Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
Кафедра интеллектуальных систем

На правах рукописи

УДК 511.3

Шубин Андрей Витальевич

Простые числа в специальных последовательностях

01.01.09 Дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа выполнена на кафедре интеллектуальных систем Физтех-школы прикладной математики и информатики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: Королев Максим Александрович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела теории чисел федерального государственного бюджетного учреждения науки Математический институт им. В.А.Стеклова Российской академии наук, профессор РАН.

Ведущая организация: Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований» Российской академии наук.

Защита состоится «23» декабря 2020 г. в 13:00 на заседании диссертационного совета ФПМИ.01.01.09.010 по адресу: 141701, г. Долгопрудный Московской обл., Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (национального исследовательского университета):
https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php

Работа представлена «15» октября 2020 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п.3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

Актуальность темы исследования. Задачи, связанные с распределением простых чисел в натуральном ряду, являются одним из главных направлений исследований в аналитической теории чисел. Следующие вопросы являются классическими:

- как ведет себя с ростом X величина $\pi(X)$, равная количеству простых чисел p, $p \leqslant X$?
- как ведет себя с ростом X величина $\pi(X; q, a)$, равная количеству простых чисел p, $p \leqslant X$, принадлежащих арифметической прогрессии $p \equiv a \pmod q$, где $(q, a) = 1$?
- как распределены разности $p_{n+1} - p_n$ между соседними простыми числами?

Ответ на первый вопрос дает асимптотический закон распределения простых чисел:

$$\pi(X) := \sum_{p \leqslant X} 1 = \int_2^X \frac{du}{\log u} + R(X), \tag{1.1}$$

где остаточный член $R(X)$ при $X \to +\infty$ по порядку не превосходит величины $Xe^{-c\sqrt{\log X}}$ с некоторой фиксированной константой $c > 0$. Это закон был независимо установлен Ж. Адамаром и Ш. Ж. Валле-Пуссеном в 1896 году. Более точная оценка остаточного члена вида

$$R(X) \ll Xe^{-c(\log X)^{3/5}(\log\log X)^{-1/5}}$$

была получена И. М. Виноградовым [36] и Н.М.Коробовым [37] в 1958 году. Этот результат по существу не улучшен и на сегодняшний день. Из гипотезы Римана следует, что

$$R(X) \ll \sqrt{X}(\log X).$$

Здесь и далее запись $A \ll B$ означает $A = O(B)$.

Более сложными являются задачи, связанные с поведением функции $\pi(X; q, a)$. Поскольку количество прогрессий с разностью q и первым членом a с условием $(a, q) = 1$ совпадает при заданном q с $\varphi(q)$, то естественно ожидать, что

$$\pi(X; q, a) \sim \frac{\pi(X)}{\varphi(q)} \tag{1.2}$$

или, что то же, что разность

$$R(X; q, a) = \pi(X; q, a) - \frac{\pi(X)}{\varphi(q)}$$

мала по сравнению с правой частью (1.2). Последнее утверждение имеет место при фиксированном (не зависящем от X) значении q и даже при q, растущем вместе с X, но не быстрее произвольной фиксированной степени $\log X$. Соответствующее утверждение называется теоремой Зигеля–Вальфиша. Она утверждает, что для любой постоянной $A > 0$ найдется постоянная $c_0 = c_0(A) > 0$ такая, что при $X \to +\infty$ и $1 \leqslant q \leqslant (\log X)^A$ справедливо соотношение:

$$R(X; q, a) \ll Xe^{-c_0(A)\sqrt{\log X}}.$$

Отметим, что из расширенной гипотезы Римана при любых q и a следует оценка

$$R(X;q,a) \ll \sqrt{X}\log X. \tag{1.3}$$

Несложно видеть, что она приводит к содержательной формуле для $\pi(X;q,a)$ уже при всех q из промежутка $1 \leqslant q \ll \sqrt{X}(\log X)^{-2}$. Расширенная гипотеза Римана в настоящее время не доказана. Однако известно, что оценка, близкая по точности к (1.3), верна для «почти всех» q с условием $q \leqslant X^{1/2-\varepsilon}$. Эта теорема, называемая теоремой Э. Бомбьери–А. И. Виноградова ([16, 17]), утверждает следующее: каковы бы ни были постоянные A и ε, $A > 0$, $0 < \varepsilon < 1/2$, существует постоянная $c_1 = c_1(A;\varepsilon)$ такая, что при всех достаточно больших X и $Q = X^{\theta-\varepsilon}$, $\theta = 1/2$, имеет место неравенство:

$$\sum_{q\leqslant Q}\max_{(a,q)=1}\bigl|R(X;q,a)\bigr| = \sum_{q\leqslant Q}\max_{(a,q)=1}\Biggl|\sum_{\substack{p\leqslant X\\ p\equiv a \pmod q}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{p\leqslant X}1\Biggr| \leqslant \frac{c_1X}{(\log X)^A}. \tag{1.4}$$

