Основные формулы по годовому курсу «Механика и теория поля»

М. Г. Иванов

5 июня 2018 г.

1 Тензоры

Везде в курсе подразумевается, что все функции достаточно гладкие, а все необходимые для вычислений теоремы существования и единственности выполнены.

Закон преобразования тензора типа (n, m) при замене координат $x^M \to x^{M'}$

$$T^{M'_1 \dots M'_n}{}_{K'_1 \dots K'_m}(x') = T^{M_1 \dots M_n}{}_{K_1 \dots K_m}(x(x')) \frac{\partial x^{M'_1}}{\partial x^{M_1}}(x(x')) \dots \frac{\partial x^{M'_n}}{\partial x^{M_n}}(x(x')) \frac{\partial x^{K_1}}{\partial x^{K'_1}}(x') \dots \frac{\partial x^{K_m}}{\partial x^{K'_m}}(x').$$

При указании типа тензора кроме валентности (число верхних и нижних индексов) *следует указывать класс преобразований координат*, по отношению к которым объект ведёт себя как тензор.

Появление в одном члене двух одноимённых индексов подразумевает суммирование (свёртку) по всему диапазону изменения индекса. Такие индексы называются немыми. Один из индексов такой пары должен быть верхним, а другой — нижним. В декартовых координатах можно не различать верхние и нижние индексы.

Индекс, который в каждом члене выражения встречается ровно один раз называется свободным. Свободный индекс во всех членах должен быть в одном (верхнем или нижнем) положении. Свободный индекс (одновременно во всех членах) можно заменять конкретным значением.

Если в каком-то члене одноимённый индекс встретился более двух раз, то в выражении допущена ошибка.

Если аргумент функции или функционала несёт индексы, то подразумевается, что функция зависит от всех компонент, например, пусть $\alpha, \beta = 1, \dots, d$, а $\alpha'\beta' = 1', \dots, d'$, тогда

$$f(x^\alpha) \equiv f(x^\beta) \equiv f(x^1, x^2, \dots, x^d) \equiv f(x) \neq f(x^{\alpha'}) \equiv f(x^{\beta'}) \equiv f(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{d'}) \equiv f(x')$$

Роль индекса у аргумента — показать число компонент и (если аргумент тензор) валентность тензора, к какой системе координат относится индекс. Имя индекса у аргумента при этом не важно.

Далее по повторяющим индексам везде подразумевается суммирование, если явно не оговорено обратное.

Для 3-мерного евклидового пространства в декартовых координатах

$$e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\alpha\gamma\beta} = -e_{\beta\gamma\alpha} = -e_{\gamma\beta\alpha}, \qquad e_{123} = e_{xyz} = +1.$$

$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\mu\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\mu}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} e_{\mu\nu\gamma} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}.$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_\alpha b_\alpha, \quad [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_\gamma = e_{\alpha\beta\gamma} a_\alpha b_\beta.$$

$$\nabla_\alpha = \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \nabla_\alpha x_\beta = \nabla_\alpha r_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = (\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{a}) = \nabla_\alpha a_\alpha, \quad \operatorname{rot} \mathbf{a} = [\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}], \ (\operatorname{rot} \mathbf{a})_\gamma = e_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\alpha a_\beta.$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \boldsymbol{\nabla}\varphi, \quad (\operatorname{grad} \varphi)_\alpha = \nabla_\alpha \varphi, \quad (\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{\nabla}) = \nabla_\alpha \nabla_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = \triangle.$$

2 Лагранжев формализм

Действие — функционал от траектории системы $x^\alpha(t)$ в конфигурационном пространстве:

$$S[x^\alpha(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t)\, dt$$

Функция Ларганжа $L(x, \dot{x}, t)$ часто (но не всегда) в классической механике — разность кинетической и потенциальной энергий.

