На правах рукописи
УДК 517.98

Гумеров Ренат Нельсонович

Групповые структуры и их приложения в анализе и топологической алгебре

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Казань – 2020

Работа прошла апробацию в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет» в институте математике и механики имени Н. И. Лобачевского на кафедре математического анализа

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Защита диссертации состоится 01 июля 2020 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета ФПМИ.01.01.01.002 по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9, МФТИ. С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (государственного университета): https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php

Работа представлена 20 марта 2020 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объекты исследования. Диссертация посвящена морфизмам и объектам категорий топологической алгебры и функционального анализа, в определениях которых участвуют групповые операции. В ней исследуются свойства конечнолистных накрытий компактных связных групп, многочленов Вейерштрасса над банаховыми алгебрами непрерывных функций и $*$-гомоморфизмов полугрупповых C^*-алгебр.

Актуальность темы. Мотивацией к представленному в диссертационной работе исследованию послужили несколько источников.

Одним из них является теория многочленов Вейерштрасса над банаховыми алгебрами непрерывных функций. Начиная с 60-х годов прошлого столетия исследованием свойств многочленов Вейерштрасса и алгебраических уравнений с непрерывными коэффициентами, заданными на различных топологических пространствах, занимались Д. Деккард, К. Пирси, Р. С. Кантриман, В. В. Жиков, Е. А. Горин, В. Я. Лин, Ю. В. Зюзин, В. Л. Хансен, В. Г. Бардаков, А. Ю. Веснин, Т. Миура, К. Кавамура, К. Ниидзима, О. Хатори и др.

Статьи Д. Деккарда, К. Пирси [29, 30] и Р. С. Кантримана [25] были посвящены вопросу о характеризации компактов X, таких, что в банаховой алгебре $C(X)$ всех непрерывных комплекснозначных функций на X всякое алгебраическое уравнение вида

$$z^n + f_1(x)z^{n-1} + f_2(x)z^{n-2} + \cdots + f_n(x) = 0,$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C(X)$, имеет решение. В таком случае говорят, что $C(X)$ алгебраически замкнута. В этих работах было показано, что для алгебраически замкнутой $C(X)$ компакт X должен удовлетворять жестким топологическим условиям.

Исследование указанных выше уравнений с дополнительным требованием о сепарабельности многочленов, заключающегося в том, что при каждом фиксированном $x \in X$ соответствующее уравнение с числовыми коэффициентами не имеет кратных корней, было начато в 1969 г. в статьях Е. А. Горина и В. Я. Лина [4, 5] и продолжено в серии работ, которые обсуждаются в обзоре [7]. Одной из отправных точек их исследования послужило доказательство В. В. Жикова [6] классической теоремы Вальтера — Бора — Фландерса [15, 74] о почти периодических решениях алгебраических уравнений с почти периодическими коэффициентами на вещественной оси. В статье [5] получены различные условия на компакт X, гарантирующие полную разрешимость уравнений степени n, означающую наличие у уравнения n строго различных решений в алгебре $C(X)$. В частности, для связной компактной, вообще говоря, неабелевой группы G для этого достаточно возможности деление на $n!$ в ее одномерной группе целочисленных спектральных когомологий, которая, как известно, в случае абелевой G изоморфна группе одномерных характеров $\widehat{G}$ группы G. Как следствие, в статье [5] получено обобщение теоремы Вальтера — Бора — Фландерса на связные компактные группы.

Возможность деления в группе характеров $\widehat{G}$ имеет непосредственное отношение к вопросу о существовании средних на компактной связной абелевой группе G. Ответ на подобный вопрос является одной из основных задач теории средних [19]. Изучение средних началось в 1930 г. со статьи А. Н. Колмогорова [54] и было продолжено рядом авторов в связи с аналитическими и арифметическими задачами. Г. Ауманн [14] изучал свойства средних на произвольных топологических пространствах. Б. Экманн, Е. Ганея и П. Хилтон [34, 35] рассматривали различные свойства обобщенных средних на группах. В 1972 г. Дж. Кислинг [53] доказал, что возможность деления на n в $\widehat{G}$ эквивалентна существованию n-среднего на компактной связной абелевой группе G. Теория обобщенных средних применяется при построении математических моделей в социологических теориях [36].

В. Л. Хансен начал исследование тесной связи, существующей между многочленами Вейерштрасса с непрерывными коэффициентами и накрывающими отображениями, в статьях [43, 44] и продолжил его в серии последующих работ. Результаты этого исследования подытожены в 1989 г. в монографии [45]. Каждый сепарабельный многочлен Вейерштрасса с непрерывными комплекснозначными коэффициентами, определенными на связном топологическом пространстве X, задает конечнолистное полиномиальное накрывающее отображение. В работах [43, 44] получены условия эквивалентности и тривиальности полиномиальных накрытий, формулируемые в различных алгебраических и топологических терминах.

В статьях В. Л. Хансена [44, 46], В. Г. Бардакова и А. Ю. Веснина [1] исследуются многочлены Вейерштрасса с непрерывными коэффициентами на единичной окружности $\mathbb{S}^1$. В них доказывается, что всякое конечнолистное накрытие $\mathbb{S}^1$ эквивалентно полиномиальному накрытию [44, 46], и строится алгоритм [1], позволяющий описать все конечнолистные накрытия окружности $\mathbb{S}^1$ с точностью до эквивалентности.

В 1999–2009 годах вопрос об алгебраической замкнутости алгебры $C(X)$ изучался в цикле статей Т. Миуры, К. Кавамуры, К. Ниидзимы, О. Хатори [47, 48, 50–52, 61] и их соавторов. В них получены различные необходимые и достаточные условия для выполнения этого свойства.

При изучении накрывающих отображений из топологических пространств на топологические группы естественным образом возникает вопрос о существовании структуры топологической группы на накрывающем пространстве, относительно которой заданное накрывающее отображение становится гомоморфизмом топологических групп. В этом случае говорят о *задаче подъема структуры группы* на накрывающее пространство. Этот вопрос послужил другим источником мотивации нашей работы. Положительный ответ на него для связных и локально линейно связных накрывающих пространств был дан Л. С. Понтрягиным в следующей теореме [9, теорема 79].

Теорема (Л. С. Понтрягин). *Пусть* $p : X \longrightarrow G$ *— накрывающее отображение из линейно связного топологического пространства* X *на связную* *локально линейно связную топологическую группу G с единичным элементом e. Тогда для каждой точки $x_0 \in p^{-1}(e)$ существует единственная структура топологической группы на пространстве X, такая, что точка x_0 является ее единичным элементом, а $p : X \longrightarrow G$ становится гомоморфизмом топологических групп. Более того, если группа G абелева, то отображение $p : X \longrightarrow G$ является гомоморфизмом абелевых групп.*

В дальнейшем всякое утверждение такого рода для того или иного класса накрывающих отображений называется *теоремой о накрывающей группе.*

При доказательстве теоремы Понтрягина, ввиду подходящего топологического строения объектов, используются результаты классической теории накрывающих пространств и фундаментальной группы Пуанкаре.

Теорема Понтрягина о накрывающей группе стоит у истоков исследования, представленного в диссертации. В связи с ней несомненно мотивирована постановка вопроса о том, для каких накрывающих отображений на топологические группы справедлива теорема о накрывающей группе.