В ряде случаев (например, при решении проблемы делителей Титчмарша) оценка (1.4) позволяет получать безусловные результаты, сопоставимые по точности со следствиями из расширенной гипотезы Римана.

Гораздо более трудными являются задачи, связанные с распределением расстояний $p_{n+1} - p_n$ между соседними простыми числами или, более общо, с поведением разностей $p_{n+m} - p_n$, где $m \geqslant 1$ — фиксированное целое число. Отметим, что к этому кругу задач относится гипотеза «простых близнецов», до настоящего времени не доказанная. Она утверждает, что множество пар соседних простых, удовлетворяющих условию $p_{n+1} - p_n = 2$, бесконечно.

Из асимптотического закона (1.1) следует, что разность $p_{n+1} - p_n$ «в среднем» ведет себя как $\log p_n$. Нерегулярность в распределении простых чисел выражается в существовании пар p_n, p_{n+1}, для которых эта разность будет существенно меньше (или, напротив, больше) «среднего» значения $\log p_n$. Так, в 1940 году П. Эрдеш установил существование постоянной c, $0 < c < 1$, такой, что неравенству

$$p_{n+1} - p_n \leqslant c\log p_n \tag{1.5}$$

удовлетворяет бесконечное множество номеров n. В течение нескольких последующих десятилетий значение постояннной c в (1.5) постепенно снижалось и было доведено в 1988 году Г. Майером до $c = 0.2484\ldots$ [22] (подробное изложение истории вопроса см. в статье [24]).

В 2005 году в этой области был совершен значительный прорыв. Трое авторов — Д. Гольдстон, Я. Пинтц и К.-Й. Йилдирим [24] доказали, что неравенство (1.5) имеет бесконечно много решений в соседних простых числах p_n, p_{n+1} даже при любом сколь угодно малом положительном c. Иными словами, справедливо равенство

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n} = 0.$$

Впоследствии те же авторы установили и гораздо более сильный результат [25]:

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{\sqrt{\log p_n}(\log\log p_n)^2} < +\infty.$$

Наконец, в 2011 году на конференции Journees Arithmetiques – 27 (г. Вильнюс) Я. Пинтц [28] анонсировал оценку

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{(\log p_n)^{3/7+\varepsilon}}<+\infty.$$

Второй прорыв в исследованиях малых расстояний между соседними простыми числами был совершен в 2013 году И. Жангом [29]. Он доказал существование бесконечного множества пар простых, удовлетворяющих неравенству

$$p_{n+1}-p_n\leqslant C,$$

где C — абсолютная постоянная. Из теоремы Жанга, в частности, следовало существование целого числа k, $1\leqslant k\leqslant C/2$, такого, что разность $p_{n+1}-p_n$ бесконечно много раз принимает значение $2k$:

$$p_{n+1}-p_n=2k.$$

Как уже отмечалось выше, проблема простых близнецов состоит в доказательстве этого факта для $k=1$. Первоначально для постоянной C было получено значение $7\cdot 10^7$.

Дальнейший прогресс в этой области был достигнут в работах Дж. Майнарда и Т. Тао ([30, 31]). Они разработали новый метод исследования простых чисел в коротких промежутках, существенно видоизменив метод решета А. Сельберга. Этот метод позволил в итоге снизить значение C до $C=246$ и, более того, позволил для любого фиксированного $m\geqslant 1$ установить бесконечность множества простых чисел p_n, удовлетворяющих условию

