

УДК 539.1

В. А. Астапенко, Е. В. Сахно

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Возбуждение перехода $0 \rightarrow 1$ в квантовом осцилляторе под действием электромагнитного импульса гауссовой формы

Рассмотрены особенности возбуждения гармонического квантового осциллятора без затухания электромагнитными импульсами с учетом нелинейных эффектов. Исследованы зависимости вероятности возбуждения перехода $0 \rightarrow 1$ от длительности и несущей частоты для различных амплитуд электрического поля импульса гауссовой формы. Показано, что при малых величинах электрического поля данные зависимости имеют один максимум. С ростом амплитуды поля этот максимум переходит в минимум и наблюдается появление двух новых максимумов.

Ключевые слова: квантовый осциллятор, вероятность квантовых переходов, импульс гауссовой формы.

V. A. Astapenko, E. V. Sakhno

Moscow Institute of Physics and Technology

Excitation of the $0 \rightarrow 1$ transition in a quantum oscillator under the action of an electromagnetic pulse of the Gaussian form

The paper is devoted to the study of the features of excitation of a harmonic quantum oscillator without damping by electromagnetic pulses, with account taken of nonlinear effects. The dependences of the excitation probability of the $0 \rightarrow 1$ transition on duration and carrier frequency are studied for various amplitudes of the electric field of a Gaussian pulse. It is shown that for small values of the electric field, the dependences have a single maximum. Increasing of the electric field amplitude leads to a transition of this maximum to a minimum with simultaneous appearance of two new maxima.

Key words: quantum oscillator, probability of quantum transitions, Gaussian pulse.

1. Введение

Взаимодействие коротких и ультракоротких лазерных импульсов с веществом в настоящее время привлекает большое внимание исследователей в связи с развитием технологий генерации импульсов с заданными параметрами: длительностью, несущей частотой и амплитудой [1, 2].

Возбуждение классического линейного осциллятора ультракороткими лазерными импульсами рассматривалось в работе [3]. Так, в цитируемой статье исследован фазовый контроль классического осциллятора под воздействием электромагнитного поля, а также получено аналитическое выражение для коэффициента фазовой модуляции гармонического осциллятора.

© Астапенко В. А., Сахно Е. В., 2019

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2019

В работе [4] рассматривается взаимодействие ультракоротких импульсов с двухуровневой системой в рамках формализма вектора Блоха. Численно проанализирована возможность фазового управления возбуждением двухуровневой системы под действием ультракороткого высокоинтенсивного лазерного импульса с управляемой фазой несущей по отношению к огибающей импульса.

Данная статья посвящена анализу закономерностей, возникающих при возбуждении квантового осциллятора на переходе $0 \rightarrow 1$ электромагнитным импульсом, с учетом нелинейных эффектов, возникающих при больших значениях амплитуды электрического поля в импульсе.

2. Вероятность перехода квантового осциллятора в поле электромагнитного импульса

В данной работе рассчитывается вероятность перехода W_{10} квантового осциллятора без затухания из стационарного состояния $|0\rangle$ в состояние $|1\rangle$. Для вычисления вероятности возбуждения квантового осциллятора W_{mn} используется следующее выражение, которое было получено в статье [5] (см. также [6, 7]):

$$W_{mn} = \frac{n_{<}!}{n_{>}!} \nu^k |L_{n_{<}}^k(\nu)|^2 e^{-\nu}, k = |n - m|, \quad (1)$$

где $n_{<}$ соответствует меньшей величине из m, n , а $n_{>}$ соответствует большей величине из m, n , $L_{n_{<}}^k(\nu)$ – обобщенные полиномы Лагерра, ν – безразмерный параметр, смысл которого будет определен ниже.

Рассмотрим возбуждение осциллятора импульсом гауссовой формы:

$$E(t) = E_0 \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) \cos(\omega t), \quad (2)$$

где τ – длительность импульса, E_0 – амплитуда поля, ω – несущая частота импульса.