Вариациая действия — функционал от траектории системы $x^\alpha(t)$ и вариации траектории $\delta x^\alpha(t)$ с граничными условиями $\delta x^\alpha(t_{0,1}) = 0$:

$$\delta S[x^\alpha(t), \delta x^\alpha(t)] = \frac{d}{d\varepsilon} S[x^\alpha(t) + \varepsilon\, \delta x^\alpha(t)]\bigg|_{\varepsilon=0} = S[x^\alpha(t) + \delta x^\alpha(t)] - S[x^\alpha(t)] + o(\delta x).$$

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\, \delta x^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\, \delta \dot{x}^\alpha \right) dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\, \delta x^\alpha \bigg|_{t_0}^{t_1}}_{0} + \int\limits_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right)}_{\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)}} \delta x^\alpha\, dt.$$

Выражение в скобках в последнем интеграле называется вариационной производной. Условие экстремальности действия — условие, что $\delta S = 0$ для произвольной вариации $\delta x^\alpha(t)$ (при условии $\delta x^\alpha(t_{0,1}) = 0$) требует обращения вариационной производной в нуль. Это даёт нам уравнения движения в форме уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)} \equiv \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = 0.$$

Также через функцию Лагранжа L определяются обобщённые импульсы $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}$ (компоненты ковектора), обобщённые силы $F_\alpha = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}$ (компоненты ковектора только для линейных преобразований), энергия $\mathcal{E} = \dot{x}^\alpha p_\alpha - L$ (скаляр).

Пусть имеется некоторая замена обобщённых координат и времени, непрерывно зависящая от параметра s:

$$t' = T(x^\alpha, t, s), \quad x'^\alpha = X^\alpha(x^\alpha, t, s),$$

причём эта замена оставляет неизменным действие, или (что эквивалентно) подынтегральное выражение в действии (включая dt!)

$$L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t)\, dt = L(x'^\alpha, \dot{x}'^\alpha, t')\, dt'.$$

Такая замена называется *симметрией действия*. Согласно теореме Э.Нётер, симметрии действия соответствует закон сохранения некоторой величины p_s

$$\frac{dp_s}{dt} = 0, \qquad p_s = \left(p_\alpha \frac{\partial X^\alpha}{\partial s} - \mathcal{E} \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{s=0}.$$

3 Гамильтонов формализм

Если выполняется условие

$$\det\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot{x}^\beta}\right) \equiv \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\alpha \partial \dot{x}^\beta}\right) \neq 0,$$

то функция Лагранжа называется невырожденной. В этом случае локально обобщённые скорости $\dot{x}^\alpha$ могут быть выражены через обобщённые импульсы

$$\dot{x}^\alpha = V^\alpha(x^\alpha, p_\alpha, t)$$

и с помощью преобразования Лежандра по функции Лагранжа может быть построена функция Гамильтона — энергия как функция обобщённых координат, обобщённых импульсов и времени:

$$H(x^\alpha, p_\alpha, t) = p_\beta V^\beta(x^\alpha, p_\alpha, t) - L(x^\alpha, V^\alpha(x^\alpha, p_\alpha, t), t).$$

Функция Гамильтона позволяет записать уравнения динамики как уравнения первого порядка — уравнения Гамильтона, которые в канонических переменных (обобщённых координатах и импульсах) имеют вид

$$\dot{x}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}.$$

Переход от функции Гамильтона к функции Лагранжа выполняется аналогично. Условие того, что обобщённые импульсы могут быть выражены через обобщённые скорости как $p_\alpha = P_\alpha(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t)$ (условие невырожденности функции Гамильтона)

$$\det\left(\frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial p_\beta}\right) \equiv \det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\right) \neq 0,$$

$$L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t) = \dot{x}^\beta P_\beta(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t) - H(x^\alpha, P_\alpha(x^\alpha, \dot{x}^\alpha, t), t)$$

Функция от обобщённый координат, обобщённых импульсов и времени называется *наблюдаемой величиной* или просто *наблюдаемой* $F(x^\alpha, p_\alpha, t)$. Для пары наблюдаемых F, G определяется *скобка Пуассона*, которая в канонических переменных имеет вид

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial x^\alpha} = \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial x^\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial x^\alpha}\right).$$

Для канонических переменных (необходимое и достаточное условие каноничности)

$$\{x^\alpha, p_\beta\} = \delta^\alpha_\beta, \qquad \{x^\alpha, x^\beta\} = \{p_\alpha, p_\beta\} = 0.$$

Для произвольной наблюдаемой $F = F(x, p, t)$ и функции Гамильтона $H(x, p, t)$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}.$$

4 Уравнение Гамильтона-Якоби

В уравнении Гамильтона-Якоби действие является не функционалом, а функцией от конечного момента времени и конечной точки траектории, при этом траектория удовлетворяет уравнениям Эйлера Лагранжа

$$S(t_1, x_1^\alpha) = \int^{t_1} L(x, \dot{x}, t)\, dt, \quad x^\alpha(t_1) = x_1^\alpha, \qquad \frac{\delta S}{\delta x^\alpha(t)} \equiv \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = 0.$$