В 2000-х г. задача о подъеме групповой структуры на накрывающее пространство произвольной компактной связной группы решалась несколькими авторами. В 2000 г. в статье С. А. Григоряна, А. В. Казанцева и автора диссертации [82] доказана теорема о накрывающей группе для конечнолистных накрытий компактных соленоидальных групп. Для построения требуемой групповой структуры использовалось естественно возникающее действие вещественной оси на накрывающем пространстве соленоидальной группы. Эта теорема позволяет дать доказательство классической теоремы Вальтера — Бора — Фландерса о почти периодических решениях алгебраических уравнений.

В 2002 г. А. Кларк [20] доказал теорему о накрывающей группе для расслоения над тором с нульмерным слоем, предположив при этом, что расслоенное пространство является континуумом со свойством однородности. В своем доказательстве он использовал действие группы конечномерного вещественного пространства на расслоенном пространстве.

В 2002 г. С. А. Григорян и автор диссертации в статье [83] анонсировали доказательство теоремы о накрывающей группе для конечнолистных накрывающих отображений из связных топологических пространств на произвольные связные компактные группы. Детальное изложение этого доказательства содержится в препринте [96], размещенном в arxiv.org в 2004 г., и в статье [86], опубликованной в 2006 г.

Независимое доказательство этой теоремы о накрывающей группе в 2006 г. было опубликовано в статье В. Матиевич и К. Эды [37].

В работах [37,83,86,96] для доказательства теоремы о накрывающей группе используется идея, восходящая к работе П. С. Александрова [12], об аппроксимации сложных топологических объектов более простыми и попытке переноса некоторых свойств вторых объектов на первые. Со временем эта идея оформилась в понятия обратного спектра пространств и его предела.

Важной вехой в истории применения обратных спектров, имеющей непосредственное отношение к кругу идей данной диссертации, стало глубокое исследование Л. С. Понтрягиным и А. Вейлем структуры топологических групп с использованием аппроксимации их группами Ли. Л. С. Понтрягин первым применил несчетные обратные спектры в виде так называемых рядов Ли $\{G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$, то есть, вполне упорядоченных спектров, состоящих из групп Ли, и показал, что компактная группа G является пределом ряда Ли.

В статьях [83, 86, 96] по ряду Ли $\{G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$ для базы G заданного связного конечнолистного накрытия $p : X \longrightarrow G$ построено семейство конечнолистных накрытий $\{p_\lambda : X_\lambda \longrightarrow G_\lambda\}$, заиндексированное направленным подмножеством в Λ. Это семейство аппроксимирует p. При этом к каждому из накрытий p_λ применима теорема Понтрягина. Все это позволяет наделить накрывающее пространство X требуемой структурой топологической группы (см. также [81]). В работах [83, 86, 96] и в статье автора диссертации [76] в 2013 г. даны приложения теоремы о накрывающей группе к вопросу о структуре накрытий компактной связной абелевой группы G, к теории многочленов Вейерштрасса над банаховой алгеброй $C(G)$ и к вопросу о существовании обобщенных средних на G. Свойства многочленов Вейерштрасса и структура накрытий компактных групп изучались в статье автора диссертации [77].

В статье [37] для доказательства теоремы о накрывающей группе использовалась аппроксимационная конструкция из статьи 2001 года С. Мардешича и В. Матиевич [59] по теории оверлеев и теорема Понтрягина.

Теорию оверлеев создал в 1972 г. Р. Фокс [40] с целью переноса фактов классической теории накрывающих пространств на накрытия произвольных связных метрических пространств. При этом он использовал идеи теории шейпов. В качестве примера приложения своей теории Фокс рассмотрел связные накрывающие пространства P-адических соленоидов Σ_P. В работе С. Мардешича и В. Матиевич [59] теория оверлеев была распространена на произвольные связные пространства.

В [86, 96] сформулирована гипотеза С. А. Богатого о справедливости теоремы о накрывающей группе для оверлеев над связными топологическими группами. В. Матиевич, К. Эда в 2013 г. и 2017 г. в статьях [38, 39] , а также Я. Дыдак [33] в 2016 г. доказали и развили эту гипотезу. Кроме того, в статье [38] была показана существенность условия конечнолистности накрытия для решения задачи подъема групповой структуры на накрывающее пространство компактной связной группы. Точнее говоря, было построено бесконечнолистное накрывающее отображение из связного пространства на P-адический соленоид Σ_P, такое, что на накрывающем пространстве искомая структура группы не существует. Напомним, $P = (p_1, p_2, \ldots)$ обозначает произвольную последовательность простых чисел.

P-адические соленоиды Σ_P образуют чрезвычайно интересный класс компактных связных абелевых групп. Они имеют почти вековую историю. Впервые они появились в работах Л. Вьеториса [73], Б. Л. ван дер Вардена и Д. ван Данцига [26–28] в конце 20-х г. XX века. Теория P-адических соленоидов и более общих соленоидальных пространств очень красивая и глубокая. Она богата приложениями в самых различных областях математики и служит источником разнообразных содержательных примеров.

Конечнолистные накрывающие отображения P-адических соленоидов с различных точек зрения исследовали Ч. Юйчэн, Я. Квапиш, П. Коваррубиас, Я. Харатоник, Я. Аартс, Р. Фоккинк, В. Матиевич, С. Ван, Б. Цзян, Х. Чжэн и др. Как частный случай эндоморфизмов возведения в степень элементов так называемых обобщенных соленоидов такие отображения выступают в работе 2005-го г. С. А. Богатого и О. Д. Фролкиной [2]. Отметим, что эндоморфизмы возведения в степень элементов топологической группы изучались еще Х. Хопфом. В частности, для компактной связной группы Ли он показал сюръективность этих эндоморфизмов [3].

Ч. Юйчэн [75] в 2000 г., П. Коваррубиас и Я. Харатоник [18] в 2002 г. исследовали различные свойства эндоморфизмов возведения в степень элементов диадического соленоида. Такой эндоморфизм рассматривался ими в качестве предельного отображения, индуцируемого морфизмом между двумя копиями одной и той же обратной последовательности, пределом которой служит диадический соленоид. Было, в частности, показано, что эндоморфизмы возведения в степень являются конечнолистными накрытиями, изучена их кратность и доказано, что их периодические точки образуют плотные множества в диадическом соленоиде.

Описание конечнолистных связных накрытий произвольного P-адического соленоида независимо дали В. Матиевич [60] в 2003 г. и автор диссертации в препринте [97], размещенном в arxiv.org в 2003 г. и вышедшем в виде статьи [84] в 2005 г. Было показано, что каждое связное конечнолистное накрывающее отображение на соленоид эквивалентно его эндоморфизму возведения в степень. В статье [60] это описание получено в качестве приложения установленных в ней результатов о накрытиях паракомпактных пространств с использованием фактов теории оверлеев из работы [59]. Автор диссертации использовал в [84, 97] методы статей [18, 75] и аппроксимирующее семейство, построенное для доказательства теоремы о накрывающей группе в [83, 86, 96].

В 2008 г. С. Ван, Б. Цзян и Х. Чжэн [49] независимо доказали, что каждое связное конечнолистное накрывающее пространство P-адического соленоида Σ_P гомеоморфно Σ_P.

Основываясь на методе статьи [18], автор диссертации [84, 97] изучил вопрос о плотности множеств эндоморфизмов возведения в степень элементов произвольного P-адического соленоида. Доказанные при этом утверждения позволили сформулировать в диссертации критерий плотности, который является частным случаем одного из результатов статьи С. А. Богатого и О. Д. Фролкиной [2].

Отвечая на вопрос Я. Харатоника и А. Илланеса [55] о средних на соленоидах, П. Крупски [55] доказал критерий существования 2-средних на произвольном соленоиде. Его доказательство базируется на методе статьи Б. Экманна [34] и одном результате В. Шеффера [71]. В статье [85] автором диссертации доказан аналог этого критерия для произвольных n-средних на P-адическом соленоиде.