Далее для исследования всех рассмотренных зависимостей амплитуда электрического поля E_0 измеряется в атомных единицах.

Приближенное выражение для фурье-образа для гауссовского импульса имеет вид

$$E(\omega') \simeq E_0 \tau \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega')^2 \tau^2}{2}\right), \quad (3)$$

где ω' – текущая частота.

Для параметра ν можно получить следующее выражение ([6]):

$$\nu = \frac{q^2}{2m\hbar\omega_0} |E(\omega_0, \tau)|^2, \quad (4)$$

где q – эффективный заряд осциллятора, m – масса осциллятора, ω_0 – собственная частота осциллятора, \hbar – постоянная Планка. Параметр ν пропорционален работе, совершенной импульсом поля над квантовым осциллятором без затухания.

Формула (1) для вероятности возбуждения квантового осциллятора на переходе $0 \rightarrow 1$ принимает следующий вид:

$$W_{10} = \nu e^{-\nu}. \quad (5)$$

Отличие от теории возмущения в этой формуле заключается в наличии экспоненциального множителя.

Запишем параметр ν с учетом того, что импульс имеет гауссовскую форму:

$$\nu = \frac{q^2}{2m\hbar\omega_0} |E(\omega_0, \tau)|^2 = \frac{\pi q^2 E_0^2}{4m\hbar\omega_0} \tau^2 \exp(-(\omega_0 - \omega)^2 \tau^2). \quad (6)$$

Введем безразмерные переменные:

$$\alpha = \omega_0 \tau, \quad (7)$$

$$\Delta = \frac{|\omega - \omega_0|}{\omega_0} \quad (8)$$

и коэффициент:

$$C_1 = \frac{\pi q^2}{4m\hbar\omega_0^3}. \quad (9)$$

Далее используется коэффициент C_1 , рассчитанный в атомных единицах для молекулы CO:

$$C_1 \approx 38.2. \quad (10)$$

Для расчета данного значения в формуле (9) использовались следующие параметры:

$$q = 0.78, \quad m = 12500, \quad \omega_0 = 0.01.$$

Тогда, с учетом этих обозначений, параметр ν можно записать в виде

$$\nu(\alpha, \Delta) = C_1 E_0^2 \alpha^2 e^{-\Delta^2 \alpha^2}. \quad (11)$$

Используя формулу (5), с учетом выражения (11), исследуем зависимость вероятности возбуждения W_{10} от несущей частоты и длительности импульса для различных величин амплитуды поля.

3. Зависимость вероятности квантового перехода $0 \rightarrow 1$ от несущей частоты

Проанализируем зависимость вероятности от частотной отстройки Δ , а также рассмотрим особенности, возникающие в данном случае. Для этого, подставив формулу (11) в формулу (5) и продифференцировав по Δ , находим первую производную, равенство нулю которой определяет положения экстремумов:

$$\frac{dW_{10}}{d\Delta} = e^{-C_1 E_0^2 \alpha^2 e^{-\Delta^2 \alpha^2}} (2\alpha^4 \Delta C_1 E_0^2 e^{-\Delta^2 \alpha^2}) (C_1 E_0^2 \alpha^2 e^{-\Delta^2 \alpha^2} - 1) = 0. \quad (12)$$

Из выражения (12) можно получить следующие экстремальные точки:

$$\Delta = 0, \quad (13)$$

$$|\Delta|_{ext} = \frac{\sqrt{\ln(C_1 E_0^2 \alpha^2)}}{\alpha}. \quad (14)$$

Проанализируем каждый из этих полученных экстремумов более детально. Для этого, продифференцировав выражение (12) по параметру Δ и подставив в полученное выражение найденные экстремумы (13), (14), соответственно получаем

$$\frac{d^2 W_{10}}{d\Delta^2} = -e^{-C_1 E_0^2 \alpha^2} (2C_1 E_0^2 \alpha^4 (1 - C_1 E_0^2 \alpha^2)), \quad (15)$$

$$\frac{d^2 W_{10}}{d\Delta^2} = -\frac{4\alpha^2}{e} \ln(C_1 E_0^2 \alpha^2). \quad (16)$$

Рассмотрим случай малых значений напряженности электрического поля E_0 . Из формулы (15) видно, что при $E_0 < \frac{1}{\sqrt{C_1 |\alpha|}}$, знак второй производной (15) имеет отрицательное значение и в данной экстремальной точке наблюдается максимум. При $E_0 < \frac{1}{\sqrt{C_1 |\alpha|}}$ экстремум (14) отсутствует.

