

УДК 512.547.212

*К. Н. Зиза¹, В. В. Штепин²*¹Донецкий национальный университет²Московский физико-технический институт (государственный университет)

Геометрические реализации неприводимых представлений групп вращений правильных многогранников в трехмерном пространстве

В работе найдены новые геометрические реализации неприводимых представлений групп вращений правильных многогранников в трехмерном пространстве. Предложена формула для проекционных операторов в каноническом разложении индуцированного представления, при помощи которой неприводимые представления реализуются в комплекснозначных функциях на вершинах, ребрах и гранях многогранников.

Ключевые слова: группа, вращение, правильный многогранник, однородное пространство, индуцированное представление, неприводимое представление, спектр представления, реализация представления, оператор, проектор, базис.

*K. N. Ziza¹, V. V. Shtepin²*¹Donetsk National University²Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Geometric realizations of irreducible representations of three-dimensional regular polyhedra rotations groups

The new geometric realizations of irreducible representations of regular polyhedra rotations groups in three dimensions are found in the work. The formula for projecting operators in canonical decomposition of the induced representation is suggested for constructing realizations of irreducible representations in complex-valued functions on vertexes, edges and verges of polyhedra.

Key words: group, rotation, regular polyhedra, homogeneous space, induced representation, irreducible representation, spectrum of representation, realization of representation, operator, projector, basis.

1. Введение

Настоящая работа посвящена построению явных реализаций неприводимых представлений групп вращений правильных многогранников в \mathbb{R}^3 (а именно, групп A_4 , S_4 и A_5) в функциях на однородных пространствах, связанных с многогранниками. Хотя правильные фигуры в \mathbb{R}^3 известны еще со времен Платона и Евклида, а неприводимые представления их групп вращений — со времен Фробениуса (конец XIX века) [1, с. 49-51], задача построения реализаций неприводимых представлений все еще является актуальной.

В настоящее время известно несколько способов построения неприводимых представлений симметрической и знакопеременной группы. Метод Вейля позволяет строить реализации в тензорах определенного типа симметрии, в методе Яманучи неприводимые представления группы S_n строятся на основе представлений группы S_{n-1} . Еще на заре теории линейных представлений было известно, что регулярное представление конечной группы содержит в своем спектральном разложении все ее неприводимые комплексные представления с кратностями, равными их размерностям. Поэтому всякое неприводимое представление группы вращений многогранника может быть реализовано в комплекснозначных

функциях на этой группе путем разложения кратного спектра ее регулярного представления. Хотя такая потенциальная возможность реализации представлений всегда имеется, ее практическое воплощение при увеличении порядка группы сталкивается с огромными вычислительными сложностями. Ниже мы предлагаем решение этой задачи более простым методом — путем реализации представлений в функциях на однородных пространствах.

Вероятно, начиная с классической работы Э. Картана [2, с. 217–252], берет свое начало направление, связанное с изучением однородных пространств и построением представлений в функциях на таких пространствах. Однородными пространствами, изучаемыми в данной работе, являются совокупности вершин, ребер и граней правильных многогранников в \mathbb{R}^3 . Именно они, на наш взгляд, наиболее естественны для групп вращений и выгодно отличаются от остальных своей наглядностью и геометричностью.

Поскольку октаэдр двойственен кубу, а икосаэдр — додекаэдру, то достаточно ограничиться рассмотрением только тройки правильных многогранников в \mathbb{R}^3 : тетраэдра, куба и додекаэдра. Для сопоставления вращений этих многогранников с подстановками у тетраэдра перенумеровываются вершины (его группа вращений изоморфна A_4), у куба — большие диагонали (группа вращений — S_4), у додекаэдра — отрезки, соединяющие противоположные вершины пары фиксированных противоположащих граней (группа вращений — A_5).

Пусть Φ — правильный многогранник с группой вращений G , а H_p, H_l, H_s — стационарная подгруппа какой-либо вершины, ребра или грани соответственно. Тогда однородное пространство вершин (ребер, граней) многогранника Φ можно понимать как множество левых смежных классов G по H_p (G по H_l , G по H_s). Неподвижной вершине соответствует смежный класс, совпадающий с подгруппой H_p . Поэтому такую вершину удобно считать первой и обозначать p_1 . Аналогичное соглашение будем принимать также для ребер и граней.

Рассмотрим представление T_p группы G , операторы которого действуют в пространстве комплекснозначных функций, определенных на однородном пространстве вершин многогранника Φ :

$$[T_p(g)f](p_i) = f(g^{-1}p_i). \quad (1)$$

Мы докажем, что это представление является индуцированным тривиальным представлением E подгруппы H_p , поэтому удобно обозначить его $\text{Ind}_{H_p}^G E$. Аналогично определяются представление $\text{Ind}_{H_l}^G E$ в случае однородного пространства ребер и $\text{Ind}_{H_s}^G E$ в случае однородного пространства граней многогранника Φ .

Пусть G — конечная группа, T_i — ее неприводимые комплексные представления с характерами χ_i ($i = 1, 2, \dots, r$, где r — число классов сопряженных элементов в G). Для произвольного конечномерного представления T группы G с характером χ_T будем считать построенным каноническое разложение

$$T = \bigoplus_{i=1}^r m_i T_i, \quad (2)$$

если вычислены кратности

$$m_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_T(g) \overline{\chi_i(g)} \quad (3)$$

и найдены проекторы [3, с. 29]

$$P_i = \frac{\dim T_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} T(g) \quad (4)$$

на подпространства примарных компонент $m_i T_i$. Отметим, что для индуцированного представления $\text{Ind}_H^G E$ формула для кратностей m_i в каноническом разложении принимает следующий вид:

$$m_i = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi_i(h), \quad (5)$$

что является очевидным следствием теоремы двойственности Фробениуса [3, с. 55]. Если в каноническом разложении встречается хотя бы одна кратность больше 1, то спектр представления считается кратным. В противном случае говорят о представлении простого спектра.

В разделе 2 мы выводим новую формулу для проекторов P_i на подпространства примарных компонент для индуцированных представлений типа $\text{Ind}_H^G E$. Пусть примарное представление $m_i T_i$ входит в спектральное разложение представления $\text{Ind}_H^G E$. Тогда базисом в пространстве примарного представления служат столбцы проектора P_i , соответствующие его наибольшему ненулевому симметричному минору. Действия операторов примарного и индуцированного представлений на векторах указанного базиса идентичны. Благодаря этому факту в работе найдены не только базисы в пространствах неприводимых представлений T_i , но и матрицы операторов $T_i(g_j)$ в этих базисах, где g_j — образующие группы G .

