

УДК 532.542.86.(088.8)

Б. И. Басок, В. В. Гоцуленко

Институт технической теплофизики НАН Украины

Автоколебания газа, вызванные теплотой сгорания топлива или конвективным теплоподводом

Получена математическая модель нестационарных движений реального газа при локальном подводе к нему теплоты вдоль некоторой поверхности. В уравнениях движения для рассмотренной задачи конкретизирована обобщенная функция (тензор диссипации тепловой энергии) ассоциированная с поверхностью теплоподвода и характеризующая наличие отрицательного теплового сопротивления. Получено общее уравнение на компоненты данного тензора. Также рассмотрено его применение для определения продольных термоакустических автоколебаний в трубе Рийке.

Ключевые слова: тензор диссипации тепловой энергии, «отрицательное» тепловое сопротивление, термоакустические автоколебания, труба Рийке.

B. I. Basok, V. V. Gotsulenko

Institute of Engineering Thermophysics of National Academy of Sciences of Ukraine

Selfoscillations of gas caused by combustion heat or convective heat supply

The mathematical model of unsteady motions of a real gas when approaching the local heat over the surface is used. Equations of motion are concretized for the considered distribution problem (heart dissipation tensor) associated with the heat surface and characterized by a negative thermal resistance. The general equation for the components of this tensor is used. Also, its application to determine thermosacoustic longitudinal oscillations in Rijke's tube is discussed.

Key words: tensor heat dissipation, «negative» thermal resistance, thermoacoustic selfoscillation, Rijke's tube.

1. Введение

В распределенных системах гидродинамического типа ламинарно-турбулентный переход, в частности возбуждение автоколебаний, исследуется с ростом числа Рейнольдса, как правило, обусловленного увеличением средней скорости потока. В данных исследованиях одним из основных инструментов является привлечение различных бифуркационных теорем, например теоремы Андронова–Хопфа о бифуркации рождения цикла.

Отметим, что рост числа Рейнольдса может быть обусловлен также и падением вязкости, что имеет место при определенных движениях многофазных сред, структурированных и стратифицированных жидкостей, а также при подводе теплоты к жидкости или теплоотводе от нее. В жидкостях с сильной зависимостью вязкости от температуры при достаточных градиентах давления возникает явление саморазогрева, также приводящее к падению вязкости. Дестабилизирующая роль вязкости является следствием закона запаздывания в передаче действия в вязкой среде, а это запаздывание может изменить знак эффективного трения, т.е. вызвать неустойчивость. В [1] рассматривается образование отрицательного сопротивления и автоколебаний в потоке жидкости с экспоненциальной зависимостью ее вязкости от температуры, причиной которых является ее саморазогрев. В монографии [2], авторы которой провели значительное число экспериментальных исследований феномена Рийке, утверждается, что классическая модель волновых процессов не может объяснить

причины самовозбуждения автоколебаний. В [3] был обоснован механизм отрицательного сопротивления на зависимости гидравлических потерь по длине трубы Рийке при постоянном тепловом потоке. Применение этого механизма позволило определить теоретически закономерности феномена Рийке [4]. Теоретическое описание феномена Рийке, в основу которого положены механизмы отрицательных сопротивлений, качественно и количественно подтверждаются результатами экспериментов [2].

По-видимому, впервые в монографии (см. с. 180 [5]) было установлено, что процесс подвода тепла вносит в поток газа особый вид сопротивления: при подогреве движущегося газа полное давление падает. Обнаруженное сопротивление Г. Н. Абрамовичем было названо «тепловым» и в [5] приведено его термодинамическое истолкование. В монографии [6] Б. В. Раушенбах получил выражение для теплового сопротивления при нагреве идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости и привел его обоснование как механизма возбуждения вибрационного горения. С помощью полученного в [6] соотношения для теплового сопротивления Б. В. Раушенбах пытался представить качественную картину возбуждения акустических колебаний теплоподводом за счет кинетической энергии течения. Было высказано, что если теплоподвод будет колебаться около нуля, то на поток будет попеременно действовать то положительное, то отрицательное сопротивление. Если при этом увеличению скорости течения будет соответствовать уменьшение сопротивления, то система будет раскачиваться (см. с. 81 [6]).

Согласно общим представлениям механики [7] эффект «отрицательного» сопротивления или «отрицательного» трения состоит в реализации условий, когда с увеличением скорости движения механической системы ее энергия не уменьшается (например за счет сил вязкого трения, пропорциональных скорости), а, наоборот, увеличивается. Физика такого явления в различных системах своя. Однако благодаря данному явлению установившееся движение (или положение равновесия механической системы) становится неустойчивым и в системе возможно самовозбуждение автоколебаний.