Проанализируем теперь случай достаточно больших значений электрического поля, когда $E_0 > \frac{1}{\sqrt{C_1 |\alpha|}}$. Тогда из формулы (15) видно, что знак второй производной (15) становится

положительным и в данной экстремальной точке наблюдается минимум. В то время как из (16) следует, что $d^2W_{10}/d\Delta^2 < 0$ и наблюдается появление двух максимумов.

В случае, когда амплитуда электрического поля $E_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1|\alpha|}}$, то из (16) следует, что возникает единственный максимум, который совпадает с максимумом при $E_0 < \frac{1}{\sqrt{C_1|\alpha|}}$.

Итак, из (14) и (8) получаем следующие спектральные максимумы ($E_0 > \frac{1}{\sqrt{C_1|\alpha|}}$):

$$\omega_{\max} = \omega_0 \pm \frac{\omega_0}{\alpha} \sqrt{\ln(C_1 E_0^2 \alpha^2)}. \quad (17)$$

Зависимость вероятности W_{10} от параметра отстройки Δ при различных значениях величины амплитуды поля E_0 и фиксированном значении α представлена на рис. 1.

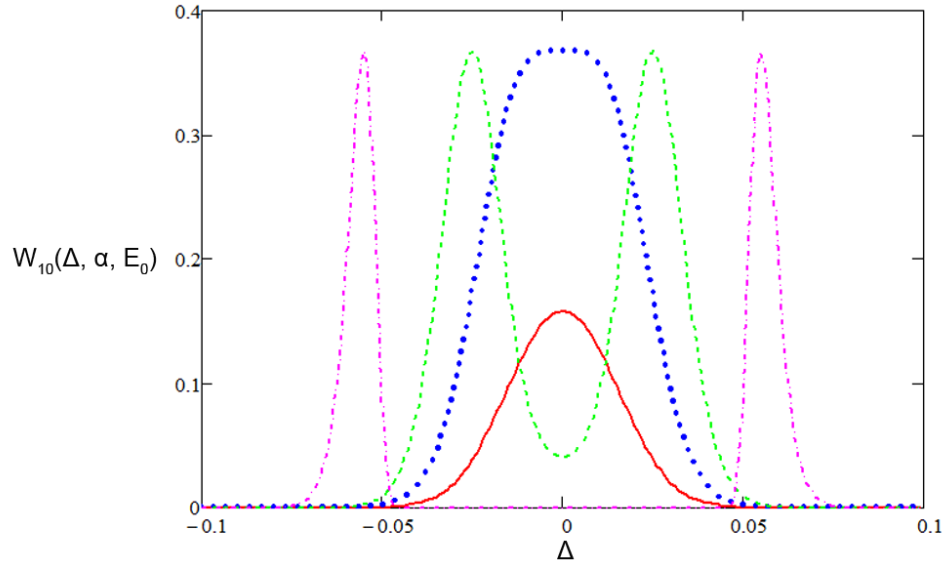


Рис. 1. Зависимость вероятности W_{10} от параметра отстройки Δ для фиксированного параметра $\alpha = 50$ для различных значений амплитуд электрического поля E_0 : красная сплошная кривая – $E_0 = 0.001$ а.е., синяя пунктирная кривая – $E_0 = 0.0023$ а.е., зеленая штриховая кривая – $E_0 = 0.005$ а.е., фиолетовая штрихпунктирная кривая – $E_0 = 0.1$ а.е.