Для придания геометрического смысла функциям из пространств неприводимых представлений (то есть для получения словесных описаний этих пространств) необходимо изобразить на многогранниках значения базисных функций, полученных в качестве столбцов проекторов P_i . Это, в свою очередь, требует знания расположения на многограннике его i -й вершины, j -го ребра и k -й грани, первоначально записанных в виде левых смежных классов группы G по стационарным подгруппам H_p , H_l и H_s . Порядок вершин, ребер и граней на правильных многогранниках в \mathbb{R}^3 находится при помощи графов их групп вращений. При построении графа группы в ней выбирают образующие элементы, в качестве вершин графа берут элементы группы и пользуются следующим правилом: движение, начинающееся в некоторой вершине, вдоль отрезка в направлении, указанном стрелкой, должно соответствовать умножению справа на связанный с этим отрезком образующий элемент [4, с. 68].

Некоторые из полученных нами результатов были известны и ранее. Однородные пространства, связанные с кубом в \mathbb{R}^3 , рассматривали, например, Кириллов А. А. [5, с. 286–288] и Винберг Э. Б. [6, с. 70]. На наш взгляд, использование формулы для проекторов P_i на подпространства примарных компонент в $\text{Ind}_H^G E$ (см. теорему ниже) *значительно облегчает* нахождение геометрических описаний пространств неприводимых представлений. Отметим, что для этого нам вовсе нет необходимости знать сами операторы индуцированного представления. Единственное, что нам требуется — это знать проекторы R_i на подпространства примарных компонент в каноническом разложении регулярного представления. Но эти проекторы легко вычисляются по формуле (4):

$$R_i = \frac{\dim T_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} R(g). \quad (6)$$

В таблицах, приводимых ниже, помимо словесного «геометрического» описания неприводимых представлений, мы даем матрицы операторов представлений для образующих элементов группы G . Исключение составляют лишь случаи кратного спектра (таких всего четыре). Этим случаям мы планируем посвятить отдельную работу.

2. Формула для проекционных операторов на пространства примарных компонент индуцированного представления $\text{Ind}_H^G E$

Основной целью этого раздела является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть G — конечная группа, H — ее подгруппа, T_i — неприводимое комплексное представление группы G с характером χ_i . Пусть R — регулярное представление группы G и

$$R_i = \frac{\dim T_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} R(g)$$

— проекторы на пространства примарных компонент в каноническом разложении регулярного представления.

Тогда соответствующие проекторы для канонического разложения индуцированного представления $\text{Ind}_H^G E$ имеют вид

$$P_i = \frac{1}{|H|} M R_i M^t,$$

где $M = \|m_{ij}\|$ – матрица размера $(G : H) \times |G|$,

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & j \in x_i, \\ 0, & j \notin x_i, \end{cases}$$

где j – обозначение для j -го элемента группы G , x_i – обозначение для i -го левого смежного класса G по H .

Доказательство. Рассмотрим операторы

$$R_H(g) = \frac{1}{|H|} M R(g) M^t.$$

Покажем, что $R_H(g)$ – это операторы некоторого представления группы G , т.е. проверим условие гомоморфизма.

Лемма 1. Матрица $M^t M$ перестановочна с операторами $R(x)$.

Доказательство. Введем в группе G следующий порядок элементов: сначала перенумеруем элементы класса x_1 , затем – элементы класса x_2 и т.д. При такой нумерации элементов группы матрица M принимает наиболее простой вид:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $M^t M$ имеет блочно-диагональный вид, где на главной диагонали стоят квадратные матрицы I , все элементы которых равны 1.

Пусть $|H| = k$. Разобьем матрицу $R(x)$ на квадратные блоки τ_{ij} размера $k \times k$. Покажем, что при выбранной нумерации элементов группы каждый такой блок представляет собой либо нулевую матрицу, либо матрицу подстановки. Воспользуемся тем, что $R(x)$ – матрица подстановки и

$$R(x)_{(ij)} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j = i, \\ 0, & \text{если } x_j \neq i. \end{cases}$$

Пусть блок τ_{ij} ненулевой. Тогда существуют элементы $g_i h_l \in x_i$ и $g_j h_m \in x_j$ такие, что $x g_j h_m = g_i h_l$. Возьмем произвольный другой элемент $g_j h_{m'} \in x_j$, $h_{m'} \neq h_m$. Получим:

$$x g_j h_{m'} = g_i h_l h_m^{-1} g_j^{-1} g_j h_{m'} = g_i h_l h_m^{-1} h_{m'} = g_i h_{l'} \in x_i, \quad \text{где } h_{l'} \neq h_l.$$

Таким образом, τ_{ij} – матрица подстановки.

Поскольку

$$I \cdot \tau_{ij} = \tau_{ij} \cdot I = \begin{cases} I, & \text{если блок } \tau_{ij} \text{ ненулевой,} \\ 0, & \text{если блок } \tau_{ij} \text{ нулевой,} \end{cases}$$

то матрицы $M^t M$ и $R(x)$ коммутируют. Лемма 1 доказана.

Покажем, что соответствие $R_H : g \rightarrow R_H(g)$ является представлением группы G .

$$\begin{aligned} R_H(g_1) R_H(g_2) &= \frac{1}{|H|^2} M R(g_1) M^t M R(g_2) M^t = \{\text{лемма 1}\} = \\ &= \frac{1}{|H|^2} M M^t M R(g_1) R(g_2) M^t = \{M M^t = |H| E\} = \\ &= \frac{1}{|H|} M R(g_1 g_2) M^t = R_H(g_1 g_2). \end{aligned}$$

Докажем, что представление R_H есть не что иное, как индуцированное представление $\text{Ind}_H^G E$.