Производные от действия по конечной точке оказываются связанными с импульсами и энергией

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t} = -\mathcal{E}, \qquad \frac{\partial S(t,x)}{\partial x^\alpha} = p_\alpha.$$

Поскольку энергия выражается через импульсы с помощью функции Гамильтона получаем диффернеиальное уравнение на функцию $S(t, x)$ — уравнение Гамильтона-Якоби

$$\mathcal{E} = H(x, p, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x^\alpha, \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}, t\right) = 0.$$

Если вам повезло найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, т.е. его решение $S(t, x^\alpha, a_\alpha)$ с параметрами a_α, число которых равно числу степеней свободы, причём

$$\det\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial a_\beta}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^\alpha \partial a_\beta}\right) \neq 0,$$

то следующие величины будут сохраняться (не зависеть от времени): a_α, $\frac{\partial S}{\partial a_\alpha}$. Этого достаточно для решения уравнений динамики исходной гамильтоновой системы.

5 Движение твёрдого тела и неинерциальные системы отсчёта

Скорость вращения вокруг начала координат с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$: $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]$.

Момент инерции

$$I_{\alpha\beta} = \sum_a m_a \left(r_a^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{a\alpha} x_{a\beta}\right) = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$

Момент инерции относительно оси $\mathbf{n}$

$$I_{\mathbf{n}} = I_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = \int \left(r^2 - (\mathbf{r}, \mathbf{n})^2\right) dm = \int r_\perp^2 \, dm, \qquad \mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{r}).$$

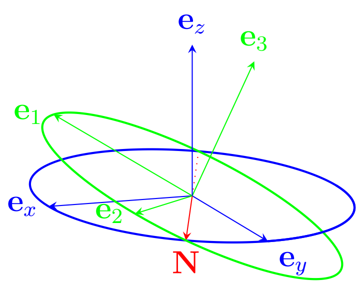
Момент импульса и момент силы

$$\mathbf{L} = \sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a], \quad L_\alpha = I_{\alpha\beta}\Omega^\beta. \qquad \dot{\mathbf{L}} \equiv \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{K} \equiv \sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a].$$

Энергия вращения

$$\mathcal{E}_{\text{вр.}} = \frac{1}{2} I_{\alpha\beta}\Omega^\alpha \Omega^\beta = \frac{1}{2}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{L}) = \frac{1}{2}(I^{-1})^{\alpha\beta} L_\alpha L_\beta.$$

Углы Эйлера (как в теоретической физике)



Переход от неподвижной системе к подвижной определяется следующим образом:
* Поворот вокруг $\mathbf{e}_z$ на угол φ (*угол прецессии*) совмещает ось y' с линией узлов $\mathbf{N}$.
* Поворот вокруг $\mathbf{N}$ на угол θ (*угол нутации*) совмещает ось z' с осью x^3.
* Поворот вокруг $\mathbf{e}_3$ на угол ψ (*угол собственного вращения*) совмещает оси x'' и y'' с x^1 и x^2.

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_3 &= \cos\theta\,\mathbf{e}_z + \sin\theta(\cos\varphi\,\mathbf{e}_x - \sin\varphi\,\mathbf{e}_y) \end{aligned}$$

Вектор угловой скорости твёрдого тела имеет компоненты $(\dot\varphi, \dot\theta, \dot\psi)$ если его разложить по векторам $\mathbf{e}_z, \mathbf{N}, \mathbf{e}_3$. получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\,\mathbf{e}_z + \dot\theta\,\mathbf{N} + \dot\psi\,\mathbf{e}_3.$$

Введём неинерциальную систему отсчёта, начало отсчёта которой задаётся радиус-вектором $\mathbf{R}(t)$ и движется со скоростью $\mathbf{V}(t)=\dot{\mathbf{R}}(t)$ и ускорением $\mathbf{W}(t)=\dot{\mathbf{V}}(t)$. Также неинерциальная система вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}(t)$. Производные от $\mathbf{R}$, $\mathbf{V}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ мы определим по отношению к невращающейся системе отсчёта, но разлагать их будем по вращающемуся базису. Векторы с двумя штрихами относятся к неинерциальной системе. Силы инерции, действующие на частицу имеют вид

$$\mathbf{F}_{\text{инерц.}}=-m\mathbf{W}''-m[\dot{\boldsymbol{\Omega}}''\times\mathbf{r}'']+m[\boldsymbol{\Omega}''\times[\mathbf{r}''\times\boldsymbol{\Omega}'']]+2m[\mathbf{v}''\times\boldsymbol{\Omega}''].$$

Эти четыре члена называются соответственно: *сила инерции поступательного движения*, *сила инерции вращения*, *центробежная сила*, *сила Кориолиса*.