Из рис. 1 следует, что при малых значениях поля ($E_0 = 0.001$ а.е.) возникает один максимум ($d^2W_{10}/d\Delta^2 < 0$). С ростом амплитуды E_0 рассматриваемый максимум сначала вырождается в столообразный максимум ($d^2W_{10}/d\Delta^2 = 0$), а затем переходит в минимум ($d^2W_{10}/d\Delta^2 > 0$), вследствие чего появляется два максимума. Причем при увеличении E_0 значение вероятности W_{10} в максимумах не изменяется, а частотный интервал между наблюдаемыми максимумами растет. Это вытекает из формулы (17) и соответствует случаю $C_1 E_0^2 \alpha^2 > 1$.

Значение вероятности в максимумах (17) можно найти, подставив формулу (14) в исходную формулу (6) для вероятности W_{10} :

$$W_{10}^{\max} = \frac{1}{e} \approx 0.368. \quad (18)$$

Таким образом, видим, что вероятность для экстремальных значений отстройки не зависит от амплитуды и длительности импульса.

Проанализируем теперь зависимость вероятности W_{10} от несущей частоты при фиксированном значении амплитуды электрического поля E_0 и различных параметрах α .

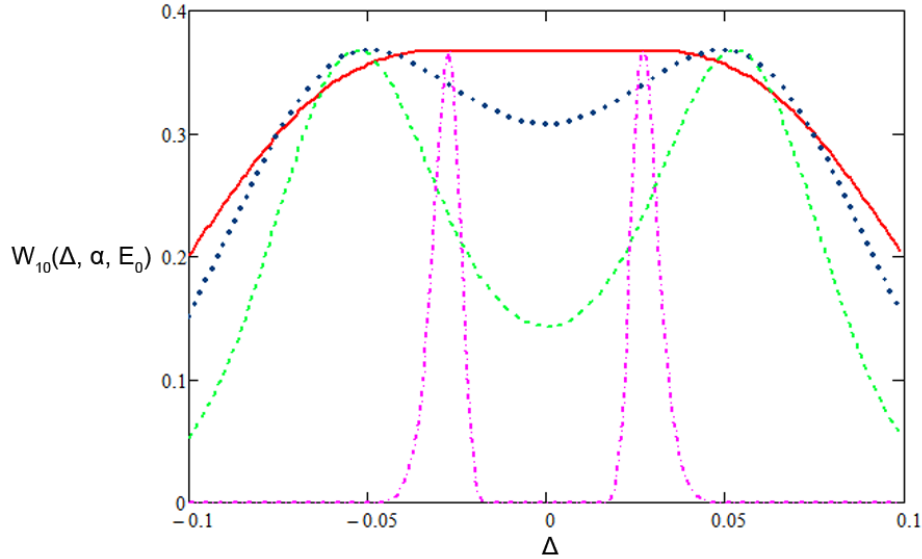


Рис. 2. Зависимость вероятности W_{10} от параметра частотной отстройки Δ для фиксированной величины амплитуды поля $E_0 = 0.01$ а.е. для различных значений параметра α : красная сплошная кривая – $\alpha = 12$, синяя пунктирная кривая – $\alpha = 15$, зеленая штриховая кривая – $\alpha = 20$, фиолетовая штрихпунктирная кривая – $\alpha = 70$

Опишем эволюцию зависимости $W_{10}(\Delta)$ с ростом параметра α , представленной на рис. 2. При достаточно малых α функция $W_{10}(\Delta)$ представляет собой кривую с единственным максимумом. Однако при увеличении параметра α (при $\alpha = 12$) максимум зависимости преобразуется в горизонтальный участок и с дальнейшим ростом α переходит в минимум, а зависимость $W_{10}(\Delta)$ разделяется на кривую с двумя максимумами (при $\alpha = 20$). С ростом параметра α частотный интервал между максимумами уменьшается, а значение вероятности в точках максимумов не изменяется и достигает значения $W_{10}^{\max} \approx 0.368$.