Таким образом, «отрицательное» тепловое сопротивление – это формальный термин, означающий, что при выполнении определенных условий местное гидравлическое сопротивление зоны теплоподвода не возрастает с увеличением скорости движения теплоносителя, а, наоборот, уменьшается, что приводит к возникновению гидродинамической неустойчивости и возбуждению автоколебаний.

В [8] получено выражение для теплового сопротивления, возникающего при политропном подводе теплоты к одномерному движущемуся совершенному невязкому газу.

В данной работе, исходя из фундаментальных законов сохранения механики сплошной среды и базовых уравнений термодинамики, рассмотрена задача получения общего уравнения для тензора диссипации тепловой энергии, возникающего при локальном теплоподводе к трехмерному потоку газа. В частном случае одномерного потока данный тензор вырождается в рассмотренное ранее тепловое сопротивление.

2. Вывод уравнений движения при теплоподводе

Рассмотрим движение вязкой теплопроводящей сжимаемой жидкости (рис. 1) с локальным теплоподводом, распределенным вдоль некоторой поверхности Σ . Выделим в потоке движущейся среды в начальный момент времени t_0 малую область Ω_{t_0} , составленную из частиц среды. Тогда в момент времени $t > t_0$ данная область (рис. 1), деформируясь, перейдет в некоторую область Ω_t . Непосредственным вычислением можно проверить справедливость следующего интегрального равенства:

$$\iiint_{\Omega_t} a(\vec{r}, t) d\omega = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial a}{\partial t} d\omega + \iint_{\partial\Omega_t} a(\vec{r}, t) (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds, \quad (1)$$

где $a(\vec{r}, t)$ – произвольная достаточно гладкая скалярная, векторная или в общем случае тензорная величина, $d\omega = dx_1 dx_2 dx_3$ – элемент объема физического пространства, $\vec{V}(\vec{r}, t)$ –

скорость движения жидкости в момент времени t в точке, определяемой радиус-вектором \vec{r} , \vec{n} – внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega_t$, а ds – элемент ее площади.

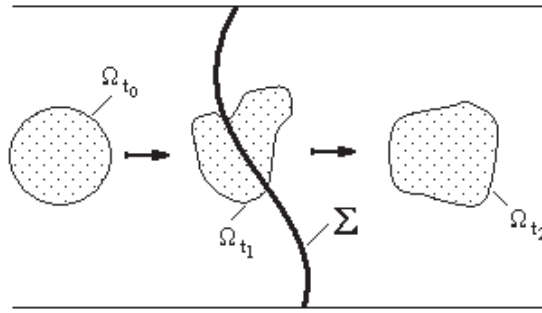


Рис. 1. Схематическое выделение в потоке среды «жидкого объема» Ω_t

Полагая в тождестве (1) $a = \rho(\vec{r}, t)$ – плотность среды и используя формулу Гаусса–Остроградского:

$$\iint_{\partial\Omega_t} \rho(\vec{r}, t) (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds = \iiint_{\Omega_t} \text{div}(\rho\vec{V}) d\omega,$$

получаем тождество

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho(\vec{r}, t) d\omega = \iiint_{\Omega_t} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{V}) \right] d\omega. \quad (2)$$

В рассматриваемой задаче нет внутренних источников производства или поглощения массы. Поэтому из закона сохранения массы следует, что

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho(\vec{r}, t) d\omega = 0,$$

и, следовательно, из (2) получается обычное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{V}) = 0. \quad (3)$$

Таким образом, уравнение неразрывности (3) эквивалентно следующему, используемому нами далее уравнению, выражающему закон сохранения массы в балансной интегральной форме:

$$\iiint_{\Omega_t} \frac{\partial\rho}{\partial t} d\omega + \iint_{\partial\Omega_t} \rho(\vec{r}, t) (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds = 0. \quad (4)$$

Для вывода уравнения движения поступаем следующим образом. Применяем второй закон Ньютона к подвижному «жидкому» объему Ω_t , рассматривая его как материальное тело, а оставшуюся часть жидкости – как действующие на него внешние силы, обусловленные вязкостью и статическим давлением. Имеем

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho\vec{V}(\vec{r}, t) d\omega = \iiint_{\Omega_t} \rho(\vec{r}, t) \vec{g} d\omega + \iint_{\partial\Omega_t} \vec{\tau} \cdot \vec{n} ds + \iiint_{\Omega_t} \delta_{\Sigma}(\vec{r} - \vec{r}_{\Sigma}) \vec{\tau}_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\omega, \quad (5)$$

где \vec{g} – вектор ускорения свободного падения, $\vec{\tau}$ – тензор напряжения, $\vec{\tau}_{\Sigma}$ – тензор диссипации тепловой энергии, $\delta_{\Sigma}(\vec{r} - \vec{r}_{\Sigma})$ – дельта-функция Дирака, ассоциированная с поверхностью теплоподвода Σ . Тензор $\vec{\tau}_{\Sigma}$ действует на подвижный объем Ω_t лишь в случае его