6 Специальная теория относительности

Здесь и далее при употреблении двойных знаков $\pm,\mp$ верхний знак соответствует соглашениям принятым в лекциях и конспекте, а нижный — 2-му тому курса теоретической физики Ландау и Лифшица.

Пространство-время Минковского — 4-мерное пространство (время $x^0=ct$ и 3 пространственных координаты $x^1=x, x^2=y, x^3=z$), в котором введёна метрика Минковского

$$g_{ij}=\pm\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&+1&0&0\\0&0&+1&0\\0&0&0&+1\end{pmatrix}=g^{ij}.$$

Метрика Минковского переходит в себя при сдвигах, отражениях, поворотах пространственных координат, преобразованиях Лоренца (бустах) и их комбинациях.

Преобразование Лоренца от условно неподвижной (нештрихованной) системы к системе движущейся со скоростью $\mathbf{v}=(v,0,0)$ (штрихованной) имеет вид (обратная матрица отличается знаком скорости)

$$x^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}x^i,\qquad \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}=\Lambda_{x,v}{}^{i'}_{i}=\begin{pmatrix}\gamma&-\gamma v/c&0&0\\-\gamma v/c&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Удобно параметризовать преобразования Лоренца через *быстроту* θ:

$$v=c\,\operatorname{th}\theta,\qquad \gamma=\operatorname{ch}\theta,\qquad \gamma v/c=\operatorname{sh}\theta.$$

При преобразованиях Лоренца в одном направлении быстро́ты (в отличие от скоростей) складываются.

С помощью метрики Минковского определяются аналог расстояния — *интервал* s и собственное время вдоль мировой линии τ

$$ds^2=g_{ij}\,dx^i\,dx^j=\pm(-c\,dt^2+dx^2+dy^2+dz^2)=\mp c^2\,d\tau^2.$$

Метрика и обратная метрика g^{ij} ($g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k$) позволяет поднимать и опускать индексы и определить скалярное произведение 4-мерных векторов.

$$a_i=g_{ij}a^j,\quad b^i=g^{ij}b_j,\quad F^i{}_j=F_{kj}g^{ik}=F^{ik}g_{kj},\quad (\underline{a},\underline{b})=a^ib_i=a_ib^i=g_{ij}a^ib^j=g^{ij}a_ib_j.$$

4-мерный вектор можно записывать через компоненты, причём пространственные компоненты часто объединют в 4-мерный вектор

$$A^i=(A^0;\underbrace{A^1;A^2;A^3}_{\mathbf{A}=A^\alpha})=(A^0;\mathbf{A})=(A^0;A^\alpha),\quad A^iB_i=A^0B_0+A^1B_1+A^2B_2+A^3B_3=\pm(-A^0B^0+(\mathbf{AB})).$$

Для безмассовой частицы $\tau = 0$ и соответствующие 4-мерные величины не определены.

Кинематические 4-мерные величины определяются с помощью дифференцирования по собственному времени частицы:
$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = (\gamma c; \gamma \mathbf{v})$ — 4-скорость, $u^i u_i = \mp c^2$,
$w^i = \frac{d^2x^i}{d\tau^2} = (\gamma^4(\mathbf{v},\mathbf{w})/c; \gamma^4(\mathbf{v},\mathbf{w})\mathbf{v}/c^2 + \gamma^2\mathbf{w})$ — 4-ускорение, $w^i u_i = 0$
$p^i = mu^i = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$ — 4-импульс (определён и для безмассовой частицы, для которой u^i не определена!), $\mp p^i p_i = \mathcal{E}^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2$ (позволяет вычислить эффективную массы системы и функцию Гамильтона свободной частицы),
$f^i = \frac{dp^i}{d\tau}$ — 4-сила,
m — масса не зависит от системы отсчёта, связана с энергией в системе центра инерции $E_0 = mc^2$,
$L^{ij} = x^i p^j - x^j p^i$ — 4-мерный момент импульса.