P-адические соленоиды тесно связаны с некоторыми классами C^*-алгебр. В диссертации изучаются предельные $*$-эндоморфизмы редуцированных полугрупповых C^*-алгебр для полугрупп $\mathbb{Q}_P^+$. Каждая $\mathbb{Q}_P^+$ состоит из всех неотрицательных рациональных чисел в группе $\mathbb{Q}_P$ характеров P-адического соленоида. Сама группа $\mathbb{Q}_P$ порождается всеми дробями p_n^{-1} для членов p_n последовательности P.

В теории операторных алгебр рассматриваются различные типы полугрупповых C^*-алгебр. Исследованием свойств этих алгебр занимались Л. Кобурн, Р. Дуглас, Дж. Мёрфи, И. Кунц, Дж. Дункан, А. Патерсон и др. Обширная литература по предмету и краткая его история содержатся в обзоре С. Ли [58].

Важный класс C^*-алгебр представляют собой редуцированные полугрупповые C^*-алгебры $C_r^*(S)$ для полугрупп S со свойством сокращения, называемые также алгебрами Теплица. Поскольку каждая такая алгебра порождается регулярным представлением соответствующей полугруппы, то этот класс C^*-алгебр является очень естественным. Начало изучения таких C^*-алгебр для аддитивной полугруппы неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}^+$ было положено Л. Кобурном [21, 22] в 1967 г. Работы Л. Кобурна, Р. Дугласа и их соавторов [23, 24, 31, 32] были мотивированы некоторыми вопросами из теории индекса операторов и K-теории. В статье [32] Р. Дуглас рассмотрел случай полугрупповых C^*-алгебр для подполугрупп аддитивной группы действительных чисел. В статьях 1987 г. и 1989 г. Дж. Мёрфи [62, 63] исследовал случай для положительных конусов в упорядоченных абелевых группах. Было доказано [62], что изометрические представления полугрупп обладают свойством универсальности. Кроме того, Мёрфи построил функтор из категории частично упорядоченных групп в категорию C^*-алгебр, значениями которого являются алгебры Теплица для положительных конусов в группах. При этом было показано [62], что этот функтор является непрерывным.

Независимые доказательства некоторых результатов из статьи [62] опубликованы в 1994 г. в работе С. Аджи, М. Лаки, М. Нилсена и И. Рэйбёрна [11].

В 1991 г. и 1994 г. Мёрфи [64, 65] обобщил конструкцию редуцированной полугрупповой C^*-алгебры для произвольной полугруппы с левым сокращением.

В теории C^*-алгебр свойство универсальности изометрического представления для полугруппы $\mathbb{Z}^+$, то есть, в случае алгебры Теплица $C_r^*(\mathbb{Z}^+)$, известно также как теорема Кобурна [8, теорема 3.5.18]. Эта алгебра обозначается через $\mathcal{T}$. Она порождается оператором правого сдвига T, действующим в гильбертовом пространстве $l^2(\mathbb{Z}^+)$.

Теорема (Л. Кобурн). *Пусть V — изометрия в некоторой унитальной C^*-алгебре B. Тогда существует единственный унитальный $*$-гомоморфизм*

$\varphi : \mathcal{T} \longrightarrow B$, такой, что $\varphi(T) = V$. Кроме того, если $VV^* \neq 1$, то φ изометричен.

В диссертации теорема Кобурна служит инструментом для построения индуктивных последовательностей алгебр Теплица $\{\mathcal{T}, \varphi_n\}$, определяемых произвольными последовательностями простых чисел P. Непосредственное построение связующих $*$-гомоморфизмов φ_n содержится в статье автора диссертации [88]. Идея этого построения используется в статьях [80, 92] о вложениях полугрупповых C^*-алгебр.

Для заданной индуктивной последовательности алгебр Теплица $\{\mathcal{T}, \varphi_n\}$, определяемой последовательностью чисел P, ее предел изоморфен редуцированной полугрупповой C^*-алгебре $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$ [62, 63]. В диссертации дается независимое доказательство указанного факта, не использующее непрерывности функтора из работы Мёрфи [62]. Аргументы этого доказательства используются в статьях [79, 91, 94] при рассмотрении индуктивных систем алгебр Теплица над произвольными направленными множествами.

Основной результат диссертации о полугрупповых C^*-алгебрах посвящен предельным $*$-эндоморфизмам алгебр $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$. Он заключается в доказательстве критериев того, когда предельные $*$-эндоморфизмы являются $*$-автоморфизмами полугрупповых алгебр $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$. Эти критерии формулируются в алгебраических, теоретико-числовых и функциональных терминах [78, 95]. Они могут рассматриваться в качестве операторно-алгебраических аналогов результатов диссертации об отображениях P-адических соленоидов [89].

Как известно, изучение автоморфизмов алгебр представляет большой интерес в теории банаховых алгебр [66]. Они тесно связаны с дифференцированиями алгебр и, говоря неформально, отражают внутреннюю симметрию объекта [10].

С середины 1990-х г. по настоящее время теорию полугрупповых C^*-алгебр и близких к ним алгебр глубоко развили И. Кунц, М. Лака, С. Ли, А. Ника, М. Норлинг, И. Рэйбёрн и др. В частности, С. Ли при изучении полугрупповых C^*-алгебр рассматривал такие важные понятия, как аменабельность полугрупп и ядерность алгебр [56, 57].

В 2013 г. Н. Браунлоу и И. Рэйбёрн [16] использовали результаты о конечнолистных накрывающих отображениях P-адических соленоидов, которые содержатся в статье автора диссертации [84], для исследования скрещенных произведений C^*-алгебр.

Обзор недавних достижений в указанной области теории C^*-алгебр содержится в статьях [56–58].

Помимо самостоятельного интереса, исследование свойств индуктивных последовательностей и систем C^*-алгебр над частично упорядоченными множествами мотивировано их ролью, которую они играют в алгебраической квантовой теории поля. Дело в том, что такие индуктивные системы являются одним из основных объектов изучения при аксиоматическом подходе к алгебраической квантовой теории поля, предложенном Р. Хаагом, Х. Араки и Д. Кастлером [13,41,42] в середине прошлого столетия. Они строятся из алгебр локальных наблюдаемых и несут в себе информацию о квантовополевых системах. В настоящее время этот подход активно развивается в работах Э. Васселли, Дж. Руци, К. Фреденхагена и других авторов [17,67–70,72]. В статьях автора диссертации и его соавторов [79,91,93,94] рассматриваются индуктивные системы C^*-алгебр над произвольными частично упорядоченными множествами. При этом получены результаты, показывающие тесную связь между алгебраическими и топологическими свойствами возникающих объектов.

В диссертации решена задача об аппроксимации конечного набора элементов полной матричной алгебры [87]. При этом накладывается условие, что для произвольных отображений из полной линейной группы в себя, среди которых хотя бы одно является открытым, аппроксимирующие матрицы и матричное произведение значений отображений на этих матрицах должны иметь простые спектры. Существенную роль при решении указанной задачи играет естественная структура топологической группы на полной линейной группе. Эта задача используется при изучении топологических свойств тензорного ранга в статье [90].