пересечения поверхности теплоподвода Σ . Таким образом, согласно определению дельта-функции δ_Σ , справедливо представление (рис. 1):

$$\iiint_{\Omega_t} \delta_\Sigma(\vec{r} - \vec{r}_\Sigma) \vec{\tau}_T \cdot \vec{n}_\Sigma d\omega = \begin{cases} \vec{\tau}_T(\vec{r}_\Sigma) \cdot \vec{n}_\Sigma & \text{при } \Omega_t \cap \Sigma \neq \emptyset, \\ 0 & \text{при } \Omega_t \cap \Sigma = \emptyset. \end{cases}$$

Далее, полагая в (1) $a = \rho \vec{V}$ и используя формулу Грина интегрирования по частям [9], получается тождество

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho \vec{V}(\vec{r}, t) d\omega = \iiint_{\Omega_t} \left[\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)(\rho \vec{V}) + (\rho \vec{V}) \operatorname{div}(\vec{V}) \right] d\omega. \quad (6)$$

Введением [9] в рассмотрение изотропного тензора $p(\vec{r}, t) \vec{I}$, где \vec{I} – едичный тензор, получим представление $\vec{\tau} = -p(\vec{r}, t) \vec{I} + \vec{\sigma}$, где $\vec{\sigma}$ – неравновесный тензор напряжения трения, который для ньютоновской жидкости в координатах имеет вид

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \xi \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k},$$

где μ – молекулярная вязкость, ξ – объемная (вторая) вязкость. Вновь воспользовавшись формулой Гаусса–Остроградского, получаем

$$\iint_{\partial\Omega_t} \vec{\tau} \cdot \vec{n} ds = - \iiint_{\Omega_t} \operatorname{grad}[p(\vec{r}, t)] d\omega + \iiint_{\Omega_t} \operatorname{div}(\vec{\sigma}) d\omega,$$

и, таким образом, уравнение движения (5) в балансной интегральной форме окончательно запишется в виде

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega_t} \left[\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)(\rho \vec{V}) + (\rho \vec{V}) \operatorname{div}(\vec{V}) \right] d\omega = \\ & = \iiint_{\Omega_t} \rho(\vec{r}, t) \vec{g} d\omega - \iiint_{\Omega_t} \operatorname{grad}[p(\vec{r}, t)] d\omega + \iiint_{\Omega_t} \operatorname{div}(\vec{\sigma}) d\omega + \iiint_{\Omega_t} \delta_\Sigma(\vec{r} - \vec{r}_\Sigma) \vec{\tau}_T \cdot \vec{n}_\Sigma d\omega, \end{aligned} \quad (7)$$

или в координатной дифференциальной форме

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \rho g_i - \frac{\partial(\Pi_{ik} - \sigma_{ik})}{\partial x_k} + \delta_\Sigma(\vec{r} - \vec{r}_\Sigma) \tau_T^{ik} n_\Sigma^k, \quad (8)$$

где $\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k$ – тензор плотности потока импульса.

В силу уравнения неразрывности (3), с учетом явного вида компонент σ_{ij} тензора напряжения трения и следующего тождества:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) + v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} \right) = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right),$$

уравнение (8) запишется в виде

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i + \left(\xi + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} + \delta_\Sigma(\vec{r} - \vec{r}_\Sigma) \tau_T^{ik} n_\Sigma^k.$$

Отметим также, что при отсутствии теплоподвода для несжимаемой среды с постоянной плотностью $\rho = \text{const}$ (\Rightarrow согласно (3) $\partial v_k / \partial x_k = 0$) из последнего уравнения получается обычное уравнение Навье–Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2},$$

где $\nu = \mu / \rho$ – кинематическая вязкость.

В уравнении (8) остается неизвестной величина τ_T^{ik} , уравнение для которой нами далее будет получено как следствие закона сохранения энергии. Перейдем к составлению уравнения энергии в рассматриваемой нами задаче. Обозначим через $u(\vec{r}, t)$ – внутреннюю энергию единицы массы среды. Тогда полная энергия в объеме Ω_t определяется интегралом $E = \iiint_{\Omega_t} \rho \left(u + \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) d\omega$. Полагая в тождестве (1) $a = \rho \left(u + \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right)$, получим

$$\frac{dE}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(u + \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) d\omega + \iint_{\partial\Omega_t} \rho \left(u + \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds. \quad (9)$$