Лемма 2.

$$\text{tr}(MR(x)M^t) = \sum_{\substack{g \in G \\ g^{-1}xg \in H}} 1.$$

Доказательство. В процессе доказательства леммы 1 было установлено, что при соответствующей нумерации элементов группы матрица $R(x)$ разбивается на $(k \times k)$ -блоки τ_{ij} . Тогда умножение слева на M равносильно суммированию строк матрицы $R(x)$: сначала суммируются первые k строк, затем — последующие k строк и т.д. Аналогично, умножение справа на M^t приводит к такому же суммированию столбцов матрицы $MR(x)$. В итоге

$$\text{tr}(MR(x)M^t) = |H| \cdot \sum_{\substack{x_i \in G/H \\ xx_i = x_i}} 1,$$

т.е. след равен произведению порядка подгруппы на количество неподвижных смежных классов под действием x .

Пусть $x_i = g_i H$. Тогда справедливы эквивалентности

$$xx_i = x_i \Leftrightarrow xg_i H = g_i H \Leftrightarrow Hg_i^{-1}xg_i H \in H \Leftrightarrow (g_i H)^{-1}xg_i H \in H \Leftrightarrow x_i^{-1}xx_i \in H.$$

Поэтому

$$|H| \cdot \sum_{\substack{x_i \in G/H \\ xx_i = x_i}} 1 = |H| \cdot \sum_{\substack{x_i \in G/H \\ x_i^{-1}xx_i \in H}} 1.$$

Возьмем элемент $g \in G$ со свойством $g^{-1}xg \in H$ и рассмотрим элемент $g' = gh$, $h \in H$. Имеем

$$(g')^{-1}xg' = (gh)^{-1}xgh = h^{-1}g^{-1}xgh \in H.$$

Таким образом, наряду с g , все элементы левого смежного класса gH обладают тем же свойством. Значит,

$$|H| \cdot \sum_{\substack{x_i \in G/H \\ x_i^{-1}xx_i \in H}} 1 = \sum_{\substack{g \in G \\ g^{-1}xg \in H}} 1.$$

Лемма 2 доказана.

Покажем, что характеры представлений R_H и $\text{Ind}_H^G E$ равны.

$$\chi_{R_H}(x) = \text{tr}R_H(x) = \frac{1}{|H|} \text{tr}(MR(x)M^t) = \{\text{лемма 2}\} = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g \in G \\ g^{-1}xg \in H}} 1 = \chi_{\text{Ind}_H^G E}(x).$$

По критерию изоморфизма представлений в терминах характеров

$$R_H \cong \text{Ind}_H^G E.$$

Воспользовавшись универсальной формулой для проекторов (4), получим

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{\dim T_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} R_H(g) = \frac{\dim T_i}{|G| \cdot |H|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} MR(g)M^t = \\ &= \frac{1}{|H|} M \left(\frac{\dim T_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} R(g) \right) M^t = \frac{1}{|H|} MR_i M^t. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Если в группе G выбрать нумерацию элементов, отличную от используемой в доказательстве теоремы, то изменятся матрица M и проекторы R_i, P_i , но доказанная выше формула для проекторов останется справедливой. Покажем это.

Ассоциируем символ тильда с операцией изменения порядка элементов группы. Тогда

$$\tilde{P}_i = \frac{1}{|H|} \tilde{M} \tilde{R}_i \tilde{M}^t,$$

где $\tilde{R}_i = C^{-1} R_i C$, C – матрица перехода к новому базису. В итоге

$$\tilde{P}_i = \frac{1}{|H|} \tilde{M} C^{-1} R_i C \tilde{M}^t.$$

Достаточно ограничиться рассмотрением ситуации, когда только два элемента группы меняются местами. Возможны два случая. В первом случае меняются местами элементы из одного смежного класса (например, 1-й и 2-й). В этом случае

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = C.$$

Во втором случае меняются местами элементы, принадлежащие различным смежным классам (например, k -й и $(k + 1)$ -й, $k = |H|$). Тогда минор

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

находится в матрице C на пересечении строк и столбцов с номерами k и $k + 1$. В обоих случаях $C^{-1} = C$. Поэтому

$$\tilde{P}_i = \frac{1}{|H|} \tilde{M} C R_i C \tilde{M}^t.$$

Покажем, что в обоих случаях элементы матрицы \tilde{M} подчиняются тому же правилу, что и элементы матрицы M , т.е.

$$\tilde{m}_{ij} = \begin{cases} 1, & \tilde{j} \in \tilde{x}_i \\ 0, & \tilde{j} \notin \tilde{x}_i \end{cases}.$$

В первом случае имеем

$$m_{i1} = \begin{cases} 1, & 1 \in x_i \\ 0, & 1 \notin x_i \end{cases} = \begin{cases} 1, & \tilde{2} \in \tilde{x}_i \\ 0, & \tilde{2} \notin \tilde{x}_i \end{cases} = \tilde{m}_{i2}.$$

Аналогично, $m_{i2} = \tilde{m}_{i1}$.

Во втором случае: $m_{ik} = \tilde{m}_{i,k+1}$, если $i \notin \{1, 2\}$.

Ситуация, когда $i \in \{1, 2\}$, рассматривается аналогично.

Поскольку $\tilde{P}_i = S^{-1} P_i S$, S – аналог матрицы C , то

$$P_i = S \tilde{M} C R_i C \tilde{M}^t S^{-1}.$$

Положив $S \tilde{M} C = M$, мы приходим к уже доказанной формуле.

3. Реализации неприводимых представлений группы A_4 в функциях на тетраэдре

В данном разделе и в последующих двух общая схема локализации неприводимых представлений, описанная во введении, применяется к группе вращений конкретного многогранника. Процесс локализации начинается с нахождения характеров, которыми с точностью до изоморфизма определяются неприводимые представления.

Таблица 1. Характеры неприводимых комплексных представлений группы A_4 [6]

$$\left(w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

A_4	$1 = e$	$2 = (12)(34),$ $3 = (13)(24),$ $4 = (14)(23)$	$5 = (123),$ $6 = (134),$ $7 = (142),$ $8 = (243)$	$9 = (132),$ $10 = (143),$ $11 = (124),$ $12 = (234)$
T_1	1	1	1	1
T_2	1	1	w	\bar{w}
T_3	1	1	\bar{w}	w
T_4	3	-1	0	0

На рис. 1 указан порядок вершин, граней и ребер тетраэдра, найденный при помощи графа группы A_4 . Для построения графа мы выбираем образующие элементы $2 = (12)(34)$ (этот элемент порождает циклическую стационарную подгруппу ребер) и $8 = (243)$ (порождает циклическую стационарную подгруппу вершин или граней), в качестве вершин графа берем элементы группы и пользуемся правилом, что движение, начинающееся в некоторой вершине, вдоль отрезка в указанном стрелкой направлении соответствует умножению справа на связанный с этим отрезком образующий элемент.