$$p_{n+m}-p_n\leqslant C_0m^3e^{4m},$$

где C_0 — некоторая абсолютная постоянная. В ходе упомянутых выше исследований была обнаружена тесная связь оценок типа (1.4) с задачей о малых расстояниях между соседними простыми числами. Как оказалось, особую роль здесь играет величина θ из определения $Q=X^{\theta-\varepsilon}$, которая называется «уровнем распределения» (последовательности простых чисел по арифметическим прогрессиям). Так, еще Д. Гольдстоном, Я. Пинтцом и К.-Й. Йилдиримом в [24] было установлено, что так называемая гипотеза Эллиота-Халберстама, согласно которой неравенство (1.4) остается справедливым для всех $\theta\leqslant 1$, влечет существование бесконечного множества простых p_n с условвием

$$p_{n+1}-p_n\leqslant 16.$$

В свете сказанного естественным образом возникает вопрос о существовании малых расстояний между соседними простыми числами, принадлежащими некоторому подмножеству $\mathbb{E}$ натурального ряда. В настоящей работе мы даем ответ на этот вопрос для случая, когда $\mathbb{E}$ представляет собой множество всех натуральных чисел n, подчиненных условию $\{n^\alpha\}<\sigma$. Здесь $\alpha>0$ — произвольное фиксированное нецелое число, σ — произвольная постоянная с условием $0<\sigma<1$.

Асимптотический закон распределения простых чисел из $\mathbb{E}$, отвечающего условию $0<\alpha<1$, был впервые установлен И. М. Виноградовым [1] в 1940 году. С помощью разработанного им метода оценок тригонометрических сумм он доказал асимптотическую формулу вида

$$\pi_{\mathbb{E}}(X) := \sum_{p\leqslant X, p\in\mathbb{E}} 1 = \sigma\pi(X) + O\bigl(X^{\vartheta(\alpha)+\varepsilon}\bigr), \tag{1.6}$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная, а

$$\vartheta(\alpha) = \max\Bigl(\frac{4+\alpha}{5}, 1-\frac{2}{15}\alpha\Bigr) = \begin{cases} 1-\frac{2}{15}\alpha, & \text{если } 0<\alpha\leqslant\frac{3}{5};\\ \dfrac{4+\alpha}{5}, & \text{если } \frac{3}{5}<\alpha<1.\end{cases}$$

Ему же принадлежит аналогичная асимптотическая формула для случая произвольного фиксированного $\alpha > 6$ с условием $||\alpha|| \geqslant 3^{-\alpha}$. При этом показатель $\vartheta(\alpha)$ в оценке остаточного члена $R(X)$ имеет вид

$$\vartheta(\alpha) = 1 - \bigl(34\cdot 10^6\alpha^2\bigr)^{-1}$$

(см. [8]). Это утверждение было впоследствии усилено Р. Бейкером и Г. Колесником [13], которые установили соответствующую асимптотику для всех нецелых $\alpha > 1$ с показателем

$$\vartheta(\alpha) = 1 - \bigl(15\cdot 10^3\alpha^2\bigr)^{-1}.$$

В дальнейшем для небольших α были найдены и более точные оценки остаточного члена (см., например, [14]). Оценка $R(X)$, равномерная по параметру $\alpha > 1$, была найдена в 2003 году М. Е. Чангой [15].

Простые числа p из множества $\mathbb{E}$ допускают следующую наглядную интерпретацию: это будут простые числа, содержащиеся в объединении промежутков вида $\bigl[k^{1/\alpha}; (k+\sigma)^{1/\alpha}\bigr)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Так, в случае $\alpha = \sigma = 1/2$ это будут промежутки вида $\bigl[k^2; (k+1/2)^2\bigr)$. Если $0 < \alpha < 1$, то длина такого промежутка растет с ростом k. Особенностью, отвечающей случаю $\alpha > 1$, является то, что длина промежутка стремится к нулю по мере увеличения k. В частности, некоторые из этих промежутков могут и вовсе не содержать целых чисел.

Альтернативный подход к решению подобной задачи, основанный на явной формуле для функции Чебышева и плотностных теоремах для нулей дзета-функции Римана, в 1945 году предложил Ю.В.Линник [2]. Используя этот подход, в 1979 году Р. М. Кауфман доказала бесконечность множества простых чисел, подчиненных условию $\{\sqrt{p}\} < p^{-c+\varepsilon}$ для любого