Выясним теперь, какую работу производят силы, действующие на рассматриваемый подвижный элемент среды Ω_t . В единицу времени над данным элементом производится: $\iint_{\partial\Omega_t} p (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds$ – работа сил давления, $\iint_{\partial\Omega_t} (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{V} ds$ – работа сил вязкого трения, $\iiint_{\Omega_t} \rho (\vec{g} \cdot \vec{V}) d\omega$ – работа массовых сил, $\iiint_{\Omega_t} \delta_{\Sigma} (\vec{r} - \vec{r}_{\Sigma}) (\vec{\tau}_T \cdot \vec{n}_{\Sigma}) \cdot \vec{V} d\omega$ – работа сил «расширения–сжатия» в окрестности поверхности Σ . Когда объем Ω_t имеет непустое пересечение с поверхностью теплоподвода Σ , внутрь его через каждый элемент поверхности $\Omega_t \cap \Sigma$ в единицу времени передается теплота $q(\vec{r}_{\Sigma}, t)$. Суммируя с помощью дельта-функции δ_{Σ} эти элементарные тепловые потоки, окончательно получим, что суммарное количество теплоты, получаемое подвижным объемом Ω_t в единицу времени при прохождении им поверхности теплоподвода Σ , определяется следующим интегралом: $\iiint_{\Omega_t} \delta_{\Sigma} (\vec{r} - \vec{r}_{\Sigma}) q(\vec{r}, t) d\omega$.

Согласно закону сохранения энергии будем иметь

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(u + \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) d\omega + \iint_{\partial\Omega_t} \rho \left(u + \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds = & - \iint_{\partial\Omega_t} p (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds + \iint_{\partial\Omega_t} (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{V} ds + \\ & + \iiint_{\Omega_t} \rho (\vec{g} \cdot \vec{V}) d\omega + \iiint_{\Omega_t} \delta_{\Sigma} (\vec{r} - \vec{r}_{\Sigma}) (\vec{\tau}_T \cdot \vec{n}_{\Sigma}) \cdot \vec{V} d\omega + \iiint_{\Omega_t} \delta_{\Sigma} (\vec{r} - \vec{r}_{\Sigma}) q(\vec{r}, t) d\omega, \end{aligned}$$

или после преобразования с помощью формул Грина поверхностных интегралов в объемные

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \text{div} \right) \left(\rho u + \frac{\rho |\vec{V}|^2}{2} \right) d\omega = \iiint_{\Omega_t} \text{div} (\vec{\sigma} \cdot \vec{V} - p \vec{V}) d\omega + \quad (10) \\ + \iiint_{\Omega_t} \rho (\vec{g} \cdot \vec{V}) d\omega + \iiint_{\Omega_t} \delta_{\Sigma} (\vec{r} - \vec{r}_{\Sigma}) (\vec{\tau}_T \cdot \vec{n}_{\Sigma}) \cdot \vec{V} d\omega + \iiint_{\Omega_t} \delta_{\Sigma} (\vec{r} - \vec{r}_{\Sigma}) q(\vec{r}, t) d\omega. \end{aligned}$$

Последнее уравнение и выражает собой в балансной интегральной форме закон сохранения энергии для рассматриваемого случая (рис. 1). Упростим несколько это уравнение, с целью получения той его формы, в которой пишут уравнение энергии при формулировке первого начала термодинамики. Прежде всего, учитывая уравнение неразрывности (3),

левую подинтегральную часть в (10) представим в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \text{div}\right) \left(\rho u + \frac{\rho |\vec{V}|^2}{2}\right) &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{|\vec{V}|^2}{2}\right) + \rho \vec{V} \text{div} \left(u + \frac{|\vec{V}|^2}{2}\right) + \\ &+ \rho \left(u + \frac{|\vec{V}|^2}{2}\right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V})\right) = \rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{|\vec{V}|^2}{2}\right), \end{aligned}$$

а также учитывая, что $\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \text{grad}(\rho)$, $\text{div} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho}$, $\rho \frac{dp}{d\rho} - \text{div}(p \vec{V}) = \frac{\partial p}{\partial t}$, после прибавления $\rho \frac{dp}{d\rho}$ к обеим частям уравнения (10), оно окончательно запишется в виде

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{|\vec{V}|^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) d\omega &= \iiint_{\Omega_t} \text{div}(\vec{\sigma} \cdot \vec{V}) d\omega + \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial p}{\partial t} d\omega + \\ &+ \iiint_{\Omega_t} \rho (\vec{g} \cdot \vec{V}) d\omega + \iiint_{\Omega_t} \delta_{\Sigma}(\vec{r} - \vec{r}_{\Sigma}) (\vec{\tau}_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma}) \cdot \vec{V} d\omega + \iiint_{\Omega_t} \delta_{\Sigma}(\vec{r} - \vec{r}_{\Sigma}) q(\vec{r}, t) d\omega. \end{aligned} \tag{11}$$

Из уравнения (11) получается уравнение для компонент тензора теплоподвода (диссипации тепловой энергии) $\vec{\tau}_{\Sigma} = \|\tau_{\Sigma}^{ik}\|_{i,k=1;3}$:

$$\tau_{\Sigma}^{ik} n_{\Sigma}^i v_k = C - \partial(\sigma_{ik} v_i) / \partial x_k - \rho g_k v_k, \tag{12}$$

где $C = \rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{|\vec{V}|^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - \partial p / \partial t - q(\vec{r}_{\Sigma}, t)$.