4. Зависимость вероятности квантового перехода $0 \rightarrow 1$ от длительности импульса

Исследуем зависимость вероятности от длительности импульса. Для этого, продифференцировав формулу (5) как сложную функцию по α , получим выражение для первой производной, равенство нулю которой определяет положение максимумов:

$$\frac{dW_{10}(\nu(\alpha))}{d\alpha} = \frac{dW_{10}}{d\nu} \frac{d\nu}{d\alpha} = (1 - \nu)e^{-\nu} 2\alpha C_1 E_0^2 e^{-\Delta^2 \alpha^2} (1 - \Delta^2 \alpha^2) = 0. \quad (19)$$

Из равенства

$$\frac{d\nu}{d\alpha} = 0 \quad (20)$$

вытекает выражение для экстремальной точки:

$$\alpha_{ext} = \frac{1}{|\Delta|}. \quad (21)$$

Исследуем найденный экстремум (21). Для этого продифференцируем выражение (19) по α и подставим в полученное выражение экстремальную точку (21):

$$\frac{d^2 W_{10}}{d\alpha^2} = -\frac{4C_1 E_0^2}{|\Delta|} \left(1 - \frac{C_1 E_0^2}{\Delta^2 e}\right) e^{-2 - \frac{C_1 E_0^2}{\Delta^2}}. \quad (22)$$

Из формулы (22) видно, что при малых значениях электрического поля, когда $E_0 < |\Delta| \sqrt{\frac{e}{C_1}}$, знак второй производной отрица-

тельный, и в данной точке наблюдается появление максимума. Если $E_0 > |\Delta| \sqrt{\frac{e}{C_1}}$, то возникает минимум.

Другие экстремальные точки можно найти из равенства

$$\frac{dW_{10}}{d\nu} = 0. \quad (23)$$

Из (23) следует

$$\nu_{ext} = 1 \rightarrow C_1 E_0^2 \alpha^2 = e \Delta^2 \alpha^2. \quad (24)$$

Из приближенного решения трансцендентного уравнения (24) относительно α можно найти аналитические выражения для максимумов:

$$\alpha_{\max 1} \approx \frac{1}{\sqrt{C_1 E_0}}, \quad (25)$$

$$\alpha_{\max 2} \approx \frac{1}{|\Delta|} \sqrt{2.8 \ln \frac{\sqrt{C_1 E_0}}{|\Delta|}}. \quad (26)$$

Анализ показывает, что полученные максимумы (25), (26) возникают только при достаточно больших значениях амплитуды электрического поля, когда $E_0 > |\Delta| \sqrt{\frac{e}{C_1}}$.

Зависимость вероятности W_{10} от параметра длительности импульса α при различных значениях напряженности поля E_0 и фиксированном параметре частотной отстройки Δ представлена на рис. 3.