$$c < \frac{\sqrt{15}}{2(8+\sqrt{15})} = 0.16310\ldots$$

и сколь угодно малого фиксированного $\varepsilon > 0$ (что усилило полученный ранее Виноградовым [36] аналогичный результат для всех $c \leqslant 1/10$), и показала, что можно брать $c \leqslant 1/4$, если справедлива гипотеза Римана. Впоследствии А. Балог [4] и Г. Харман [5] независимо доказали бесконечность множества $\bigl\{p : \{\sqrt{p}\} < p^{-c+\varepsilon}\bigr\}$ для всех $c \leqslant 1/4$ безусловно. В 1986 году С.А.Гриценко [6] с помощью метода Линника уточнил остаточный член в формуле (1.6) для $1/2 \leqslant \alpha < 1$:

$$\vartheta(\alpha) = \begin{cases} 1-\dfrac{\alpha}{2} + (\sqrt{3\alpha}-1)^2, & \text{если } \frac{1}{2}\leqslant\alpha<\frac{3}{4};\\ \dfrac{1+\alpha}{2}, & \text{если } \frac{3}{4}\leqslant\alpha<1.\end{cases}$$

Им также было показано, что в случае $\alpha = 1/2$ показатель степени $\vartheta(\alpha)$ может быть снижен до $4/5$. В случае $0 < \alpha < 1/2$ наилучший результат, насколько известно, принадлежит К. Рен [7]:

$$\vartheta(\alpha) = \max\left(\frac{2+\alpha}{3}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\alpha}{2}, & \text{если } 0 < \alpha < \frac{2}{5}; \\ \dfrac{2+\alpha}{3}, & \text{если } \frac{2}{5} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

В задаче о малых расстояниях между соседними простыми числами из определенного выше множества $\mathbb{E}$ ключевую роль играет аналог теоремы Бомбьери–Виноградова (1.4) вида

$$\sum_{q \leqslant Q} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \leqslant X, p \in \mathbb{E} \\ p \equiv a \pmod q}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{p \leqslant X, p \in \mathbb{E}} 1 \right| \ll_{A,\varepsilon} \frac{X}{(\log X)^A}. \tag{1.7}$$

Как и выше, здесь A — сколь угодно большое фиксированное число, $Q = X^{\theta - \varepsilon}$. В отличие от случая $\mathbb{E} = \mathbb{N}$, все известные неравенства вида (1.7) установлены для уровня распределения θ, строго меньшего $1/2$.

Так, первый результат такого рода, отвечающий случаю $\alpha = 1/2$, был получен Д. И. Толевым [18] для $\theta = 1/4$. Позже С. А. Гриценко и Н. А. Зинченко [19] доказали (1.7) для произвольного α с условием $1/2 \leqslant \alpha < 1$ при $\theta = 1/3$. В каждой из этих работ авторы рассматривали лишь случай $\sigma = 1/2$, что объяснялось исключительно соображениями удобства изложения и не является принципиальным ограничением. Развитая Дж. Майнардом техника позволяет, имея неравенство (1.7) для произвольного θ, $0 < \theta < 1$, выводить верхние оценки вида

$$\liminf_{n \to +\infty} (p_{n+m} - p_n) \leqslant c(m; \theta; \alpha) \tag{1.8}$$

для произвольного фиксированного $m \geqslant 1$ (см., например, работы [32, 33, 34]). Здесь $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — последовательно занумерованные простые числа из множества $\mathbb{E}$. При этом постоянная в правой части неравенства (1.8) существенным образом зависит от уровня распределения θ: чем больше θ, тем меньше значение c и тем точнее получается оценка. В связи с этим особую актуальность приобретают доказательство аналога теоремы Бомбьери–Виноградова (1.4) для возможно большего уровня распределения θ и отыскание явного вида зависимости величины c в (1.8) от всех параметров: m, θ и α (для простоты изложения мы ограничиваемся случаем $\sigma = 1/2$). Решению этих задач и посвящена настоящая диссертационная работа.

Цель работы.

- Доказать аналог теоремы Бомбьери–Виноградова для простых чисел из множества $\mathbb{E} = \big\{n \in \mathbb{N} : \{n^\alpha\} < 1/2\big\}$ при любом нецелом $\alpha > 0$ и возможно более точной оценкой уровня распределения θ.

- Получить возможно более точную верхнюю оценку величин

$$\liminf_{n \to +\infty} (p_{n+1} - p_n) \qquad \text{и} \qquad \liminf_{n \to +\infty} (p_{n+m} - p_n)$$

для последовательных простых $p_1, p_2, p_3, \ldots$ из множества $\mathbb{E}$.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут применяться в задачах о распределении простых чисел в некоторых классах подмножеств, а также при оценивании некоторых тригонометрических сумм с простыми.