Таким образом, актуальность темы диссертации обусловлена источниками ее мотивации. Она выражается в том, что решения задач, рассматриваемых в диссертации, вносят вклад в дальнейшее естественное развитие обсуждаемых выше направлений фундаментальных исследований в топологической алгебре и функциональном анализе. Весьма существенным оказывается применение теоремы о накрывающей группе к изучению полиномиальных накрытий, определяемых многочленами Вейерштрасса над банаховыми алгебрами непрерывных функций, заданных на компактных связных абелевых группах.

Степень разработанности темы до начала представленного исследования характеризуют упомянутые выше работы и содержащиеся в них следующие факты: результаты из теории многочленов Вейерштрасса над банаховыми алгебрами непрерывных функций, показывающие связь многочленов с конечнолистными накрытиями топологических пространств; теорема Понтрягина о накрывающей группе для связных локально линейно связных топологических групп; результаты об отображениях P-адических соленоидов и гомоморфизмах полугрупповых C^*-алгебр.

Цели и задачи диссертации. Целью работы является исследование свойств отображений между пространствами, на которых есть или может быть введена структура топологической группы, а также предельных $*$-эндоморфизмов тех C^*-алгебр, которые определяются с помощью понятия полугруппы. Важной составной частью этой цели является изучение связи между многочленами Вейерштрасса над банаховыми алгебрами непрерывных функций и конечнолистными накрывающими отображениями на компактные связные абелевы группы.

В первую очередь, для достижения поставленной цели ставится задача доказательства аналога теоремы Понтрягина для конечнолистных накрывающих отображений из связных пространств на произвольные компактные связные группы. Другими словами, ставится задача подъема структуры группы с базы накрытия на его накрывающее пространство. В свою очередь, для ее решения ставится цель по ряду Ли базы накрытия построить семейство накрытий, аппроксимирующее заданное накрытие.

Доказательство теоремы о накрывающей группе позволяет поставить целью привлечение теории двойственности Понтрягина — ван Кампена для описания конечнолистных накрытий компактных связных абелевых групп в терминах полиномиальных накрытий, определяемых многочленами Вейерштрасса.

Далее, ставится задача применения теоремы о накрывающей группе для исследования структуры конечнолистных накрытий абелевых групп и к изучению вопроса о существовании обобщенных средних на этих группах.

Еще одной целью является изучение отображений P-адических соленоидов. При этом ставится задача применения аппроксимирующей конструкции, построенной для доказательства теоремы о накрывающей группе, и методов статей [18, 75] для описания связных конечнолистных накрытий произвольных P-адических соленоидов. Также ставится задача изучения вопроса о плотности множеств периодических точек эндоморфизмов возведения в степень элементов соленоидов. Ставится задача доказательства критерия существования n-средних на P-адическом соленоиде на основе метода статьи [55].

Другой целью является изучение свойств предельных эндоморфизмов редуцированных полугрупповых C^*-алгебр для полугрупп рациональных чисел. В связи с этим ставится задача изучения индуктивных последовательностей алгебр Теплица, определяемых последовательностями простых чисел, их пределов и морфизмов между ними. Ставится цель получения критериев того, когда предельные эндоморфизмы таких алгебр являются $*$-автоморфизмами.

Для полной матричной алгебры, множество обратимых элементов которой обладает структурой топологической группы, ставится цель использования этой структуры для решения задачи аппроксимации элементов алгебры.

Методология и методы исследования. В работе используются методы анализа, топологии и топологической алгебры, а также общекатегорные методы. Для доказательства теоремы о накрывающей группе для конечнолистного накрывающего отображения на произвольную компактную связную группу задействован метод обратных спектров. Специально для этого построено семейство конечнолистных накрывающих отображений из связных топологических пространств на компактные локально линейно связные группы, аппроксимирующее заданное накрытие. При исследовании свойств многочленов Вейерштрасса над банаховыми алгебрами непрерывных функций, заданных на компактных связных абелевых группах, ключевую роль играют доказанная теорема о накрывающей группе и методология теории двойственности Понтрягина — ван Кампена. При изучении свойств накрывающих отображений соленоидов используются построенное аппроксимирующее семейство накрытий и теоретико-числовые методы. Для работы с предельными эндоморфизмами полугрупповых C^*-алгебр используются методы индуктивных последовательностей и теории C^*-алгебр.

Основные положения, выносимые на защиту. В работе получены следующие основные результаты, которые выносятся на защиту.

1. Доказана теорема о накрывающей группе для конечнолистных накрывающих отображений из связных топологических пространств на компактные связные группы. Тем самым теорема Понтрягина о накрывающей группе обобщена на накрытия произвольных компактных связных групп. Получены приложения доказанной теоремы к изучению структуры накрытий и к вопросу о существовании обобщенных средних на абелевых группах.

2. Показано, что каждое конечнолистное накрывающее отображение из произвольного хаусдорфова пространства на компактную связную абелеву группу эквивалентно полиномиальному накрытию, определяемому сепарабельным многочленом Вейерштрасса над банаховой алгеброй непрерывных функций, заданных на этой группе. При этом всякое такое связное накрытие эквивалентно отображению проектирования на первую координату непрерывного многообразия Вейерштрасса, задаваемого конечным набором двучленов, коэффициентами которых являются характеры группы.

3. С использованием построенного при доказательстве теоремы о накрывающей группе аппроксимирующего семейства накрытий показано, что каждое конечнолистное связное накрывающее отображение P-адического соленоида эквивалентно предельному отображению, являющемуся эндоморфизмом возведения в степень элементов этого соленоида. Исследован вопрос о плотности множеств периодических точек эндоморфизмов возведения в степень элементов P-адического соленоида.

4. В алгебраических, теоретико-числовых и функциональных терминах получены критерии того, когда предельные эндоморфизмы редуцированных полугрупповых C^*-алгебр для полугрупп рациональных чисел являются $*$-автоморфизмами.

Научная новизна. Все основные результаты, представленные выше и выносимые на защиту, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут применяться для дальнейших исследований в рамках теории накрывающих пространств, теории многочленов Вейерштрасса над коммутативными банаховыми алгебрами, изучении полугрупповых C^*-алгебр и в алгебраической квантовой теории поля. Эти результаты использовались соискателем при чтении спецкурсов для студентов Казанского (Приволжского) федерального университета и могут аналогично использоваться в других вузах. Часть материала диссертации вошла в учебно-методические пособия [106, 107].