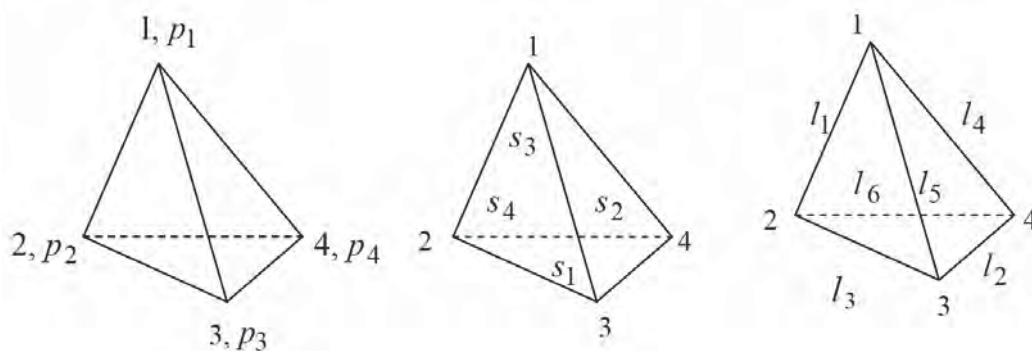


Рис. 1

Вершины, грани и ребра тетраэдра получаются в виде левых смежных классов по стационарным подгруппам:

$$\begin{aligned}
 p_1 = s_1 &= \{1, 8, 12\}, & l_1 &= \{1, 2\}, \\
 p_2 = s_2 &= \{2, 5, 11\}, & l_2 &= \{3, 4\}, \\
 p_3 = s_3 &= \{3, 6, 9\}, & l_3 &= \{5, 6\}, \\
 p_4 = s_4 &= \{4, 7, 10\}, & l_4 &= \{7, 8\}, \\
 & & l_5 &= \{9, 12\}, \\
 & & l_6 &= \{10, 11\}.
 \end{aligned}$$

Спектральные разложения индуцированных представлений найдены с помощью таблицы характеров и формулы (5). Доказанная в разделе 2 теорема позволяет построить проекторы на пространства примарных компонент в каждом из случаев.

Случай вершин (граней) тетраэдра: $\text{Ind}_{H_p}^{A_4} E = \text{Ind}_{H_s}^{A_4} E = T_1 \oplus T_4$,

$$P_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

Случай ребер тетраэдра: $\text{Ind}_{H_l}^{A_4} E = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4$,

$$P_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & w & w & \bar{w} & \bar{w} \\ 1 & 1 & w & w & \bar{w} & \bar{w} \\ \bar{w} & \bar{w} & 1 & 1 & w & w \\ \bar{w} & \bar{w} & 1 & 1 & w & w \\ w & w & \bar{w} & \bar{w} & 1 & 1 \\ w & w & \bar{w} & \bar{w} & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & w & w & \bar{w} & \bar{w} \\ 1 & 1 & w & w & \bar{w} & \bar{w} \\ \bar{w} & \bar{w} & 1 & 1 & w & w \\ \bar{w} & \bar{w} & 1 & 1 & w & w \\ w & w & \bar{w} & \bar{w} & 1 & 1 \\ w & w & \bar{w} & \bar{w} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Столбцы найденных проекторов, соответствующие их наибольшим ненулевым симметричным минорам, представляют собой искомые базисы в пространствах неприводимых представлений группы вращений тетраэдра. Эти базисы указаны в следующей таблице.

Таблица 2. Базисы в пространствах неприводимых представлений группы A_4

	Вершины (грani) тетраэдра				Ребра тетраэдра						
	T_1	T_4				T_1	T_2	T_3	T_4		
p_1, s_1	1	3	-1	-1	l_1	1	1	1	1	0	0
p_2, s_2	1	-1	3	-1	l_2	1	1	1	-1	0	0
p_3, s_3	1	-1	-1	3	l_3	1	\bar{w}	w	0	1	0
p_4, s_4	1	-1	-1	-1	l_4	1	\bar{w}	w	0	-1	0
					l_5	1	w	\bar{w}	0	0	1
					l_6	1	w	\bar{w}	0	0	-1

Геометрический смысл полученных базисных функций на однородных пространствах тетраэдра становится понятным, если воспользоваться рис. 1. В таблице 3 указаны также матрицы операторов неприводимых представлений для образующих элементов в построенных базисах. Одномерные представления совпадают со своими характерами, а для нахождения матриц трехмерного представления T_4 мы воспользовались тем, что оно содержится в спектральных разложениях представлений $\text{Ind}_{H_p}^{A_4} E$ и $\text{Ind}_{H_l}^{A_4} E$ с кратностью 1. Поэтому с учетом формулы (1) $\forall g \in G$ справедливы равенства

$$[T_4(g)f_i](p_j) = [\text{Ind}_{H_p}^{A_4} E(g)f_i](p_j) = f_i(g^{-1}p_j),$$

$$[T_4(g)\varphi_i](l_j) = [\text{Ind}_{H_l}^{A_4} E(g)\varphi_i](l_j) = \varphi_i(g^{-1}l_j),$$

где f_i — базисные функции в случае вершин тетраэдра, φ_i — базис в случае ребер.

Таблица 3. Описание неприводимых представлений группы A_4
($2 = (12)(34)$ и $8 = (243)$ – образующие элементы)

Неприводимые представления	Ребра тетраэдра	Вершины тетраэдра	Грани тетраэдра
T_1	функции-константы; $T_1(2) = T_1(8) = 1$		
T_2	четные функции с нулевой суммой значений; $T_2(2) = 1, T_2(8) = w$	<i>не реализуются</i>	
T_3	четные функции с нулевой суммой значений; $T_3(2) = 1, T_3(8) = \bar{w}$		
T_4	нечетные функции; $T_4(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$ $T_4(8) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$	функции с нулевой суммой значений; $T_4(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$ $T_4(8) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$	

Идентичность полученных локализаций неприводимых представлений для вершин и граней тетраэдра является проявлением его самодвойственности.

4. Реализации неприводимых представлений группы S_4 в функциях на кубе

В этом разделе представлены результаты аналогичного применения общей конструкции локализации неприводимых представлений для группы вращений куба.