3. Компоненты тензора диссипации тепловой энергии для одномерного установившегося течения невязкого газа

В предположении одномерного установившегося движения гидравлически идеального (невязкого) газа тензор диссипации тепловой энергии имеет одну компоненту τ_{Σ}^{11} и уравнение (12) принимает вид

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\tau_{\Sigma}^{11}}{\rho} + \frac{q}{\rho v}, \tag{13}$$

где $E = u + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}$ и учтено, что в этом случае $\vec{V}(\vec{r}) = v(x)\vec{e}_r$, $\vec{r} = x\vec{e}_r$, $\text{grad} = \partial/\partial x$.

Полагая $\Delta h_{\Sigma} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\tau_{\Sigma}^{11}}{\rho} dx$, $q^* = \int_{x_1}^{x_2} \frac{q}{\rho v} dx$, из (12) получаем уравнение энергии в форме 1-го закона термодинамики для потока идеального газа:

$$E_1 + q^* = E_2 + \Delta h_{\Sigma}, \tag{14}$$

где Δh_{Σ} – потери энергии из-за теплового сопротивления, q^* – подводимый удельный тепловой поток. При политропном подводе теплоты, когда $q^* = c_v \frac{n-k}{n-1} (T_2 - T_1)$, где c_v – удельная теплоемкость изохорного процесса, n и k – соответственно показатели политропы и адиабаты, с учетом того, что $p_2/\rho_2 - p_1/\rho_1 = R(T_2 - T_1)$ и $R(T_2 - T_1) = c_v(k-1)(T_2 - T_1)$, уравнение (14) позволяет определить Δh_{Σ} в таком виде:

$$\Delta h_{\Sigma} = n \left(\frac{k-1}{1-n}\right) c_v (T_2 - T_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2},$$

откуда, полагая $h_{\Sigma} = \rho_1 \Delta h_{\Sigma}$, для теплового сопротивления, выраженного в единицах давления, получаем выражение [8]:

$$h_{\Sigma} = n \rho_1 \left(\frac{k-1}{1-n}\right) c_v (T_2 - T_1) + \frac{\rho_1 v_1^2}{2} \left[1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{2}{n-1}}\right]. \tag{15}$$

При изобарном теплоподводе ($n = 0$) из (15) находим, что

$$h_T(Q) = \frac{\rho_1 Q^2}{2S^2} \left[1 - \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 \right], \quad (16)$$

где $Q = v_1 S$ – объемный расход среды.

4. Граничная задача феномена Рийке

Простейшей динамической системой с локальным подводом теплоты, в которой при определенных условиях самовозбуждаются автоколебания, является труба Рийке. При рассмотрении труб достаточно малого диаметра, можно ограничиться одномерной постановкой задачи. При малых числах Маха $M \ll 1$ (т.е. при дозвуковых скоростях) в уравнениях движения можно пренебречь [10] конвективными слагаемыми $v \frac{\partial v}{\partial x}$ и $v \frac{\partial \rho}{\partial x}$. С учетом этого уравнения движения и неразрывности для одномерного движения реальной жидкости в вертикальной трубе постоянного диаметра d до зоны теплоподвода и после нее можно записать в следующей форме [10, 11]:

$$\frac{\partial G(x, t)}{\partial t} + \frac{2\ell}{d} \lambda(\text{Re}) G^2 = -\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} - \rho g, \quad \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad (17)$$

где положено $G = \rho v$, λ – коэффициент гидравлических потерь по длине гладкой трубы определяется в зависимости от режима движения из следующей зависимости

$$\lambda(\text{Re}) = \begin{cases} \frac{64}{\text{Re}}, & \text{при } \text{Re} \leq \text{Re}_{\text{кр}} \text{ (ламинарный режим)}, \\ \frac{0.3164}{\text{Re}^{0.25}}, & \text{при } \text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}} \text{ (турбулентный режим)}. \end{cases} \quad (18)$$

Рассматривая далее в трубе Рийке политропный теплоподвод с показателем политропы n и воспользовавшись уравнением состояния $p/\rho = RT$ и соотношением $c = \sqrt{nRT}$, определяющим скорость звука c в среде с температурой T , из уравнения политропы $\frac{p}{\rho_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n$ получаем