Степень достоверности результатов. Все результаты диссертации представлены в форме математических утверждений. Они снабжены строгими доказательствами. Вспомогательные факты взяты автором диссертации из авторитетных математических научных журналов, учебников и монографий. Все выносимые на защиту результаты опубликованы в рецензируемых научных изданиях.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих международных конференциях: «Актуальные проблемы математики и механики» в НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева Казанского государственного университета, Казань, 1–3 октября 2000 г.; 5-я, 7-я, 8-я, 10–14-я Казанские летние научные школы — конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», К(П)ФУ, соответственно 27 июня — 4 июля 2001 г., 27 июня — 4 июля 2005 г., 27 июня — 4 июля 2007 г., 1–7 июля 2011 г., 22–28 августа 2013 г., 27 июня — 4 июля 2015 г., 21–27 августа 2017 г., 7–12 сентября 2019 г.; «Актуальные проблемы математики и механики», посвященная 200–летию Казанского государственного университета и 70–летию НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева Казанского государственного университета, Казань, 26 сентября — 1 октября 2004 г.; «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посвященная 100–летию со дня рождения академика С. М. Никольского, Москва, МИРАН им. В. А. Стеклова, 23–29 мая 2005 г.; «Александровские чтения — 2006», посвященная 110–летию со дня рождения академика П. С. Александрова, Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 30 мая — 2 июня 2006 г.; «Tenth Prague Topological Symposium», Прага, 13–19 августа 2006 г.; «Актуальные проблемы математики и механики», посвященная 75–летию НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева Казанского государственного университета, Казань, 10–16 октября 2009 г.; «Сеточные методы для краевых задач и приложения, X», Казань, К(П)ФУ, 24–29 сентября 2014 г.; «Фундаментальные проблемы алгебры, анализа и геометрии», посвященной юбилеям П. А. и А. П. Широковых, Казань, К(П)ФУ, 26 июня — 2 июля 2016 г.; «Сеточные методы для краевых задач и приложения, XI», Казань, К(П)ФУ, 25–29 сентября 2016 г.; Уфимская математическая конференция, Уфа, Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, БГУ, 27–30 сентября 2016 г.; конференция, посвященная 100–летию со дня рождения А. Ф. Леонтьева, Уфа, ИМ с ВЦ УНЦ РАН, БГУ, АН РБ, 24–27 мая 2017 г.; «Probability Theory and Mathematical Statistics», Казань, К(П)ФУ, 7–10 ноября 2017 г.; «Комплексный анализ и геометрия», Уфа, ИМ с ВЦ УНЦ РАН, БГУ, 23–26 мая 2018 г.; «Quantum Structures — 2018», Казань, К(П)ФУ, 16–20 июля 2018 г.; конференция, посвященная 100–летию со дня рождения М. Джрбашяна, Ереван, ИМ НАН Армении, 22–24 октября 2018 г.; «Mathematical Physics, Dynamical Systems, Infinite-Dimensional Analysis», Долгопрудный, МФТИ, 17–21 июня 2019 г.; «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», посвященная 125–летию со дня рождения основателя кафедры алгебры Казанского университета чл.-корр. АН СССР Н. Г. Чеботарева и 75–летию со дня рождения зав. каф. алгебры акад. АН РТ М. М. Арсланова, Казань, К(П)ФУ, 24–28 июня 2019 г.

Результаты диссертации докладывались на следующих научно–исследовательских семинарах: «Алгебры в анализе» кафедры теории функций и функционального анализа в МГУ им. М. В. Ломоносова (руководители: профессор А. Я. Хелемский, доцент А. Ю. Пирковский) в 2001, 2006 гг. и 8 декабря 2017 г.; «Алгебры операторов и их приложения» кафедры математического анализа в Казанском ГУ (руководитель: профессор А. Н. Шерстнев) в 2000, 2001 и 2004 гг.; на семинаре по общей топологии имени академика П. С. Александрова кафедры общей топологии и геометрии в МГУ им. М. В. Ломоносова (зав. кафедрой профессор В. В. Федорчук) 29 марта 2001 г.; «Топология и Анализ» кафедры высшей геометрии и топологии в МГУ им. М. В. Ломоносова (руководители: профессора А. С. Мищенко, В. М. Мануйлов, Е. В. Троицкий и др.) 20 марта 2003 г.; «Топологическая динамика» кафедры общей топологии и геометрии в МГУ им. М. В. Ломоносова (руководитель: профессор С. А. Богатый) в 2004 г.; на семинаре кафедры геометрии в Казанском ГУ (зав. кафедрой профессор Б. Н. Шапуков) в 2004 г.; на семинаре кафедры высшей математики в Казанском государственном энергетическом университете (руководители: профессора С. А. Григорян, А. С. Ситдиков, доцент Е. В. Липачева) регулярно в 2006–2019 гг.; на семинаре кафедр вычислительной математики и математического анализа в К(П)ФУ (руководители: профессора М. М. Карчевский, Р. Р. Шагидуллин, доцент Р. Н. Гумеров) регулярно в 2014–2019 гг.; на семинаре кафедры алгебры и математической логики в К(П)ФУ (руководители: профессор М. М. Арсланов, доцент А. Н. Абызов) 15 декабря 2017 г.; на семинаре кафедры высшей математики в МФТИ (руководитель: профессор Е. С. Половинкин) 21 мая 2019 г. Работа в целом докладывалась на кафедре математического анализа в К(П)ФУ (зав. кафедрой профессор С. Р. Насыров) 28 февраля 2020 г.

Публикации. Основные результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в 20 работах — это статьи в рецензируемых научных журналах, входящих в списки RSCI, Scopus, WoS. Всего по теме диссертации автором опубликована 41 научная работа и 2 учебно-методических пособия.

Личный вклад автора. Результаты диссертации, выносимые на защиту и составляющие ее основное содержание, получены лично автором.

Часть результатов работы опубликована в совместных статьях [79, 82, 83, 86, 87, 90, 92–94]. В каждой из статей [79, 82, 92, 93] автору диссертации принадлежит одна третья часть содержания. В работах [83, 86] автору диссертации принадлежат все сформулированные утверждения и их доказательства, а соавтору — постановка задачи о поднятии групповой структуры и общее указание на связь этой задачи с теорией многочленов Вейерштрасса. В статье [87] все сформулированные утверждения и их доказательства принадлежат автору диссертации. Эта работа написана в результате обсуждений авторами известного факта, обобщением которого является предложение 1 из статьи. В статьях [90] и [94] автору диссертации принадлежат соответственно две третьих части и половина содержания.

В диссертацию вошли лишь те результаты, доказательства которых получены автором самостоятельно. Ее содержание и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные статьи.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, каждая из которых разбита на параграфы, заключения, указателей обозначений и терминов, списка литературы, содержащего 181 наименование и включающего работы, опубликованные автором по теме диссертации. Общий объем диссертации составляет 214 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Нумерация утверждений и определений, приводимых ниже, соответствует нумерации в диссертационной работе.

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках темы диссертации, приводится обзор литературы и результатов по изучаемым вопросам, формулируются цели и ставятся задачи. Здесь же формулируются основные результаты диссертации, обосновывается их новизна и значимость.

В §1.1 содержатся основные обозначения и предварительные сведения об объектах и морфизмах категорий топологических пространств и групп, с которыми предстоит работать в дальнейшем. В частности, приводятся необходимые факты из теории обратных спектров и их пределов в категориях топологических пространств и компактных групп, даются определения накрывающих отображений и обобщенных средних.

Определение 1.1.11. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$ *и* $p : X \longrightarrow Y$ *— сюръективное непрерывное отображение между топологическим пространствами* X *и* Y*, обладающее следующим свойством. У каждой точки* $y \in Y$ *существуют ее окрестность* W *в пространстве* Y *и разбиение полного прообраза* $p^{-1}(W)$ *на непересекающиеся окрестности* V_i*,* $i = 1, \ldots, k$*, в пространстве* X*, такие, что для каждого индекса* i *отображение* $p|_{V_i} : V_i \longrightarrow W$*, представляющее собой ограничение отображения* p *на окрестность* V_i*, является гомеоморфизмом* V_i *на* W*. Тогда* p *называется* k*-листным накрывающим отображением, или просто* k*-листным накрытием. При этом* X *называется накрывающим пространством,* Y *— базой накрывающего отображения* p*, а* W *— правильно, или* *ровно, накрытой окрестностью. Семейство окрестностей* $\{V_i : i = 1, \dots, k\}$ *называется разбиением полного прообраза* $p^{-1}(W)$ *на слои. Число* k *называется кратностью отображения* p. *Отображение* p *называется конечнолистным накрытием, если оно является* k*-листным накрытием для некоторого числа* $k \in \mathbb{N}$. *Конечнолистное накрытие* p *называется связным, если пространства* X *и* Y *связны.*

Определение 1.1.12. *Конечнолистные накрытия* $p : X \to Y$ *и* $q : Z \to Y$ *называются изоморфными, или эквивалентными, если существует гомеоморфизм* $\rho : X \to Z$, *такой, что* $p = q \circ \rho$.