Таблица 4. Характеры неприводимых комплексных представлений группы S_4 [6, с.141]

S_4	$1 = e$	$2 = (12)(34),$ $3 = (13)(24),$ $4 = (14)(23)$	$5 = (123),$ $6 = (134),$ $7 = (142),$ $8 = (243),$ $9 = (132),$ $10 = (143),$ $11 = (124),$ $12 = (234)$	$13 = (12),$ $14 = (34),$ $15 = (13),$ $16 = (24),$ $17 = (14),$ $18 = (23)$	$19 = (1324),$ $20 = (1423),$ $21 = (1234),$ $22 = (1432),$ $23 = (1243),$ $24 = (1342)$
T_1	1	1	1	1	1
T_2	1	1	1	-1	-1
T_3	2	2	-1	0	0
T_4	3	-1	0	1	-1
T_5	3	-1	0	-1	1

Порядок вершин, ребер и граней куба представлен на рис. 2.

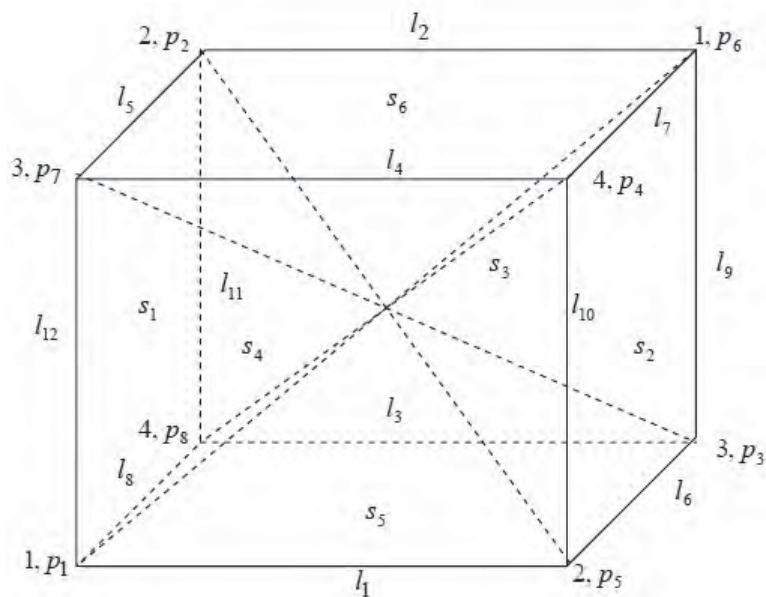


Рис. 2

Вершины, ребра и грани куба как левые смежные классы по стационарным подгруппам:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \{1, 8, 12\}, & l_1 &= \{1, 13\}, \\
 p_2 &= \{2, 5, 11\}, & l_2 &= \{2, 14\}, \\
 p_3 &= \{3, 6, 9\}, & l_3 &= \{3, 20\}, \\
 p_4 &= \{4, 7, 10\}, & l_4 &= \{4, 19\}, & s_1 &= \{1, 2, 19, 20\}, \\
 p_5 &= \{13, 21, 23\}, & l_5 &= \{5, 15\}, & s_2 &= \{3, 4, 13, 14\}, \\
 p_6 &= \{14, 16, 18\}, & l_6 &= \{6, 21\}, & s_3 &= \{5, 6, 16, 22\}, \\
 p_7 &= \{15, 19, 24\}, & l_7 &= \{7, 16\}, & s_4 &= \{7, 8, 15, 21\}, \\
 p_8 &= \{17, 20, 22\}, & l_8 &= \{8, 22\}, & s_5 &= \{9, 12, 17, 23\}, \\
 & & l_9 &= \{9, 18\}, & s_6 &= \{10, 11, 18, 24\}, \\
 & & l_{10} &= \{10, 23\}, \\
 & & l_{11} &= \{11, 17\}, \\
 & & l_{12} &= \{12, 24\},
 \end{aligned}$$

Спектральные разложения представлений, ассоциированных с однородными пространствами вершин, ребер и граней куба:

$$\text{случай вершин куба: } \text{Ind}_{H_p}^{S_4} E = T_1 \oplus T_2 \oplus T_4 \oplus T_5;$$

$$\text{случай ребер куба (здесь уже появляется кратность 2): } \text{Ind}_{H_l}^{S_4} E = T_1 \oplus T_3 \oplus 2T_4 \oplus T_5;$$

$$\text{случай граней куба: } \text{Ind}_{H_s}^{S_4} E = T_1 \oplus T_3 \oplus T_5.$$

Таблица 5. Базисы в пространствах неприводимых представлений группы S_4

Вершины куба								
	T_1	T_2	T_4			T_5		
p_1	1	1	3	-1	-1	3	-1	-1
p_2	1	1	-1	3	-1	-1	3	-1
p_3	1	1	-1	-1	3	-1	-1	3
p_4	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
p_5	1	-1	-1	3	-1	1	-3	1
p_6	1	-1	3	-1	-1	-3	1	1
p_7	1	-1	-1	-1	3	1	1	-3
p_8	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1

Ребра куба								
	T_1	T_3		T_4	T_5			
l_1	1	2	-1	возникает крайний спектр	2	0	-1	
l_2	1	2	-1		-2	0	1	
l_3	1	2	1		0	2	-1	
l_4	1	2	-1		0	-2	1	
l_5	1	-1	2		-1	-1	-2	
l_6	1	-1	2		1	1	-2	
l_7	1	-1	2		-1	-1	0	
l_8	1	-1	2		1	1	0	
l_9	1	-1	-1		-1	1	-1	
l_{10}	1	-1	-1		1	-1	-1	
l_{11}	1	-1	-1		-1	1	1	
l_{12}	1	-1	-1		1	-1	1	

Грани куба						
	T_1	T_3		T_5		
s_1	1	2	-1	1	0	0
s_2	1	2	-1	-1	0	0
s_3	1	-1	2	0	1	0
s_4	1	-1	2	0	-1	0
s_5	1	-1	2	0	-1	0
s_6	1	-1	-1	0	0	-1

Таблица 6. Описание неприводимых представлений группы S_4 ($8 = (243)$ и $13 = (12)$ — образующие элементы)