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{n}{\rho} \left[p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n \right] = n \frac{p}{\rho} = nRT = c^2, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)^{-1} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Таким образом, система (17) преобразуется в систему нелинейных телеграфных уравнений:

$$\frac{\partial G(x, t)}{\partial t} + \frac{2\ell}{d} \lambda(\text{Re}) G^2 = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0. \quad (19)$$

Разделим трубу Рийке (рис. 2) условно на две области: Ω_0 – холодная нижняя часть трубы до электронагревателя и Ω_T – нагретая верхняя часть трубы после электроспиральи, которые пересекаются по поверхности теплоподвода $\Sigma = \Omega_0 \cap \Omega_T$ – зоне, в которой происходит нагрев потока электронагревателем. В каждой из областей Ω_0 и Ω_T движение воздуха описывается уравнениями (19), дополненными уравнением теплопереноса (уравнением энергии), которые также дополняются граничными условиями на входе и выходе из трубы Рийке, а также граничным условием в зоне теплоподвода Σ . Отметим, что при рассмотрении автоколебаний начальные условия несущественны, и мы их не рассматриваем.

Следовательно, окончательно приходим к следующей математической модели феномена Рийке (рис. 2):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \rho_2 \left[\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p_2}{\partial x} - \rho_2 g - \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad (\text{в области } \Omega_T), \\
 \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial \rho_2} = c_2^2, \quad \text{где } c_2 = \sqrt{kRT} \text{ — скорость звука в области } \Omega_T, \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x} = \chi(T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \chi(T) \text{ — коэффициент температуропроводности воздуха,} \\
 \tau(x) = \lambda(\text{Re}) \frac{x}{d} \rho_2(x, t) \frac{v_2^2(x, t)}{2}, \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{при } x = \ell \quad p_2 = p_{\text{вх}} - \rho_0 g \ell, \\
 \text{при } x = \ell_1 \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \\
 W_{\text{э}} = c_{\text{п}} \rho v S (T - T_0), \\
 p_1 - p_2 = h_T + h_{\text{сетки}},
 \end{array} \right. \\
 \text{при } x = 0 \quad p_{\text{вх}} - p_1 = k_{\text{др}} v_1^2,
 \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \rho_1 \left[\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p_1}{\partial x} - \rho_1 g - \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad (\text{в области } \Omega_0) \\
 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1} = c_1^2, \quad c_1 = \sqrt{kRT_0}.
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \quad (20)$$

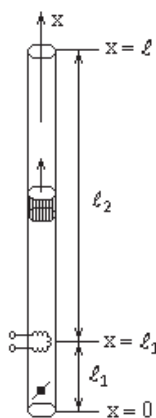


Рис. 2. Схема трубы Рийке

5. Математическая модель феномена Рийке как цепочка N связанных одномерных осцилляторов

Полученную в предыдущем параграфе граничную задачу (20) будем решать методом прямых (характеристик). Введем обозначения ($i = 0; N - 1$, $h = \frac{\ell}{N}$):

$$G(x_i, t) = G_i(t), \quad p(x_i, t) = p_i(t), \quad \rho(x_i, t) = \rho_i(t), \quad T(x_i, t) = T_i(t), \quad x_i = ih.$$

Далее заменяем дифференциальные операторы разностными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=x_i} &= \frac{p_{i+1}(t) - p_i(t)}{h} + O(h), \quad \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = \frac{G_i(t) - G_{i-1}(t)}{h} + O(h), \\ \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_i} &= \frac{T_i(t) - T_{i-1}(t)}{h} + O(h), \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \frac{T_i(t) - 2T_{i-1}(t) + T_{i-2}(t)}{h^2} + O(h). \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда согласно (19) – (20) в области Ω_T приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dG_i}{dt} + \frac{2\ell_2}{d} \lambda(\text{Re}) G_i^2 = \frac{p_i(t) - p_{i+1}(t)}{h} - g\rho_i(t), \\ \frac{1}{c_i^2} \frac{dp_{i+1}}{dt} = \frac{G_i(t) - G_{i+1}(t)}{h}, \quad (i = \overline{0; N-1}) \\ \frac{dT_i}{dt} + \frac{G_i}{\rho_i} \left[\frac{T_i(t) - T_{i-1}(t)}{h} \right] = \chi(T_i) \left[\frac{T_i(t) - 2T_{i-1}(t) + T_{i-2}(t)}{h^2} \right], \\ p_i = \rho_i R T_i, c_i = \sqrt{n R T_i}. \end{cases} \quad (22)$$