Определение 1.1.13. *Конечнолистное накрытие* $p : X \to Y$ *называется тривиальным, если оно изоморфно проекции декартова произведения* $X \times \{1, \dots, k\}$ *на первую координату, где* $k \in \mathbb{N}$.

Определение 1.1.14. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$. *Аддитивная абелева группа* G *называется* k*-делимой, если для любого* $g \in G$ *существует* $h \in G$, *такой, что* $kh = g$.

Говорят также об извлечении корня k-ой степени в группе G.

Определение 1.1.16. *Пусть* X *— топологическое пространство и пусть натуральное число* $k \geqslant 2$. *Непрерывное отображение* $\mu : X \times X \times \ldots \times X \longrightarrow X$ *из декартово произведения* k *экземпляров* X *называется* k*-средним на* X, *если* $\mu(x, x, \dots, x) = x$ *и* $\mu(x_1, x_2, \dots, x_k) = \mu(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)})$ *для любых* $x, x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ *и любой перестановки* σ *множества чисел* $\{1, \dots, k\}$.

§1.2 является подготовительным для решения задачи о подъеме групповой структуры на конечнолистное накрывающее пространство компактной связной группы. В этом параграфе строится семейство накрытий компактных групп Ли, аппроксимирующее заданное k-листное накрывающее отображение $p : X \longrightarrow G$, $k \in \mathbb{N}$, из компактного пространства X на компактную связную группу G. Для этого рассматривается обратный спектр $\{\, G_\lambda, \pi^\mu_\lambda, \Lambda \,\}$ над направленным вверх множеством $(\Lambda, \prec)$, такой, что имеет место изоморфизм $(G, \{\pi_\lambda\}) \backsimeq \varprojlim\{G_\lambda, \pi^\mu_\lambda, \Lambda\}$ в категории компактных групп. Этот спектр состоит из компактных связных групп Ли и их открытых сюръективных гомоморфизмов. Он называется рядом Ли для группы G.

Далее, выбирается индекс $\alpha \in \Lambda$, удовлетворяющий некоторым условиям, и рассматривается конфинальное подмножество $\Lambda_\alpha := \{\, \lambda \in \Lambda : \alpha \prec \lambda \,\}$ в множестве индексов Λ. При этом группа G является обратным пределом подспектра ряда Ли для группы G, который рассматривается над множеством Λ_α.

Затем, для каждого индекса $\lambda \in \Lambda_\alpha$ строятся компактное связное пространство X_λ и отображение $p_\lambda : X_\lambda \longrightarrow G_\lambda$, такие, что имеет место

Предложение 1.2.1. *Существует индекс* $\beta \in \Lambda_\alpha$, *такой, что для каждого индекса* $\lambda \in \Lambda_\beta$ *отображение* $p_\lambda : X_\lambda \to G_\lambda$ *является* k*-листным накрывающим отображением.*

Основным утверждением данного параграфа является

Предложение 1.2.2. *Конечнолистное накрывающее отображение* $p : X \to G$ *из связного топологического пространства на компактную группу является с точностью до изоморфизма предельным морфизмом, индуцированным морфизмом*

$$\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda_\beta\} : \{X_\lambda, h^\mu_\lambda, \Lambda_\beta\} \longrightarrow \{G_\lambda, \pi^\mu_\lambda, \Lambda_\beta\}$$

обратных систем в категории компактных пространств.

Следующий §1.3 посвящен доказательству теоремы о накрывающей группе.

Теорема 1.3.1. (Теорема о накрывающей группе)

Пусть $p : X \to G$ *— конечнолистное накрывающее отображение из связного пространства* X *на компактную группу* G *с единицей* e. *Тогда для любой точки* $\widetilde{e}$ *из множества* $p^{-1}(e)$ *на пространстве* X *существует единственная структура топологической группы, такая, что элемент* $\widetilde{e}$ *является ее единицей, а* p *— гомоморфизмом компактных групп. Более того, если группа* G *абелева, то отображение* p *— гомоморфизм абелевых групп.*

В доказательстве теоремы 1.3.1 используется теорема Понтрягина о накрывающей группе и предложение 1.2.2.

В последнем §1.4 этой главы даются приложения доказанной теоремы о накрывающей группе в случае компактных связных абелевых групп. Она применяется для изучения структуры конечнолистных накрывающих отображений и к проблеме существования обобщенных средних. При этом используются факты теории двойственности Понтрягина — ван Кампена.

С использованием теоремы о накрывающей группе сначала доказывается

Теорема 1.4.1. *Пусть* $p : X \to G$ *— связное конечнолистное накрывающее отображение на компактную связную абелеву группу* G. *Группа характеров* $\widehat{G}$ *допускает деление на кратность накрытия* p *в том и только том случае, когда кратность накрытия* p *равняется единице, то есть, отображение* p *является гомеоморфизмом.*

Из теоремы 1.4.1 и критерия Кислинга [53, теорема 1.1] о существовании обобщенных средних, сформулированного на с. 4, вытекают следствия.

Следствие 1.4.1. *Пусть натуральное число* $k \geqslant 2$. *Если группа характеров* $\widehat{G}$ *является* k*-делимой, то не существует* k*-листного накрывающего отображения из связного топологического пространства на компактную связную абелеву группу* G.

Следствие 1.4.2. *Пусть натуральное число* $k \geqslant 2$. *Если существует* k*-листное накрывающее отображение из связного топологического пространства на компактную связную абелеву группу* G, *то на* G *не существует* k*-среднее.*

Теорема 1.4.1 позволяет доказать достаточность условия, сформулированного в следующем критерии тривиальности конечнолистных накрывающих отображений на компактные связные абелевы группы.

Теорема 1.4.2. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$. *Все* k*-листные накрывающие отображения на компактную связную абелеву группу* G *являются тривиальными тогда и только тогда, когда группа характеров* $\widehat{G}$ *допускает деление на* $k!$.

Доказательство необходимости условия, сформулированного в теореме 1.4.2, ввиду использования в нем доказываемых в дальнейшем свойств многочленов Вейерштрасса, нам удобнее отложить до §2.4 в главе 2. Это будет теорема 2.4.3.

Следствием теоремы 1.4.2 и критерия Кислинга [53, теорема 1.1] является

Теорема 1.4.3. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$. *Все* k*-листные накрывающие отображения на компактную связную абелеву группу* G *являются тривиальными тогда и только тогда, когда на группе* G *существует* $k!$*-среднее.*

В главе 2, состоящей из четырех параграфов, рассматриваются многочлены Вейерштрасса и уравнения над банаховыми алгебрами непрерывных функций на компактных связных абелевых группах G. Исследуется их тесная связь с полиномиальными накрывающими отображениями.

В §2.1 приводятся основные сведения о многочленах Вейерштрасса, коэффициентами которых являются непрерывные комплекснозначные функции и о полиномиальных накрытиях, определяемых многочленами Вейерштрасса.

Определение 2.1.1. *Многочленом Вейерштрасса степени* n *над* $C(G)$, *или над* G, *называется полиномиальная функция* $R : G \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, *такая, что*

$$R(g, z) = z^n + f_1(g)z^{n-1} + f_2(g)z^{n-2} + \cdots + f_n(g),$$

где $f_1, \ldots, f_n \in C(G)$, $n \in \mathbb{N}$, $g \in G$, $z \in \mathbb{C}$.