В качестве коэффициента пропорциональности между 3-мерной скоростью и 3-мерным импульсом выступает не масса, а энергия: $\mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}/c^2$.

Для всех 4-мерных величин мы используем единицы измерения, соответствующие единицам измерения соответствующих 3-мерных величин. Это позволяет класть $c = 1$, а потом восстанавливать c из соображений размерности.

7 Электромагнитное поле

4-потенциал $A^i = (\varphi; \mathbf{A})$, φ — скалярный потенциал, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал.

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

При калибровочном (градиентном) преобразовании потенциалов

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} f \quad \Leftrightarrow \quad A_i \to A_i' = A_i \pm \nabla_i f$$

поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не меняются.

Тензор электромагнитного поля

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}, \qquad A_i = \pm(-\varphi; \mathbf{A}),$$

$$F_{ij} = \pm \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad F^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Дуальный тензор электромагнитного поля:

$$\widetilde{F}_{ik} = \tfrac{1}{2}\, e_{iklm} F^{lm}\,, \quad e_{0123} = -e^{0123} = 1.$$

Инварианты электромагнитного поля:

$$F^{ik}F_{ik} = 2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)\,, \quad F^{ik}\widetilde{F}_{ik} = 4(\mathbf{EH}).$$

4-понециал и тензор электромагнитного поля преобразуются при замене координат так, как полагается тензорам соответствующей валентности. В частности при преобразовании Лоренца со скоростью $(v, 0, 0)$ получаем

$$F_{i'j'} = F_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}},$$

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - \frac{v}{c}H_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + \frac{v}{c}H_y),$$
$$H'_x = H_x, \quad H'_y = \gamma(H_y + \frac{v}{c}E_z), \quad H'_z = \gamma(H_z - \frac{v}{c}E_y).$$

Уравнение движения заряженной частицы (импульс не обобщённый, а кинематический: $\mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}/c^2$, в нерелятивистском пределе $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]$$

В 4-мерном виде

$$mw^i = \frac{q}{c}F^i{}_j u^j.$$

Для релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле в 4-мерной записи (l — произвольный монотонный параметр вместо времени) действие имеет вид

$$S[x^i(l)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(-mc^2\sqrt{\mp g_{ij}\frac{dx^i}{dl}\frac{dx^j}{dl}} \pm \frac{q}{c}A_i(x)\frac{dx^i}{dl}\right) dl$$

Действие для нерелятивистской и релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле

$$S[\mathbf{r}(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - q\varphi(\mathbf{r},t) + \frac{q}{c}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A}(\mathbf{r},t))\right) dt, \quad S[\mathbf{r}(t)] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(-mc^2\sqrt{1-\dot{\mathbf{r}}^2/c^2} - q\varphi(\mathbf{r},t) + \frac{q}{c}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A}(\mathbf{r},t))\right)$$

Обобщённый импульс $\mathbf{P}$ отличается от кинематического на векторный потенциал

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} \text{ (нерелятивистский случай)}, \quad \mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}/c^2 \text{ (релятивистский случай)}.$$

Функции Гамильтона имеют вид который очевиден, если помнить, что выражение $\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ — это просто кинематический импульс

$$H(\mathbf{r},\mathbf{P},t) = \underbrace{\frac{(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t))^2}{2m}}_{\text{кинетическая энергия } \frac{mv^2}{2}} + q\varphi(\mathbf{r},t), \qquad H(\mathbf{r},\mathbf{P},t) = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)^2} + q\varphi(\mathbf{r},t).$$

Из параметризации полей через потенциалы следуют следующие тождества

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i F_{ij} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0$$

— 1-я пара уравнений Максвелла.