При каждом фиксированном значении i уравнения данной системы можно рассматривать как уравнения колебаний одномерного осциллятора. Тогда в целом вся система уравнений может быть интерпретирована как система $3N$ уравнений цепочки связанных осцилляторов. Когда число таких осцилляторов стремится к бесконечности, система (22) переходит в исходную распределенную математическую модель (20) феномена Рийке в области Ω_T . В нижней части трубы Рийке, т.е. в области Ω_0 , воздух не нагретый и имеет температуру T_0 окружающей среды. В этой области согласно (19) – (20) движение воздуха описывается гиперболической системой, разностный аналог которой имеет вид ($i = \overline{0; N_0 - 1}$):

$$\frac{dG_i}{dt} + \frac{2\ell_1}{d} \lambda(\text{Re}) G_i^2 = \frac{p_i(t) - p_{i+1}(t)}{h} - g\rho_0, \quad \frac{1}{c_1^2} \frac{dp_{i+1}}{dt} = \frac{G_i(t) - G_{i+1}(t)}{h}, \quad (23)$$

где $c_1 = \sqrt{k R T_0}$, k – показатель адиабаты.

Системы уравнений (22) – (23) дополняются граничными условиями и условиями в зоне электроспирали, выписанными в граничной задаче (20).

6. Усреднение уравнений феномена Рийке

В случае малой длины $\ell = \ell_1 + \ell_2$ трубы Рийке или когда достаточно ограничиться качественными соотношениями ее феномена (т.е. самовозбуждающихся автоколебаний), в полученных выше системах (22) – (23) достаточно ограничиться случаем одного осциллятора, т.е. положить $N = N_0 = 1$. Причем из системы (22) необходимо взять лишь уравнение импульсов, а из (23) – уравнение сохранения массы. Такое усреднение исходной граничной задачи (20) приводит ее к следующей автономной диссипативной динамической системе с одной степенью свободы [3, 4]:

$$C_a \frac{dP}{dt} = Q - \varphi(P), \quad L_a \frac{dQ}{dt} = F(Q) - P, \quad (24)$$

где $C_a = \ell_2 c^{-2} \rho^{-1} S$ – акустическая гибкость трубы, $L_a = \rho \ell_2 S^{-1}$ – акустическая масса нагретого столба воздуха, $Q = vS$ – объемный расход нагретого воздуха, $F(Q) = A(Q) - h_\ell(Q) - h_T(Q) - h_{\text{сетки}}(Q)$ – напорная характеристика трубы Рийке [4], $A(Q) = g\ell_2(\rho_0 - \rho)$ – напряжение подъемной силы, $h_\ell(Q)$ – вязкостные потери по длине трубы, $P = p - p_0$, p_0 – давление в окружающей среде, соответственно p и ρ – давление и плотность воздуха в трубе Рийке, $\varphi(P) = \sqrt{\frac{P}{k_{\text{дп}}}}$. На рис. 3 приведены зависимости для теплового сопротивления $h_T(Q)$ и вязкостных потерь $h_\ell(Q)$ по длине нагретого участка трубы Рийке, а также предельный цикл и соответствующая ему форма автоколебаний давления $P(t)$ как периодическое решение системы уравнений (24) при мощности электронагревателя $W_\Sigma = 505$ кВт, и $\ell_1 = 1/4\ell$, $\ell = 1$ м, $d = 0.1$ м.