Положения, выносимые на защиту. Основными результатами диссертации являются следующие положения:

1. Установлен аналог теоремы Бомбьери-Виноградова для простых чисел q, удовлетворяющих ограничению $\{q^\alpha\} < 1/2$ при любом нецелом положительном $\alpha > 0$ с уровнем распределения $1/3$.

2. Установлен аналог теоремы Бомбьери-Виноградова для аналогичного множества при всех $\alpha < 1/9$ с уровнем распределения $2/5 - (3/5)\alpha$.

3. Получены верхние оценки величин

$$\liminf_{n\to+\infty}(q_{n+1} - q_n),$$
$$\liminf_{n\to+\infty}(q_{n+2} - q_n),$$
$$\liminf_{n\to+\infty}(q_{n+m} - q_n).$$

при любом фиксированном $m \geqslant 3$.

Степень достоверности. Все результаты диссертации строго доказаны математически. Основные результаты докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- Специализированный семинар по аналитической теории чисел, Монреаль (Канада), 2017;
- Конференция «The Maine/Québec Number Theory Conference», Бангор (США), 2019;
- Международная конференция «Number Theory Series in Los Angeles II», Лос-Анджелес (США), 2020;
- Семинар «Современные проблемы теории чисел», Москва, 2020.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

А. В. Шубин, «Ограниченные промежутки между простыми числами специального вида», *Докл. Акад. Наук*, **492** (2020), 63–66.

A. V. Shubin, «Fractional parts of non-integer powers of primes», *Math. Notes*, **108**, №3 (2020), 394–408.

А. В. Шубин, «О распределении простых чисел специального вида в арифметических прогрессиях», *Труды МФТИ*, **12**, №4 (48) (2020), 97–105.

Содержание работы. Дадим краткий обзор содержания диссертации по главам и приведем формулировки основных результатов.

Во **второй главе** работы приводится список условных обозначений и формулируются основные вспомогательные утверждения.

В **третьей главе** содержится вывод аналога теоремы Бомбьери–Виноградова из верхней оценки для тригонометрической суммы вида

$$\sum_{\substack{X\leqslant p<2X\\ p\equiv a \pmod q}} e\big(hp^{\alpha}\big), \tag{1.9}$$

где $e(x) := e^{2\pi i x}$. Для удобства изложения полученные результаты формулируются в виде двух отдельных теорем:

Теорема 1.1. *Пусть $\alpha > 0$ — фиксированное нецелое и пусть $\mathbb{E}$ — множество натуральных, удовлетворяющее ограничению $\{n^{\alpha}\} < 1/2$. Далее, пусть θ, ε, Q и A — некоторые фиксированные числа такие, что $0 < \varepsilon < \theta \leqslant 1/3$, $\varepsilon < \alpha/20$, $A > 0$. Тогда неравенство*

$$\sum_{q\leqslant Q}\max_{(a,q)=1}\Bigg|\sum_{\substack{X\leqslant p<2X\\ p\equiv a (mod\ q)\\ p\in\mathbb{E}}} 1-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{X\leqslant p<2X\\ p\in\mathbb{E}}} 1\Bigg|\leqslant \frac{cX}{(\log X)^{A}} \tag{1.10}$$

справедливо для любых $X \geqslant X_0(\alpha,\theta,\varepsilon,A)$ и $2 < Q \leqslant X^{\theta-\varepsilon}$ с постоянной $c > 0$, зависящей от $\alpha,\theta,\varepsilon$ и A.

С случае значений α близких к нулю справедлив более сильный результат:

Теорема 1.2. *Пусть $0 < \alpha < 1/9$, $0 < \theta \leqslant 2/5 - (3/5)\alpha$, множество $\mathbb{E}$ и числа ε, Q, A удовлетворяют тем же ограничениям, что и в Теореме 1.1. Тогда неравенство*

$$\sum_{q\leqslant Q}\max_{(a,q)=1}\Bigg|\sum_{\substack{X\leqslant p<2X\\ p\equiv a (mod\ q)\\ p\in\mathbb{E}}} 1-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{X\leqslant p<2X\\ p\in\mathbb{E}}} 1\Bigg|\leqslant \frac{cX}{(\log X)^{A}} \tag{1.11}$$

справедливо для любого $X \geqslant X_0(\alpha,\theta,\varepsilon,A)$ с постоянной $c > 0$, зависящей от $\alpha,\theta,\varepsilon$ и A.