Неприводимые представления	Вершины куба	Ребра куба	Грани куба
1	2	3	4
T_1	функции-константы; $T_1(8) = T_1(13) = 1$		
T_2	нечетные функции с нулевой суммой значений на вершинах принадлежащих одной грани; $T_2(8) = 1, T_2(13) = w$	<i>не реализуется</i>	
T_3	<i>не реализуется</i>	четные функции с нулевой суммой значений;	четные функции с нулевой суммой значений;

1	2	3	4
		$T_3(8) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $T_3(13) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$T_3(8) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $T_3(13) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
T_4	четные функции с нулевой суммой значений и с суммой значений нуль на вершинах, принадлежащих одной грани; $T_4(8) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $T_4(13) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	возникает кратный спектр	<i>не реализуется</i>
T_5	нечетные функции; $T_5(8) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $T_5(13) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	нечетные функции; $T_5(8) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $T_5(13) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	нечетные функции; $T_5(8) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T_5(13) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Реализации неприводимых представлений группы A_5 в функциях на додекаэдре

В данном разделе приводятся результаты применения общей конструкции локализации неприводимых представлений для группы вращений додекаэдра. В этом случае наименьшие размеры проекторов составляют 12×12 , а спектры индуцированных представлений содержат кратности 2 и 3.

Таблица 7. Характеры неприводимых комплексных представлений группы A_5 [6, с.76]

$$\left(a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

1	2	3	4	5	6
A_5	$1 = e$	$2 = (123),$ $3 = (124),$ $4 = (125),$ $5 = (132),$ $6 = (134),$ $7 = (135),$ $8 = (142),$ $9 = (143),$ $10 = (145),$ $11 = (152),$ $12 = (153),$ $13 = (154),$ $14 = (234),$ $15 = (235),$ $16 = (243),$	$22 = (12345),$ $25 = (12453),$ $26 = (12534),$ $29 = (13254),$ $30 = (13425),$ $33 = (13542),$ $34 = (14235),$ $37 = (14352),$ $38 = (14523),$ $41 = (15243),$ $42 = (15324),$ $45 = (15432)$	$23 = (12354),$ $24 = (12435),$ $27 = (12543),$ $28 = (13245),$ $31 = (13452),$ $32 = (13524),$ $35 = (14253),$ $36 = (14325),$ $39 = (14532),$ $40 = (15234),$ $43 = (15342),$ $44 = (15423)$	$46 = (12)(34),$ $47 = (12)(35),$ $48 = (12)(45),$ $49 = (13)(24),$ $50 = (13)(25),$ $51 = (13)(45),$ $52 = (14)(23),$ $53 = (14)(25),$ $54 = (14)(35),$ $55 = (15)(23),$ $56 = (15)(24),$ $57 = (15)(34),$ $58 = (23)(45),$ $59 = (24)(35),$ $60 = (25)(34)$

1	2	3	4	5	6
		17 = (245), 18 = (253), 19 = (254), 20 = (345), 21 = (354)			
T_1	1	1	1	1	1
T_2	3	0	a	b	-1
T_3	3	0	b	a	-1
T_4	4	1	-1	-1	0
T_5	5	-1	0	0	1

Порядок вершин, ребер и граней додекаэдра представлен на рис. 3

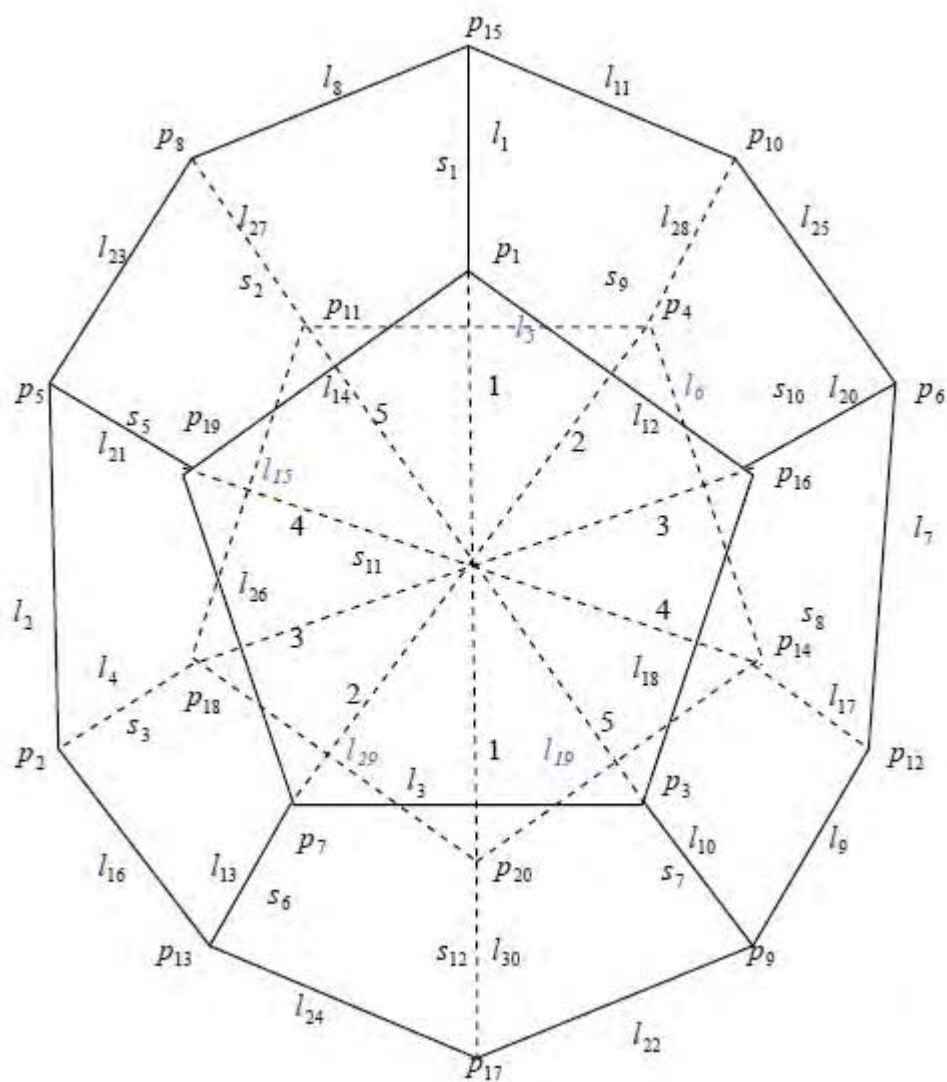


Рис. 3

Вершины, грани и ребра додекаэдра как левые смежные классы по стационарным подгруппам:

$$\begin{array}{lll}
 p_1 = \{1, 15, 18\}, & p_{11} = \{14, 19, 59\}, & s_1 = \{1, 22, 32, 35, 45\}, \\
 p_2 = \{2, 4, 47\}, & p_{12} = \{16, 21, 60\}, & s_2 = \{2, 13, 31, 36, 59\}, \\
 p_3 = \{3, 23, 26\}, & p_{13} = \{17, 20, 58\}, & s_3 = \{3, 18, 33, 38, 57\}, \\
 p_4 = \{5, 7, 50\}, & p_{14} = \{22, 25, 48\}, & s_4 = \{4, 21, 39, 40, 49\}, \\
 p_5 = \{6, 29, 32\}, & p_{15} = \{24, 27, 46\}, & s_5 = \{5, 20, 24, 44, 53\}, \\
 p_6 = \{8, 34, 35\}, & p_{16} = \{28, 31, 51\}, & s_6 = \{6, 19, 25, 37, 55\}, \\
 p_7 = \{9, 36, 37\}, & p_{17} = \{30, 33, 49\}, & s_7 = \{7, 8, 26, 41, 58\}, \\
 p_8 = \{10, 38, 39\}, & p_{18} = \{41, 45, 57\}, & s_8 = \{9, 15, 30, 42, 48\}, \\
 p_9 = \{11, 12, 55\}, & p_{19} = \{43, 44, 56\}, & s_9 = \{10, 16, 23, 43, 50\}, \\
 p_{10} = \{13, 40, 42\}, & p_{20} = \{52, 53, 54\}, & s_{10} = \{11, 14, 27, 28, 54\}, \\
 & & s_{11} = \{12, 17, 29, 34, 46\}, \\
 & & s_{12} = \{47, 51, 52, 56, 60\},
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 l_1 = \{1, 46\}, & l_{11} = \{13, 27\}, & l_{21} = \{29, 44\}, \\
 l_2 = \{2, 6\}, & l_{12} = \{15, 31\}, & l_{22} = \{30, 55\}, \\
 l_3 = \{3, 9\}, & l_{13} = \{17, 37\}, & l_{23} = \{32, 38\}, \\
 l_4 = \{4, 57\}, & l_{14} = \{18, 43\}, & l_{24} = \{33, 58\}, \\
 l_5 = \{5, 14\}, & l_{15} = \{19, 45\}, & l_{25} = \{35, 42\}, \\
 l_6 = \{7, 22\}, & l_{16} = \{20, 47\}, & l_{26} = \{36, 56\}, \\
 l_7 = \{8, 16\}, & l_{17} = \{21, 48\}, & l_{27} = \{39, 59\}, \\
 l_8 = \{10, 24\}, & l_{18} = \{23, 51\}, & l_{28} = \{40, 50\}, \\
 l_9 = \{11, 60\}, & l_{19} = \{25, 54\}, & l_{29} = \{41, 53\}, \\
 l_{10} = \{12, 26\}, & l_{20} = \{28, 34\}, & l_{30} = \{49, 52\}.
 \end{array}$$

Спектральные разложения индуцированных представлений:

$$\text{случай вершин додекаэдра: } \text{Ind}_{H_p}^{A_5} E = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus 2T_4 \oplus T_5,$$

$$\text{случай ребер додекаэдра: } \text{Ind}_{H_l}^{A_5} E = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus 2T_4 \oplus 3T_5,$$

$$\text{случай граней додекаэдра: } \text{Ind}_{H_s}^{A_5} E = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_5.$$

Таблица 8. Базисы в пространствах неприводимых представлений группы A_5 ($r = \sqrt{5}$)

Вершины додекаэдра											
	T_2			T_3			T_5				
p_1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1	-1	-1	-1
p_2	-1	3	-1	-1	3	-1	-1	3	-1	-1	1
p_3	1	-1	3	1	-1	3	-1	-1	3	1	-1
p_4	-1	-1	r	-1	-1	$-r$	-1	-1	1	3	-1
p_5	1	$-r$	-1	1	r	-1	-1	1	-1	-1	3
p_6	1	-3	1	1	-3	1	-1	3	-1	-1	1
p_7	1	1	$-r$	1	1	r	-1	-1	1	3	-1
p_8	1	1	r	1	1	$-r$	-1	-1	1	-1	1
p_9	-1	-1	$-r$	-1	-1	r	-1	-1	1	-1	1
p_{10}	1	r	-1	1	$-r$	-1	-1	1	-1	1	-1
p_{11}	-1	1	-3	-1	1	-3	-1	-1	3	1	-1
p_{12}	-1	r	1	-1	$-r$	1	-1	1	-1	-1	3
p_{13}	-1	$-r$	1	-1	r	1	-1	1	-1	1	-1
p_{14}	r	-1	-1	$-r$	-1	-1	1	-1	-1	1	1
p_{15}	$-r$	-1	-1	r	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1
p_{16}	$-r$	r	$-r$	r	$-r$	r	1	1	1	-1	-1
p_{17}	r	1	1	$-r$	1	1	1	-1	-1	-1	-1
p_{18}	r	$-r$	r	$-r$	r	$-r$	1	1	1	-1	-1
p_{19}	$-r$	1	1	r	1	1	1	-1	-1	1	1
p_{20}	-3	1	-1	-3	1	-1	3	-1	-1	-1	-1

Грани додекаэдра											
	T_2			T_3			T_5				
s_1	r	-1	1	r	1	-1	5	-1	-1	-1	-1
s_2	-1	r	-1	1	r	1	-1	5	-1	-1	-1
s_3	1	-1	r	-1	1	r	-1	-1	5	-1	-1
s_4	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	5	-1
s_5	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	5
s_6	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1
s_7	1	$-r$	1	-1	$-r$	-1	-1	5	-1	-1	-1
s_8	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	5
s_9	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
s_{10}	-1	1	$-r$	1	-1	$-r$	-1	-1	5	-1	-1
s_{11}	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	5	-1
s_{12}	$-r$	1	-1	$-r$	-1	1	5	-1	-1	-1	-1

