. On the homogenization of some double porosity models with periodic thin structures // Appl. Anal. 2009. V. 88. P. 1469–1492.
4. Arbogast T., Douglas J., Hornung U. Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory // SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21. P. 823–826.

5. *Arbogast T., Douglas J., Hornung U.* Modelling of naturally fractured reservoirs by formal homogenization techniques // *Frontiers in Pure and Applied Mathematics.* Elsevier, Amsterdam. 1991. P. 1–19.
6. *Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I. N.* 1960 Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 1960. V. 24. P. 1286–1303.
7. *Bear J., Tsang C.F., de Marsily G.* Flow and Contaminant Transport in Fractured Rock. London: Academic Press Inc., 1993.
8. *Bourgeat A., Mikelić A., Piatnitski A.* Modèle de double porosité aléatoire // *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I.* 1998. V. 327. P. 99–104.
9. *Bourgeat A., Goncharenko M., Panfilov M., Pankratov L.* A general double porosity model // *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb.* 1999. V. 327. P. 1245–1250.
10. *Bourgeat A., Chechkin G.A., Piatnitski A.* Singular double porosity model // *Appl. Anal.* 2003. V. 82. P. 103–116.
11. *Braides A., Chiadò Piat V., Piatnitski A.* A variational approach to double-porosity problems // *Asymptotic Anal.* 2004. V. 39. P. 281–308.
12. *Ene H.I., Polisevski D.* Model of diffusion in partially fissured media // *Z. Angew. Math. Phys.* 2002. V. 53. P. 1052–1059.
13. *Hornung U.* Homogenization and porous media. New York: Springer-Verlag, 1997.
14. *Marchenko V.A., Khruslov E.Ya.* Homogenization of Partial Differential Equations. Boston: Birkhäuser, 2006.
15. *Panfilov M.* Macroscale Models of Flow Through Highly Heterogeneous Porous Media. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000.
16. *Панкратов Л., Рыбалко В.* Асимптотический анализ модели двойной пористости с тонкими трещинами // *Матем. сборник.* 2003. Т. 194. С. 121–146.
17. *Сандраков Г.В.* Осреднение параболических уравнений с контрастными коэффициентами // *Изв. матем.* 1999. Т. 63. С. 1015–1061.
18. *Salimi H., Bruining J.* Upscaling of fractured oil reservoirs using homogenization including non-equilibrium capillary pressure and relative permeability // *Computational Geoscience.* 2012. V. 16. P. 367–389.
19. *Van Golf-Racht T.D.* Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering. Amsterdam-Oxford-New York: Elsevier Scientific Publishing Company, 1982.
20. *Жиков В.В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // *Мат. сб. РАН.* 2000. Т. 191. С. 31–72.

References

1. *Allaire G.* Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.* 1992. V. 28. P. 1482–1518.
2. *Amaziane B., Pankratov L., Piatnitski A.* Homogenization of a single phase flow through a porous medium in a thin layer. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2007. V. 17. P. 1317–1349.
3. *Amaziane B., Pankratov L., Rybalko V.* On the homogenization of some double porosity models with periodic thin structures. *Appl. Anal.* 2009. V. 88. P. 1469–1492.
4. *Arbogast T., Douglas J., Hornung U.* Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory. *SIAM J. Math. Anal.* 1990. V. 21. P. 823–826.

5. *Arbogast T., Douglas J., Hornung U.* Modelling of naturally fractured reservoirs by formal homogenization techniques. *Frontiers in Pure and Applied Mathematics*. Elsevier, Amsterdam. 1991. P. 1–19.
6. *Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I. N.* 1960 Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1960. V. 24. P. 1286–1303.
7. *Bear J., Tsang C.F., de Marsily G.* *Flow and Contaminant Transport in Fractured Rock*. London: Academic Press Inc., 1993.
8. *Bourgeat A., Mikelic A., Piatnitski A.* Modèle de double porosité aléatoire. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1*. 1998. V. 327. P. 99–104.
9. *Bourgeat A., Goncharenko M., Panfilov M., Pankratov L.* A general double porosity model. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb*. 1999. V. 327. P. 1245–1250.
10. *Bourgeat A., Chechkin G.A., Piatnitski A.* Singular double porosity model. *Appl. Anal.* 2003. V. 82. P. 103–116.
11. *Braides A., Chiadò Piat V., Piatnitski A.* A variational approach to double-porosity problems. *Asymptotic Anal.* 2004. V. 39. P. 281–308.
12. *Ene H.I., Polisevski D.* Model of diffusion in partially fissured media. *Z. Angew. Math. Phys.* 2002. V. 53. P. 1052–1059.
13. *Hornung U.* *Homogenization and porous media*. New York: Springer-Verlag, 1997.
14. *Marchenko V.A., Khruslov E. Ya.* *Homogenization of Partial Differential Equations*. Boston: Birkhäuser, 2006.
15. *Panfilov M.* *Macroscale Models of Flow Through Highly Heterogeneous Porous Media*. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000.
16. *Pankratov L., Rybalko V.* Asymptotic analysis of a double porosity model with thin fissures. *Mat. Sbornik*. 2003. V. 194. P. 121–146.
17. *Sandrakov G.V.* Homogenization of parabolic equations with contrasting coefficients. *Izv. Math.* 1999. V. 63. P. 1015–1061.
18. *Salimi H., Bruining J.* Upscaling of fractured oil reservoirs using homogenization including non-equilibrium capillary pressure and relative permeability. *Computational Geoscience*. 2012. V. 16. P. 367–389.
19. *Van Golf-Racht T.D.* *Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering*. Amsterdam–Oxford–New York: Elsevier Scientific Publishing Company, 1982.
20. *Zhikov V.V.* On one extension and application of the method of two-scale convergence. *Russian Acad. Sci. Sb. Math.* 2000. V. 191. P. 31–72.

Поступила в редакцию 17.03.2016