Замечание 1.1. Аналогичные утверждения справедливы и для чисел n с условием $\{n^{\alpha}\} < \sigma$ при любом $0 < \sigma \leqslant 1$, но, как и в работах других авторов, мы ограничиваемся лишь случаем $\sigma = 1/2$.

Теоремы 1.1 и 1.2 выводятся из верхних оценок соответствующих сумм вида (1.9) по единой схеме. Это делается с помощью сглаживания характеристической функции интервала $\big[0;1/2\big)$ «стаканчиками» Виноградова.

Четвертая и **пятая главы** посвящены выводу необходимых оценкок для суммы (1.9). В случае Теоремы 1.1 такую оценку дает

Теорема 1.3. *Пусть $\alpha > 0$ — фиксированное нецелое число, θ, ε, C — фиксированные константы, удовлетворяющие неравенствам $0 < \varepsilon < \theta \leqslant 1/3, \varepsilon < \alpha/100, C > 1$, и пусть $1 \leqslant h \leqslant (\log X)^C$, $2 < Q \leqslant X^{\theta-\varepsilon}$. Тогда для суммы*

$$T = \sum_{q\leqslant Q} \max_{(a,q)=1} \Bigg| \sum_{\substack{X\leqslant p<2X \\ p\equiv a (mod\ q)}} e\big(hp^{\alpha}\big) \Bigg|$$

справедливо неравенство

$$T \ll X^{1-\varepsilon^3/(3\alpha^2)},$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит от α, θ, ε и C.

Замечание 1.2. В ходе доказательства установлено более точное неравенство, именно, для каждого фиксированного $q \leqslant Q$

$$\max_{(a,q)=1} \sum_{\substack{X\leqslant p<2X \\ p\equiv a \pmod q}} e\big(hp^{\alpha}\big) \ll \frac{X^{1-\delta-\varepsilon^3/(3\alpha^2)}}{q}$$

при любом $0 < \delta \leqslant \varepsilon^3/(50\alpha^2)$.

Вывод Теоремы 1.3 содержится в **четвертой главе**. Он состоит в сведении исходной суммы по простым к сумме по последовательным целым числам промежутка $[X;2X)$:

$$\sum_{\substack{X\leqslant n<2X \\ n\equiv a \pmod q}} \Lambda(n) e\big(hn^{\alpha}\big), \tag{1.12}$$

где $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, равная $\log p$ при $n = p^k$, и нулю в противном случае. Она разбивается далее на подсуммы вида

$$W = \sum_{M\leqslant m<2M} \alpha_m \sum_{\substack{N\leqslant n<2N \\ mn\equiv a (\mathrm{mod}\ q)}} \beta_n e\big(h(mn)^{\alpha}\big), \tag{1.13}$$

где $MN \approx X$, α_m, β_n — некоторые вещественные коэффициенты (вообще говоря, негладкие). Суммы (1.13) оцениваются сверху одним из двух способов в зависимости от величины M и N. В обоих случаях необходимые верхние оценки получаются применением теоремы ван дер Корпута об оценке тригонометрической суммы по k-й производной функции в экспоненте (см. [35, Гл. 1, Теорема 5] или [15, Гл. 2, Теорема 9]), либо её усиленным аналогом [21].

Для доказательства Теоремы 1.2 необходимую оценку дает

Теорема 1.4. *При α, θ, ε, A, удовлетворяющим ограничениям Теоремы 1.2, h и C, удовлетворяющим ограничениям Теоремы 1.3, для $X \geq X_0(\alpha, \theta, \varepsilon, A)$, $2 < Q \leq X^{\theta-\varepsilon}$ и суммы*

$$T = \sum_{q \leqslant Q} \max_{(a,q)=1} \Bigg| \sum_{\substack{X \leqslant p < 2X \\ p \equiv a (mod\ q)}} e\big(hp^{\alpha}\big) \Bigg|$$

справедлива оценка

$$T \ll X(\log X)^{-A},$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит от α, θ, ε, A и C.