Определение 2.1.2. *Многочлен Вейерштрасса* R *называется сепарабельным, или простым, если для каждого* $g \in G$ *многочлен* $R(g, z)$ *от переменной* z *с комплексными коэффициентами не имеет кратных корней в поле* $\mathbb{C}$.

Вместе с сепарабельным многочленом Вейерштрасса R степени n над G рассматриваются множество его нулей $E(R) = \{(g, z) \in G \times \mathbb{C} \mid R(g, z) = 0\}$ как подпространство в $G \times \mathbb{C}$ и проекция на первую координату $pr : E(R) \longrightarrow G$.

Отображение pr является n-листным накрытием [44, предложение 3.2].

Определение 2.1.3. *Проекция* $pr : E(R) \longrightarrow G$ *называется полиномиальным накрытием, а пространство* $E(R)$ *— полиномиальным накрывающим пространством над* G, *определяемым многочленом Вейерштрасса* R.

§2.2 посвящен доказательству следующего утверждения.

Теорема 2.2.1. *Любое конечнолистное накрывающее отображение на связную компактную абелеву группу* G *эквивалентно полиномиальному накрывающему отображению.*

В §2.3. вводится понятие непрерывного многообразия Вейерштрасса, порождаемого конечным набором многочленов.

Определение 2.3.1. *Пусть дано конечное семейство многочленов Вейерштрасса $P_1(g,z),\dots,P_m(g,z)$ над $C(G)$. Подпространство $E(P_1,\dots,P_m)$ декартова произведения $G\times\mathbb{C}^m$, задаваемое формулой*

$$E(P_1,\dots,P_m)=\{(g,z_1,\dots,z_m)\mid g\in G,\ z_j\in\mathbb{C},\ P_j(g,z_j)=0,\ j=1,\dots,m\},$$

называется непрерывным многообразием Вейерштрасса, порождаемым многочленами $P_1(g,z),\dots,P_m(g,z)$.

Теорема 2.3.1. *Пусть $p:X\longrightarrow G$ — n-листное накрывающее отображение из связного пространства X на компактную связную абелеву группу G. Тогда существуют многочлены Вейерштрасса $R_j(g,z)=z^{n_j}-\chi_j(g)$, где $n_j\in\mathbb{N}$, $\chi_j\in\widehat{G}$, $j=1,\dots,m$, такие, что наркытие p эквивалентно отображению проектирования на первую координату многообразия Вейерштрасса, порождаемого многочленами $R_1(g,z),\dots,R_m(g,z)$. При этом степени многочленов Вейерштрасса связаны с кратностью накрытия p равенством $n=n_1\cdot\ldots\cdot n_m$.*

Из доказательства теоремы 2.3.1 вытекает

Теорема 2.3.2. *Пусть $p:X\longrightarrow G$ — n-листное накрывающее отображение из связного пространства X на компактную связную абелеву группу G, где n — простое число. Тогда существует многочлен Вейерштрасса $R(g,z)=z^n-\chi(g)$, где $\chi\in\widehat{G}$, такой, что накрытие p эквивалентно полиномиальному накрытию, определяемому многочленом R.*

В §2.4 сначала изучаются свойства алгебраических уравнений с непрерывными коэффициентами вида $x^n-\chi=0$, где χ — характер компактной связной абелевой группы G. При этом доказывается следующий результат об их решениях.

Теорема 2.4.2. *Пусть $\chi_0\in\widehat{G}$. Предположим, что уравнение $x^n-\chi_0=0$ имеет решение в алгебре $C(G)$. Тогда это уравнение имеет решение и в группе характеров $\widehat{G}$.*

Используя теорему 2.4.2, доказывается оставшаяся импликация в теореме 1.4.2, то есть, необходимость возможности деления на $n!$ в группе характеров $\widehat{G}$ группы G, у которой все n-листные накрытия тривиальны. Следуя терминологии, принятой в теории многочленов Вейерштрасса, мы формулируем этот результат следующим образом.

Теорема 2.4.3. *Пусть все n-листные накрытия группы G тривиальны. Тогда в группе характеров $\widehat{G}$ возможно извлечение корня степени $n!$.*

В формулировках утверждений последних двух глав $P=(p_1,p_2,\dots)$ — произвольная последовательность простых чисел, k —произвольное натуральное число.

Глава 3 состоит из четырех параграфов и посвящена отображениям P-адических соленоидов.

§3.1 содержит необходимые сведения о соленоидах.

Определение 3.1.1. *Пусть* $M = (m_1, m_2, \ldots)$ — *произвольная последовательность натуральных чисел. Соленоидом* Σ_M *называется обратный предел обратной последовательности*

$$\mathbb{S}^1 \xleftarrow{f_1^2} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{f_2^3} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{f_3^4} \ldots,$$

в которой связующее отображение f_n^{n+1} *является отображением возведения в* m_n*-ую степень, то есть,* $f_n^{n+1}(z) = z^{m_n}$*, где* $z \in \mathbb{S}^1$, $n \in \mathbb{N}$.

Известно, что Σ_M представляет из себя метрический связный компакт, который не является локально связным. Относительно покоординатных операций Σ_M является компактной связной абелевой группой с единицей $e = (1, 1, \ldots)$.

Определение 3.1.2. *Компактная группа* Σ_P *называется* P*-адическим соленоидом. Если* $p_n = 2$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$*, то он называется диадическим.*

Определение 3.1.3. *Простое число* q *встречается бесконечно много раз, или часто, в* P*, если для любого* $n \in \mathbb{N}$ *есть* $m \in \mathbb{N}$*, такое, что* $m \geqslant n$ *и* $p_m = q$.

В §3.2 для P-адического соленоида Σ_P изучаются свойства его эндоморфизма $h_P^k : \Sigma_P \to \Sigma_P$, представляющего собой операцию возведения в степень k. При этом h_P^k рассматривается в качестве предельного морфизма, индуцированного морфизмом между двумя копиями одной и той же обратной последовательности, пределом которой является соленоид Σ_P.

Первая часть параграфа представляет из себя доказательство следующей теоремы, которое разбито на ряд утверждений.

Теорема 3.2.1. *Отображение* h_P^k *является* k*-листным накрывающим отображением* P*-адического соленоида тогда и только тогда, когда число* k *не имеет простого делителя, который встречается бесконечно много раз в последовательности* P.

Следствием этой теоремы и факта о делимости в группе чисел $\mathbb{Q}_P$ является

Теорема 3.2.2. *Отображение* $h_P^k : \Sigma_P \longrightarrow \Sigma_P$ *является* k*-листным накрывающим отображением* P*-адического соленоида тогда и только тогда, когда у числа* k *нет простого делителя* q*, такого, что группа рациональных чисел* $\mathbb{Q}_P$ *является* q*-делимой.*

Использование аппроксимирующего семейства накрытий, построенного в §1.2, и теорем классической теории накрывающих пространств позволяет получить следующее утверждение.

Теорема 3.2.3. *Пусть* $f : X \longrightarrow \Sigma_P$ — k*-листное связное накрывающее отображение на* P*-адический соленоид* Σ_P*. Тогда* f *эквивалентно предельному отображению* h_P^k.

Итоговым результатом этого параграфа является

Теорема 3.2.4. *Если у числа k имеется простой делитель, который встречается бесконечно много раз в последовательности P, то не существует k-листного связного накрывающего отображения на P-адический соленоид. Если же у числа k нет простого делителя, который встречается бесконечно много раз в последовательности P, то отображение h_P^k является k-листным накрывающим отображением; более того, каждое связное k-листное накрывающее отображение на Σ_P эквивалентно предельному отображению h_P^k.*

Свойства множества периодических точек отображений h_P^k изучаются в §3.3. Напомним, точка называется периодической для отображения, если она неподвижна относительно некоторой итерации этого отображения.