2-я пара уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_k F^{ik} = \pm\frac{4\pi}{c}j^i, \quad j^i = (c\rho; \mathbf{j})$$

получается вариацией действия для электромагнитного поля

$$S[A_i(\underline{x})] = \int \left(-\frac{F^{ij}F_{ij}}{16\pi c} \pm \frac{1}{c^2}\,j^i(\underline{x})\,A_i(\underline{x})\right) d^4\underline{x}.$$

Член, описывающий взаимодействия поля с частицами здесь записан через 4-мерную плотность тока $j^i = (c\rho; \mathbf{j})$, здесь ρ — объёмная плотность заряда, $\mathbf{j}$ — 3-мерная плотность тока

$$\pm\sum_a \frac{e_a}{c}\int A_i(\underline{X}_a(l_a))\,\frac{dX_a^i}{dl_a}\,dl_a = \pm\frac{1}{c^2}\int\limits_U A_i(\underline{x})j^i(\underline{x})\,d^4\underline{x}.$$

Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0.$$

Микроскопические плотности заряда и тока

$$\rho(\mathbf{r},t) = \sum_a e_a \delta^3\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)\right), \qquad \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \sum_a e_a \mathbf{v}(t)\delta^3\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)\right).$$

8 Преобразование Фурье

Функция одной переменной:

$$\tilde{f}(\omega) = F[f](\omega) = \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}}\, f(t)\, dt, \qquad f(t) = \int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{f}(\omega)\, d\omega,$$

Функция на пространстве Минковского

$$\tilde{A}_i(k_j) = \int \frac{\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i} x^j k_j}}{(2\pi)^2}\, A_i(x^k)\, d^4x, \qquad A_i(x^j) = \int \frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} x^j k_j}}{(2\pi)^2}\, \tilde{A}_i(k_k)\, d^4k.$$

Здесь $k^j = (\frac{\omega}{c}; \mathbf{k})$ — 4-мерный волновой вектор, $x^j = (ct; \mathbf{r})$ — 4-мерный радиус-вектор, $x^j k_j = \pm(\mathbf{kr} - \omega t)$ — их скалярное произведение.

9 Дельта-функция

$$\int\limits_a^b f(x)\delta(x - x_0)\, dx = \begin{cases} f(x_0), & a < x_0 < b, \\ 0, & x_0 < a, x_0 > b; \end{cases}$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}, \quad \delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|}, \; f(x_n) = 0,$$

$$\delta(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\, \frac{dk}{2\pi}.$$

Формула Сохотского: $\lim\limits_{\delta\to+0} \frac{1}{x - i\delta} = \mathcal{P}\,\frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$.

$$\delta^3(\mathbf{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z), \qquad \delta^4(\underline{x}) = \delta(ct)\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z).$$

10 Электро- и магнито-статика

Дипольный момент системы зарядов:

$$\text{электрический } \; \mathbf{d} = \sum_a e_a \mathbf{r}_a\,,$$

$$\text{магнитный } \; \boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \sum_a e_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a]\,.$$

Тензор квадрупольного момента

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_a e_a \left(3 x_{a\alpha} x_{a\beta} - (\mathbf{r}_a)^2 \delta_{\alpha\beta}\right).$$

Разложение потенциалов по мультипольным моментам ($\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}}{r}$)

$$\varphi=\frac{e}{r}+\frac{(\mathbf{d},\mathbf{n})}{r^2}+\frac{Q_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta}{2r^3}+\cdots .$$

Поле магнитного диполя (черта — усреднение по времени)

$$\bar{\mathbf{A}}=\frac{[\bar{\boldsymbol{\mu}}\times\mathbf{r}]}{r^3}\,,\quad \bar{\mathbf{H}}=\frac{3(\bar{\boldsymbol{\mu}},\mathbf{n})\mathbf{n}-\bar{\boldsymbol{\mu}}}{r^3}\,.$$

Система зарядов во внешнем поле

$$U_{\mathrm{e}}=e\varphi-(\mathbf{d},\mathbf{E})+\frac{1}{6}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}Q_{\alpha\beta}+\cdots ;$$

$$\bar{U}_{\mathrm{m}}=-(\bar{\boldsymbol{\mu}},\mathbf{H})\,,\quad \bar{\mathbf{F}}=(\bar{\boldsymbol{\mu}},\nabla)\mathbf{H}\,,\quad \bar{\mathbf{M}}_{\mathrm{F}}=[\bar{\boldsymbol{\mu}}\times\mathbf{H}]\,.$$

11 Волновые уравнения

$$-\Box A^i\equiv\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2A^i}{\partial t^2}-\Delta A^i=\frac{4\pi}{c}j^i\,.$$

Калибровка Лоренца:

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i}=\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{div}\mathbf{A}=0\,.$$

Запаздывающие потенциалы:

