

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 5

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трехчлену $f(x)$ прибавили x^2 , его наименьшее значение увеличилось на 1, а когда из него вычли x^2 , его наименьшее значение уменьшилось на 3. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $2x^2$?

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\sqrt{x+1}-2} + \sqrt{x+82-18\sqrt{x+1}} > 5.$$

3. На сторонах треугольника ABC отметили точки: 10 – на стороне AB , 11 – на стороне BC , 12 – на стороне AC . При этом ни одна из вершин треугольника не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?
4. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC). Градусные меры дуг AD и CD , не содержащих точки B , равны 60° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC .
5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(50; 30)$. Найдите количество таких квадратов.
6. а) Изобразите на координатной плоскости фигуру Φ , координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \leq 2(x - y), \\ x^2 + y^2 \leq 4(x + y - 1). \end{cases}$$

- б) Найдите площадь фигуры Φ и расстояние от точки $T(0; 4)$ до ближайшей точки фигуры Φ .
7. В треугольнике ABC проведена медиана BM ; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P , причём $BP = 2$, $MP = 4$.
- а) Найдите отрезок DE .
- б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 6

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили x^2 , его наибольшее значение увеличилось на $\frac{27}{2}$, а когда из него вычли $4x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если из него вычесть $2x^2$?

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\sqrt{x-1}-3} + \sqrt{x+9-20\sqrt{x-1}} > 5.$$

3. На сторонах треугольника ABC отметили точки: 12 – на стороне AB , 9 – на стороне BC , 10 – на стороне AC . При этом ни одна из вершин треугольника не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?
4. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC). Градусные меры дуг AD и CD , не содержащих точки B , равны 120° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC .
5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(55; 25)$. Найдите количество таких квадратов.
6. а) Изобразите на координатной плоскости фигуру Φ , координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y^2 - x^2 \leq 3(x + y), \\ x^2 + y^2 \leq 6y - 6x - 9. \end{cases}$$

- б) Найдите площадь фигуры Φ и расстояние от точки $T(-6; 0)$ до ближайшей точки фигуры Φ .
7. В треугольнике ABC проведена медиана BM ; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P , причём $BP = 1$, $MP = 3$.
- а) Найдите отрезок DE .
- б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.