Доказательство этой теоремы содержится в **пятой главе**. Оно основано на разбиении исходной суммы по простым на подсуммы уже трех типов: первые два подобны (1.13), тогда как сумма третьего типа имеет вид

$$W_{III} = \sum_{M \leqslant m < 2M} f_1(m) \sum_{N \leqslant n < 2N} f_2(n) \sum_{\substack{K \leqslant k < 2K \\ mnk \equiv a \pmod q}} f_3(k) e\big(h(mnk)^{\alpha}\big),$$

где $MNK \approx X$, f_1, f_2, f_3 — гладкие вещественные функции. Такое разбиение позволяет выиграть в допустимом размере разности прогрессии q за счет большей свободы в выборе параметров. Оценки получаются также методом ван дер Корпута (для сумм первого и второго типов), либо с помощью формулы суммирования Пуассона и оценок сумм Клоостермана.

Шестая глава работы посвящена выводу оценки вида (1.8) для малых промежутков между последовательными простыми числами из $\mathbb{E}$. Основным результатом является

Теорема 1.5. *Пусть $\mathbb{E}$ — множество из Теоремы 1.1, $0 < \alpha < 1$, $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ все простые из $\mathbb{E}$, занумерованные в возрастающем порядке. Тогда справедливы неравенства*

$$\liminf_{n \to +\infty} (q_{n+1} - q_n) \leqslant 2\ 176\ 652,$$
$$\liminf_{n \to +\infty} (q_{n+2} - q_n) \leqslant 3\ 130\ 607\ 572,$$
$$\liminf_{n \to +\infty} (q_{n+m} - q_n) \leqslant 9\ 700 m^3 e^{6m}$$

при любом $m \geqslant 3$.

Замечание 1.3. Все три оценки можно уточнить при $\alpha < 1/9$ используя Теорему 1.2 вместо Теоремы 1.1 в соответствующем месте доказательства, но для единообразия в работе мы ограничиваемся лишь применением более слабого результата.

Замечание 1.4. Аналогичный результат может быть получен и в случае нецелого $\alpha > 1$. Однако получение необходимых для этого асимптотических формул осложняется малой длиной промежутков из множества $\mathbb{E}$, поэтому в работе мы ограничиваемся лишь случаем $0 < \alpha < 1$.

Доказательство этой теоремы основано на методе решета Сельберга–Майнарда–Тао [30].

Благодарности. Хочу выразить глубокую благодарность своему научному руководителю профессору М. А. Королеву за всестороннюю поддержку, множество полезных советов, помощь в подготовке работы и терпение. Также хочу поблагодарить профессора М. Радзивилла за плодотворные обсуждения и советы. Кроме того, автор признателен директору Физтех-школы прикладной математики и информатики МФТИ профессору А. М. Райгородскому за поддержку и внимание.

Литература

[1] И. М. Виноградов, «Некоторое общее свойство распределения простых чисел», *Мат. Сб.*, **7**(49), №2 (1940), 365–372.

[2] Ю. В. Линник, «Об одной теореме теории простых чисел», *ДАН СССР*, **47**, №1 (1945), 7–8.

[3] Р. М. Кауфман, «О распределении $\{\sqrt{p}\}$», *Мат. Заметки*, **26**, №4 (1979), 497–504.

[4] A. Balog, «On the fractional parts of p^{θ}», *Arch. Math. (Basel)*, **40**, №5 (1983), 434–440.

[5] G. Harman, «On the distribution of $\sqrt{p}$ modulo one», *Mathematika*, **30** №1 (1983), 104–116.

[6] С. А. Гриценко, «Об одной задаче И. М. Виноградова», *Мат. Заметки*, **39**, №5 (1986), 625–640.

[7] X. M. Ren, «Vinogradov's exponential sum over primes», *Acta Arith.*, **124**, №3 (2006), 269–285.

[8] И. М. Виноградов, «Оценка одной тригонометрической суммы по простым числам», *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **23**, №2 (1959), 157–164.

[9] D. Leitmann, «On the uniform distribution of some sequences», *J. London Math. Soc. (2)*, **14**, №3 (1976), 430–432.

[10] I. Stux, «On the uniform distribution of prime powers», *Communic. Pure and Appl. Math.*, **27**, №6 (1974), 729–740.

[11] D. Wolke, «Zur Gleichverteilung einiger Zahlenfolgen», *Math. Z.*, **142**, №2 (1975), 181–184.