Ребра додекаэдра											
T_2											
l_1	2	0	0	l_{11}	b	a	-1	l_{21}	1	b	$-a$
l_2	0	2	0	l_{12}	b	a	1	l_{22}	$-b$	a	1
l_3	0	0	2	l_{13}	a	1	b	l_{23}	1	b	a
l_4	-1	b	a	l_{14}	b	$-a$	1	l_{24}	$-b$	$-a$	1
l_5	0	0	-2	l_{15}	a	1	$-b$	l_{25}	1	$-b$	a
l_6	a	-1	$-b$	l_{16}	-1	b	$-a$	l_{26}	$-a$	1	b
l_7	0	-2	0	l_{17}	-1	$-b$	a	l_{27}	$-a$	1	$-b$
l_8	b	$-a$	-1	l_{18}	$-a$	-1	b	l_{28}	$-a$	-1	$-b$
l_9	-1	$-b$	$-a$	l_{19}	$-b$	a	-1	l_{29}	$-b$	$-a$	-1
l_{10}	a	-1	b	l_{20}	1	$-b$	$-a$	l_{30}	-2	0	0
T_3											
l_1	2	0	0	l_{11}	a	b	-1	l_{21}	1	a	$-b$
l_2	0	2	0	l_{12}	a	b	1	l_{22}	$-a$	b	1
l_3	0	0	2	l_{13}	b	1	a	l_{23}	1	a	b
l_4	-1	a	b	l_{14}	a	$-b$	1	l_{24}	$-a$	$-b$	1
l_5	0	0	-2	l_{15}	b	1	$-a$	l_{25}	1	$-a$	b
l_6	b	-1	$-a$	l_{16}	-1	a	$-b$	l_{26}	$-b$	1	a
l_7	0	-2	0	l_{17}	-1	$-a$	b	l_{27}	$-b$	1	$-a$
l_8	a	$-b$	-1	l_{18}	$-b$	-1	a	l_{28}	$-b$	-1	$-a$
l_9	-1	$-a$	$-b$	l_{19}	$-a$	b	-1	l_{29}	$-a$	$-b$	-1
l_{10}	b	-1	a	l_{20}	1	$-a$	$-b$	l_{30}	-2	0	0

Таблица 9. Описание неприводимых представлений группы A_5 ($22 = (12345)$ и $46 = (12)(34)$ — образующие элементы)

Неприводимые представления	Вершины додекаэдра	Грани додекаэдра	Ребра додекаэдра
1	2	3	4
T_1	функции-константы; $T_1(22) = T_1(46) = 1$		
T_2	нечетные функции: $T_2(22) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ b & 1 & a \\ -a & -1 & -b \end{pmatrix},$ $T_2(46) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -b & 0 \\ a & -2 & 0 \\ -b & -a & \sqrt{5} \end{pmatrix},$	нечетные функции: $T_2(22) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -b \end{pmatrix},$ $T_2(46) = \begin{pmatrix} -b & -1 & 0 \\ b & b & 0 \\ -1 & -b & -1 \end{pmatrix},$	нечетные функции: $T_2(22) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & 1 & -b \\ -1 & -b & a \\ -b & -a & 1 \end{pmatrix},$ $T_2(46) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$
T_3	нечетные функции: $T_3(22) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ a & 1 & b \\ -b & -1 & -a \end{pmatrix},$ $T_3(46) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -a & 0 \\ b & -2 & 0 \\ -a & -b & -\sqrt{5} \end{pmatrix},$	нечетные функции: $T_3(22) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -a \end{pmatrix},$ $T_3(46) = \begin{pmatrix} -a & -1 & 0 \\ a & a & 0 \\ -1 & -a & -1 \end{pmatrix},$	нечетные функции: $T_3(22) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b & 1 & -a \\ -1 & -a & b \\ -a & -b & 1 \end{pmatrix},$ $T_3(46) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$
T_4	возникает кратный спектр	<i>не реализуется</i>	возникает кратный спектр
T_5	четные функции с нулевой суммой значений:	четные функции с нулевой суммой значений:	возникает кратный спектр

1	2	3	4
	$T_5(22) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$	$T_5(22) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$	
	$T_5(46) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$	$T_5(46) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$	

Поскольку индуцированные представления $\text{Ind}_{H_p}^{A_5}$ и $\text{Ind}_{H_l}^{A_5} E$ содержат кратные точки, интерес представляет нахождение несложного алгоритма их разделения в случае представлений типа $\text{Ind}_H^G E$, а также обобщение полученных результатов на правильные многогранники в \mathbb{R}^4 и на индуцированные представления групп Ли. В трехмерном случае все стационарные подгруппы циклические, и канонические разложения возникающих индуцированных представлений содержат кратности. В четырехмерном случае аналогичным методом мы исследовали представления групп вращений симплекса и куба, ассоциированные с однородными пространствами k -граней ($k = 0, 1, 2, 3$). Специфика \mathbb{R}^4 такова, что стационарные подгруппы здесь неабелевы, и проблема разделения изоморфных компонент не возникла. Кроме того, вычисления показали, что в случае \mathbb{R}^4 невозможно локализовать все неприводимые представления групп вращений симплекса и куба, разлагая представления, связанные только с однородными пространствами k -граней.

Литература

1. Фробениус Ф.Г. Теория характеров и представлений групп. М.: КомКнига, 2005.
2. Cartan É. Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos. Rend. Circ. Mat., Palermo, 1929.
3. Серр Ж.-П. Линейные представления конечных групп. М.: Мир, 1970.
4. Гроссман И., Магнус В. Группы и их графы. М.: Мир, 1971.
5. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978.
6. Винберг Э.Б. Линейные представления групп. М.: Наука, 1985.

References

1. Frobenius F.G. Theory of group characters and representations. Moscow: KomKniga, 2005. (in Russian).
2. Cartan E. On the determination of complete orthogonal system in a close symmetric Riemann space. Rend. Circ. Mat., Palermo, 1929.
3. Serre J.-P. Linear representations of finite groups. Grad. Texts in Math., 42. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1977.
4. Grossman I., Magnus V. Groups and their graphs. Moscow: Mir, 1971. (in Russian).
5. Kirillov A.A. Elements of the theory of representations. Grundlehren der math. Wissenschaften, 220. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1976.
6. Vinberg E.B. Linear group representations. Moscow: Nauka, 1985. (in Russian).

Поступила в редакцию 20.09.2016