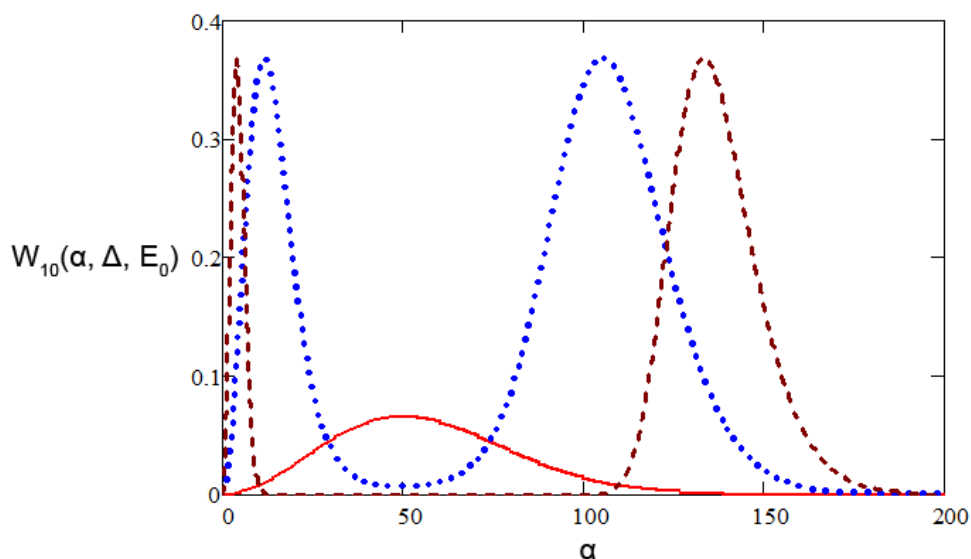


Рис. 3. Зависимость вероятности W_{10} от параметра длительности импульса α для фиксированного параметра $\Delta = 0.02$ для различных значений амплитуд электрического поля E_0 : красная сплошная кривая — $E_0 = 0.001$ а.е., синяя пунктирная кривая — $E_0 = 0.01$ а.е., коричневая штриховая кривая — $E_0 = 0.03$ а.е.

Из рис. 3 следует, что при малом значении амплитуды электрического поля ($E_0 = 0.001$ а.е.) наблюдается единственный максимум. Однако при увеличении напряженности поля данный максимум переходит в минимум и возникает два максимума. С ростом амплитуды поля E_0 , частотный интервал между возникшими максимумами растет, хотя значение вероятности W_{10} в них остается неизменным и достигает значения $W_{10}^{\max} \approx 0.368$.

Зависимость вероятности W_{10} от параметра длительности импульса α при фиксированной величине амплитуды поля $E_0 = 0.01$ а.е. и различных параметрах Δ представлена на рис. 4.

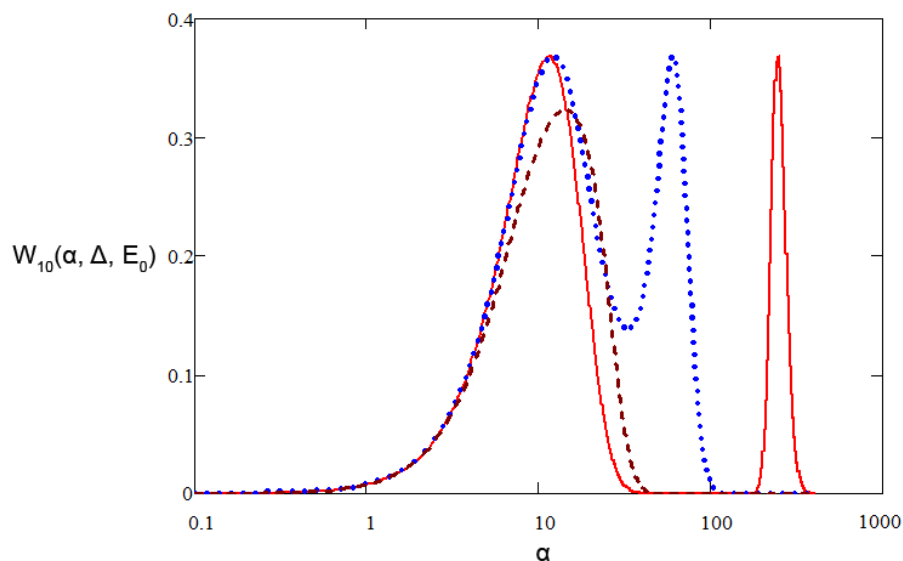


Рис. 4. Зависимость вероятности W_{10} от параметра длительности импульса α для фиксированного значения амплитуды поля $E_0 = 0.01$ а.е. для различных значений параметра Δ : красная сплошная кривая – $\Delta = 0.01$, синяя пунктирная кривая – $\Delta = 0.03$, коричневая штриховая кривая – $\Delta = 0.07$

Из рис. 4 видно, что при малых значениях Δ ($\Delta = 0.01$) появляется два максимума. С дальнейшим ростом Δ частотный интервал между возникшими максимумами уменьшается. При увеличении Δ до 0.07 возникает единственный максимум.

При одинаковых по модулю, но разных по знаку параметрах частотной отстройки, зависимости совпадают.