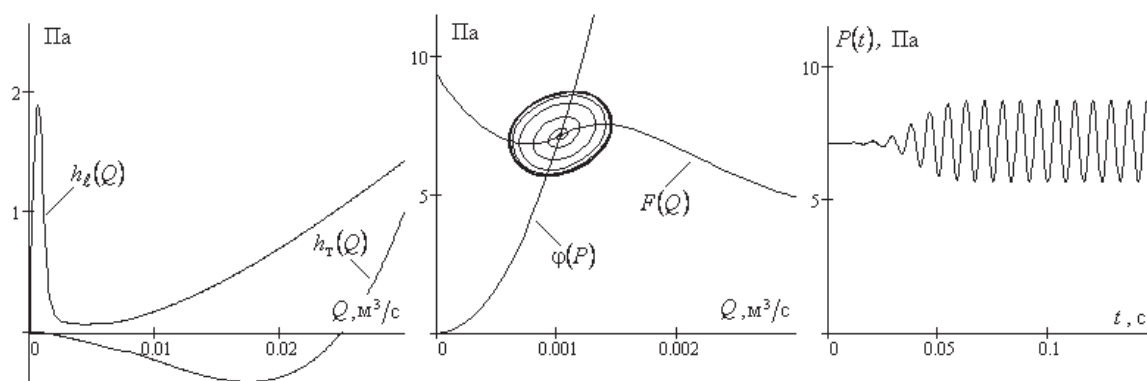


Рис. 3. Зависимости сопротивлений, предельный цикл и автоколебания в трубе Рийке

7. Выводы

Рассмотрена задача трехмерного движения реального газа при локальном подводе к нему теплоты. Основываясь на подходе Б. В. Раушенбаха, зона теплоподвода условно аппроксимирована некоторой поверхностью, на которой терпят разрыв гидродинамические и термодинамические параметры потока газа. Вместо традиционного рассмотрения граничных условий на данной поверхности в уравнения движения с помощью обобщенной дельта-функции Дирака добавлено слагаемое в виде тензора диссипации тепловой энергии, который ассоциирован с данной поверхностью. Как следствие применения закона сохранения энергии к элементарному объему, составленному из частиц движущейся среды, получено общее уравнение для компонент тензора диссипации тепловой энергии. Рассмотрены некоторые частные случаи применения полученной общей математической модели. Для одномерного установившегося течения идеального газа тензор диссипации тепловой энергии преобразуется в тепловое сопротивление. Получена математическая модель феномена Рийке, рассматриваемая как цепочка N связанных одномерных осцилляторов. Исходя из такой интерпретации, описана процедура усреднения уравнений движения нагретого воздуха в трубе Рийке. Установлено, что ветви отрицательных сопротивлений вязкостного $h_l(Q)$ и теплового $h_r(Q)$ при конвективном подводе теплоты в трубе Рийке составляют причину ее феномена.

Литература

1. Мелких А.В., Селезнев В.Д. Автоколебания неизотермического течения вязкой жидкости в канале // ТВТ. 2008. Т. 46, № 1. С. 100–109.
2. Беляев Н.М., Белиж Н.П., Польшин А.В. Термоакустические колебания газожидкостных потоков в сложных трубопроводах энергетических установок. Киев: Высшая школа, 1985.
3. Гоцуленко В.В. Математическое моделирование особенностей феномена Рийке // Математическое моделирование, РАН. 2004. Т. 16, № 9. С. 23–28.
4. Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Теория феномена Рийке в системе с сосредоточенными параметрами // Акустический вестник. 2010. Т. 13, № 3. С. 3–8.
5. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1969.
6. Раушенбах Б.В. Вибрационное горение. М.: Физматгиз, 1961.
7. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: ЛИБРОКОМ, 2010.
8. Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Отрицательное тепловое сопротивление в одномерном установившемся течении совершенного невязкого газа // Труды МФТИ. 2014. Т. 6, № 4(24). С. 153–157.

9. Курбатова Г.И., Филиппов В.Б. Элементы тензорного исчисления. Основы моделирования движущихся сплошных сред. СПб.: Изд. Санкт-Петербургского университета, 2002.
10. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.–Л.: Гостехиздат, 1951.
11. Басок Б.И., Давыденко Б.В., Готсуленко В.В. Автоколебания в трубе Рийке при расположении электронагревателя непосредственно на ее входе // Сибирский журнал индустриальной математики. 2013. Т. XVI, № 2(54). С. 50–61.

References

1. Melkikh A.V., Seleznev V.D. Self-oscillations of nonisothermal flow of viscous liquid in a channel. High Temperature. 2008. V. 46, N 1. P. 91–99.
2. Belyaev N.M., Belik N.P., Pol'shin A.V. Thermoacoustic vibrations of gas-liquid flows in complex pipes of power plants. Kiev: Vysshaya shkola, 1985. (in Russian).
3. Gotsulenko V.V. Mathematical modelling of Rijke's phenomenon peculiarities when changed the heat flow power. Matem. Mod. 2004. V. 16, N 9. P. 23–28. (in Russian).
4. Basok B.I., Gotsulenko V.V. Theory Rijke's phenomenon in a system with lumped parameters. Acoustic bulletin. 2010. V. 13, N 3. P. 3–8. (in Russian).
5. Abramovich G.N. Applied gas dynamics. Moscow: Nauka, 1969. (in Russian).
6. Rauschenbach B.V. Vibrating burning. Moscow: Fizmatgiz, 1961. (in Russian).
7. Landa P.S. Nonlinear oscillations and waves. Moscow: LIBROKOM, 2010. (in Russian).
8. Basok B.I., Gotsulenko V.V. Negative thermal resistance in the one-dimensional steady flow of a perfect inviscid gas. Proceedings of MIPT. 2014. V. 6, N 2(24). P. 153–157. (in Russian).
9. Kurbatova G.I., Filippov V.B. Elements of tensor calculus. Fundamentals of modeling moving continua. SPb.: Izd. St. Petersburg Univ., 2002. (in Russian).
10. Charnyy I.A. Unsteady motion of a real fluid in pipes. M.-L.: Gostekhizdat, 1951. (in Russian).
11. Basok B.I., Davydenko B.V., Gotsulenko V.V. Auto-oscillations in a Rijke tube under the location of an electric heater directly at its input. Sib. Zh. Ind. Mat. 2013. V. 16, N 2(24). P. 50–61. (in Russian).

Поступила в редакцию 10.10.2016