[12] Е. П. Голубева, О. М. Фоменко, «О распределении последовательности $\{bp^{3/2}\}$ по модулю 1», *Зап. Научн. Сем. ЛОМИ*, **91** (1979), 31–39.

[13] R. Baker, G. Kolesnik, «On the distribution of p^{α} modulo one», *J. Reine Angew. Math.*, **356** (1985), 174–193.

[14] X. Cao, W. Zhai, «On the distribution of p^{α} modulo one», *J. Theor. Nombres Bordeaux.*, **11**, №2 (1999), 407–423.

[15] М. Е. Чанга, «Простые числа в специальных промежутках и аддитивные задачи с такими числами», *Мат. Заметки*, **73** №3 (2003), 423–436.

[16] E. Bombieri, «Le grand crible dans la theorie analytique des nombres», *Astérisque* №18 (1987).

[17] А. И. Виноградов, «О плотностной гипотезе L-рядов Дирихле», *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **29**, №4 (1965), 903–934.

[18] D. I. Tolev «On a theorem of Bombieri-Vinogradov type for prime numbers from a thin set», *Acta Arith.*, **81**, №1 (1997), 57–68.

[19] С. А. Гриценко, Н. А. Зинченко, «Об оценке одной тригонометрической суммы по простым числам», *Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Серия: Математика. Физика.*, **30**, №5(148) (2013), 48–52.

[20] Н. Н. Мотькина, «О простых числах специального вида на коротких промежутках», *Мат. Заметки*, **79**, №6 (2006).

[21] D. R. Heath-Brown, «A new kth derivative estimate for exponential sums via Vinogradov's mean value», *Proc. Steklov Inst. Math.*, **296** (2017), 88–103; https://arxiv.org/abs/1601.04493

[22] H. Maier, «Small differences between prime numbers», *Michigan Math. J.*, **35** (1988), 323–344.

[23] D. Goldston, Y. Motohashi, J. Pintz, C. Yildirim, «Small gaps between primes exist», *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **82**, №4 (2006), 61–65; https://arxiv.org/abs/math/0505300

[24] D. Goldston, J. Pintz, C. Yildirim, «Primes in tuples. I», *Ann. Math. (2)*, **170**, №2 (2009), 819–862; https://arxiv.org/abs/math/0508185

[25] D. Goldston, J. Pintz, C. Yildirim, «Primes in tuples. II», *Acta Math.*, **204** №1 (2010), 1–47; https://arxiv.org/abs/0710.2728

[26] D. Goldston, J. Pintz, C. Yildirim, «Primes in tuples. III. On the difference $p_{n+\nu} - p_n$», *Funct. Approx. Comment. Math.*, **35** (2006), 79–89.

[27] D. Goldston, J. Pintz, C. Yildirim, «Primes in tuples IV: Density of small gaps between consecutive primes», *Acta Arith.*, **160**, №1 (2013), 37–53; https://arxiv.org/abs/1103.5886

[28] J. Pintz, «A new bound for small gaps between consecutive primes», in *27th Journees Arithmetiques. Programme and Abstract Book.* Vilnius University, 2011. p.51.

[29] Y. Zhang, «Bounded gaps between primes», *Ann. Math. (2)*, **179** №3 (2014), 1121–1174.

[30] J. Maynard, «Small gaps between primes», *Ann. Math. (2)*, **181**, №1 (2015), 383–413; https://arxiv.org/abs/1311.4600

[31] D. H. J. Polymath, «Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes», *Res. Math. Sci.*, **1** (2014), art. 12, 83 pp.; https://arxiv.org/abs/1407.4897

[32] J. Maynard, «Dense clusters of primes in subsets», *Compos. Math.*, **152** №7 (2016), 1517–1554; https://arxiv.org/abs/1412.5029

[33] J. Benatar, «The existence of small prime gaps in subsets of the integers», *Int. J. Number Theory*, **11**, №3 (2015), 801–833; https://arxiv.org/abs/1305.0348

[34] X. Shao, J. Teräväinen, «The Bombieri-Vinogradov theorem for nilsequences», preprint at https://arxiv.org/abs/2006.05954.

[35] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, (М.: Наука), 1983.

[36] И. М. Виноградов, «Новая оценка функции $\zeta(1+it)$», *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **22**, №2 (1958), 161–164.

[37] Н. М. Коробов, «Оценки сумм Вейля и распределение простых чисел», *Докл. АН СССР*, **123**, №1 (1958), 28–31.