5. Заключение

В данной работе проведено численное и аналитическое рассмотрение возбуждения квантового осциллятора без затухания под действием лазерного импульса гауссовой формы вне рамок теории возмущения.

Проанализирована зависимость вероятности квантового перехода $0 \rightarrow 1$ от несущей частоты при фиксированном параметре длительности и различных значениях амплитуды электрического поля. Показано, что при малых величинах электрического поля E_0 данная зависимость представлена единственным максимумом, а при достаточно больших – двумя симметричными максимумами относительно собственной частоты осциллятора и глубоким минимумом. Установлено, что с ростом E_0 частотный интервал между максимумами растет, но значение вероятности в них не изменяется.

Рассмотрена зависимость вероятности квантового перехода $0 \rightarrow 1$ от несущей частоты при фиксированном значении амплитуды электрического поля и различных величинах длительности импульса. Показано, что с ростом длительности импульса частотный интервал между максимумами уменьшается.

Исследована зависимость вероятности квантового перехода $0 \rightarrow 1$ от длительности импульса при заданном параметре несущей частоты для различных величин амплитуд электрического поля. Показано, что при малых значениях E_0 наблюдается единственный максимум, который с ростом амплитуды поля переходит в минимум и возникает два новых несимметричных максимума.

Проанализирована зависимость вероятности квантового перехода $0 \rightarrow 1$ от длительности импульса при фиксированной амплитуде поля и различных значениях несущей частоты.

Установлено, что с ростом модуля отстройки частотный интервал между максимумами уменьшается. Показано, что при дальнейшем увеличении параметра Δ наблюдаемые максимумы перерождаются в единственный максимум.

Результаты данной статьи могут быть использованы для рассмотрения возбуждения молекул лазерными импульсами.

Работа выполнена в рамках Государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (задание №3.9890.2017/8.9).

Литература

1. Krausz F., Ivanov M. Attosecond physics // Rev. Mod. Phys. 2009. V. 81. P. 163.
2. Ciappina M.F., Perez-Hernandez J.A., Landsman A.S. Attosecond physics at the nanoscale // Rep. Prog. Phys. 2017. V. 80. P. 054401.
3. Arustamyan M.G., Astapenko V.A. Phase Control of Oscillator Excitation under the Action of Ultrashort Laser Pulses // Laser Physics. 2008. V. 18, N 9. P. 1031–1036.
4. Arustamyan M.G., Astapenko V.A. Phase Control of the Excitation of a Two-Level System with Short Laser Pulses // Laser Physics. 2008. V. 18, N 6. P. 768–773.
5. Schwinger J. The theory of quantized fields // Phys. Rev. 1953. V. 91, N 3. P. 728.
6. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. Москва : Наука, 1971.
7. Feynman R. P. Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction // Phys. Rev. 1950. V. 80, N 3. P. 440.

References

1. Krausz F., Ivanov M. Attosecond physics. Rev. Mod. Phys. 2009. V. 81. P. 163.
2. Ciappina M.F., Perez-Hernandez J.A., Landsman A.S. Attosecond physics at the nanoscale. Rep. Prog. Phys. 2017. V. 80. P. 054401.
3. Arustamyan M.G., Astapenko V.A. Phase Control of Oscillator Excitation under the Action of Ultrashort Laser Pulses. Laser Physics. 2008. V. 18, N 9. P. 1031–1036.
4. Arustamyan M.G., Astapenko V.A. Phase Control of the Excitation of a Two-Level System with Short Laser Pulses. Laser Physics. 2008. V. 18, N 6. P. 768–773.
5. Schwinger J. The theory of quantized fields. Phys. Rev. 1953. V. 91, N 3. P. 728.
6. Byaz' A.I., Zel'dovich B.Ya., Perelomov A.M. Scattering, reactions and decays in nonrelativistic quantum mechanics. Moscow : Nauka, 1971.
7. Feynman R. P. Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction. Phys. Rev. 1950. V. 80, N 3. P. 440.

Поступила в редакцию 27.02.2019