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\iiint\frac{\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}'\,;$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{c}\iiint\frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}'\,.$$

Плотность W и поток $\mathbf{S}$ энергии электромагнитного поля

$$W=\frac{\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2}{8\pi}\,,\quad \mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right]\,.$$

Плотность импульса $\mathbf{g}$ и тензор напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ электромагнитного поля

$$\mathbf{g}=\frac{1}{4\pi c}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right]=\frac{\mathbf{S}}{c^2}\,,\quad \sigma_{\alpha\beta}=W\delta_{\alpha\beta}-\frac{E_\alpha E_\beta+H_\alpha H_\beta}{4\pi}\,.$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^{ik}=\mp\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}\mathrm{g}^{ik}F_{lm}F^{lm}-F^{il}F^{k}{}_{l}\right)\,;$$

$$T^{ik}=\begin{pmatrix}W & S_x/c & S_y/c & S_z/c\\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}W & \mathbf{S}/c\\ \mathbf{S}/c & \sigma_{\alpha\beta}\end{pmatrix}\,.$$

Баланс энергии-импульса электромагнитного поля

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k}+\frac{1}{c}F^{ik}j_k=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial W}{\partial t}+\mathrm{div}\mathbf{S}+(\mathbf{j},\mathbf{E})=0,\\ \frac{\partial \mathrm{g}_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}+\rho E_\alpha+\frac{1}{c}[\mathbf{j}\times\mathbf{H}]_\alpha=0.\end{array}\right.$$

12 Плоская монохроматическая волна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_0\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k^m x_m}\right\}=(\mathrm{Re}\mathbf{E}_0)\cos(\omega t-\mathbf{kr})+(\mathrm{Im}\mathbf{E}_0)\sin(\omega t-\mathbf{kr}).$$

$$k^m=(\omega/c,\mathbf{k}),\quad k_m\,k^m\equiv\mp(\frac{\omega^2}{c^2}-\mathbf{k}^2)=0.$$

$$\mathbf{H}=[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\ ,\quad (\mathbf{n},\mathbf{H})=0\,,\quad \mathbf{n}=\frac{\mathbf{k}}{k}\,,\quad k=\frac{\omega}{c}\,,\quad k=\frac{2\pi}{\lambda}\,.$$

Вектор поляризации

$$\mathbf{e}=\frac{\mathbf{E}_0}{|\mathbf{E}_0|}=e_1\mathbf{e}^{(1)}+e_2\mathbf{e}^{(2)}\,,\quad (\mathbf{e}^{(1)}\mathbf{e}^{(2)*})=0\,,\ (\mathbf{e}^{(1,2)},\mathbf{n})=0,\quad |\mathbf{E}_0|=\sqrt{\mathbf{E}_0^*\mathbf{E}_0}.$$

Линейный базис: $\mathbf{e}^{(1)}=\mathbf{e}^{(x)}\,,\ \mathbf{e}^{(2)}=\mathbf{e}^{(y)}\,,\ (\mathbf{n}\parallel z)\,,$
циркулярный базис

$$\mathbf{e}^{(+1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}^{(x)}+i\mathbf{e}^{(y)}\right)\,,\ \mathbf{e}^{(-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}^{(x)}-i\mathbf{e}^{(y)}\right)\ .$$

Усреднение по времени
$\overline{\mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0e^{-i\omega t}\right\}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{B}_0e^{-i\omega t}\right\}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0^*)\,.$
Усреднение по поляризации $\langle e_\alpha e_\beta^*\rangle=\frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta}-n_\alpha n_\beta\right)\,.$

13 Излучение и рассеяние электромагнитных волн

Интенсивность мультипольного излучения

$$dI_d=\frac{1}{4\pi c^3}[\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n}]^2d\Omega,\quad d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

$$I_d=\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2\,;\quad I_m=\frac{2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2\,;\quad I_q=\frac{1}{180c^5}\dddot{Q}_{\alpha\beta}\dddot{Q}_{\alpha\beta}\,.$$

Сила радиационного трения

$$\mathbf{F}_{fr}=\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}\,.$$

«Классический радиус», сечение рассеяния э.м. волны на свободной частице (σ_T) и осцилляторе

$$r_0=\frac{e^2}{mc^2}\,;\qquad \sigma_T=\frac{8\pi}{3}r_0^2\,;\qquad \sigma=\sigma_T\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\,.$$