В рассмотрение вводится множество $S(P)$, состоящее из всех простых чисел из натурального ряда, которые не встречаются бесконечно много раз в P. В зависимости от мощности $S(P)$, имеют место следующие предложения.

Предложение 3.3.1. *Пусть $S(P) = \varnothing$. Тогда для каждого натурального числа $k \geqslant 2$ единичный элемент $e = (1, 1, \ldots)$ в P-адическом соленоиде является единственной периодической точкой отображения h_P^k.*

Предложение 3.3.2. *Пусть множество $S(P)$ бесконечно. Тогда для каждого натурального числа $k \geqslant 2$ множество периодических точек отображения h_P^k плотно в P-адическом соленоиде Σ_P.*

Предложение 3.3.3. *Пусть множество $S(P)$ непусто и конечно. Пусть $k \geqslant 2$. Если число k кратно произведению всех простых чисел, входящих в множество $S(P)$, то единичный элемент e в P-адическом соленоиде является единственной периодической точкой отображения h_P^k. Если же найдется простое число из множества $S(P)$, которое не является делителем числа k, то множество всех периодических точек отображения h_P^k плотно в соленоиде Σ_P.*

Эти три предложения доставляют критерий плотности множеств периодических точек накрытий соленоидов.

Теорема 3.3.2. *Пусть $k \geqslant 2$. Для того, чтобы множество периодических точек отображения возведения в степень k в P-адическом соленоиде было плотным необходимо и достаточно, чтобы существовало простое число, которое не встречается бесконечно много раз в последовательности P и не является делителем числа k.*

§3.4 посвящен вопросу о существовании обобщенных средних на P-адических соленоидах. В нем содержатся следующие теоремы.

Теорема 3.4.1. *Пусть $k \geqslant 2$. Тогда существует k-среднее на Σ_P в том и только том случае, когда каждый простой делитель числа k встречается бесконечно много раз в P.*

Теорема 3.4.3. *Пусть $k \geqslant 2$. Тогда существует k-среднее на Σ_P в том* *и только том случае, когда для каждого простого делителя p числа k не существуют p-листные связные накрытия соленоида Σ_P.*

Теорема 3.4.4. *Пусть $M = (m_1, m_2, \ldots)$ — произвольная последовательность натуральных чисел больше единицы и пусть натуральное число $n \geqslant 2$. Тогда существует n-среднее на соленоиде Σ_M в том и только том случае, когда каждый простой делитель числа n делит бесконечно много членов M.*

Последняя глава 4, состоящая из четырех параграфов, посвящена C^*-алгебрам. В ней рассматриваются редуцированные полугрупповые C^*-алгебры и полные матричные алгебры.

В §4.1 приведены необходимые сведения об изометрических представлениях полугрупп рациональных чисел, о полугрупповых C^*-алгебрах, об индуктивных последовательностях C^*-алгебр и групп.

Рассматривается гильбертово пространство $l^2(\mathbb{Q}_P^+)$ квадратично суммируемых комплекснозначных функций на полугруппе $\mathbb{Q}_P^+$. Для каждого $a \in \mathbb{Q}_P^+$ определяется изометрический оператор T_a на $l^2(\mathbb{Q}_P^+)$, задаваемый на векторах канонического базиса $l^2(\mathbb{Q}_P^+)$ формулой $T_a(e_b) = e_{a+b}$, где $b \in \mathbb{Q}_P^+$.

Определение 4.1.1. *Унитальная C^*-подалгебра в алгебре всех ограниченных линейных операторов на $l^2(\mathbb{Q}_P^+)$, порожденная множеством всех изометрий T_a, $a \in \mathbb{Q}_P^+$, обозначается через $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$ и называется редуцированной полугрупповой C^*-алгеброй для полугруппы $\mathbb{Q}_P^+$, или алгеброй Тёплица, порожденной $\mathbb{Q}_P^+$.*

Алгебра Теплица $\mathcal{T}$, порождаемая правым сдвигом T, определяется аналогично для полугруппы $\mathbb{Z}^+$. В §4.1 доказывается частный случай теоремы Кобурна.

Лемма 4.1.2. *Для любого числа $n \in \mathbb{N}$ существует единственный унитальный $*$-гомоморфизм C^*-алгебр $\varphi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} : T \mapsto T^n$. Более того, гомоморфизм φ изометричен.*

Лемма 4.1.2 служит инструментом для построения индуктивных последовательностей алгебр Теплица $\{\mathcal{T}, \varphi_n\}$, определяемых последовательностями $P = (p_1, p_2, \ldots)$. Связующими $*$-гомоморфизмами φ_n таких индуктивных последовательностей являются отображения, которые, по лемме 4.1.2, однозначно задаются формулой $\varphi_n : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} : T \mapsto T^{p_n}, \quad n \in \mathbb{N}$.

Такие индуктивные последовательности $\{\mathcal{T}, \varphi_n\}$ рассматриваются в §4.2, где доказывается утверждение об их индуктивных пределах.

Предложение 4.2.1. *Пусть $\{\mathcal{T}, \varphi_n\}$ — индуктивная последовательность алгебр Тёплица, определяемая последовательностью P. Тогда существует изоморфизм $\varinjlim\{\mathcal{T}, \varphi_n\} \;\simeq\; C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$ в категории C^*–алгебр.*

Также в этом параграфе для последовательностей P и натуральных чисел k строятся предельные $*$-эндоморфизмы ϕ_P^k полугрупповых C^*-алгебр $C^*(\mathbb{Q}_P^+)$ для полугрупп неотрицательных рациональных чисел $\mathbb{Q}_P^+$. Такой эндоморфизм

$$\phi_P^k := \varinjlim \left\{ \phi_n^k \,|\, n \in \mathbb{N} \right\} : C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$$

индуцируется морфизмом $\{ \phi_n^k \mid n \in \mathbb{N} \}$ между двумя копиями одной и той же последовательности алгебр Теплица $\{\mathcal{T}, \varphi_n\}$, который действует «покоординатно» между объектами копий и задается формулой $\phi_n^k : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} : T \longmapsto T^k, \quad n \in \mathbb{N}$.

В предложении 4.2.2 показывается, что $*$-гомоморфизм ϕ_P^k совпадает с $*$-эндоморфизмом C^*-алгебры $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$, который доставляется свойством универсальности для изометрического представления полугруппы $\mathbb{Q}_P^+$.

В §4.3 изучаются теоретико-множественным свойства предельных $*$-эндоморфизмов ϕ_P^k полугрупповой C^*-алгебры $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$. Эти свойства сформулированы в следующих четырех доказываемых предложениях.

Предложение 4.3.1. *Для каждого числа k эндоморфизм ϕ_P^k инъективен.*

Предложение 4.3.2. *Пусть каждый простой делитель числа k встречается бесконечно много раз в P. Тогда ϕ_P^k является $*$-автоморфизмом.*

Предложение 4.3.3. *Пусть k — простое число, которое не встречается бесконечно много раз в P. Тогда ϕ_P^k не является сюръективным.*

Предложение 4.3.4. *Если у числа k есть простой делитель, который не встречается бесконечно много раз в P, то ϕ_P^k не является сюръективным.*

Приведенные предложения позволяют сформулировать критерий.

Теорема 4.3.1. *Пусть $k \geqslant 2$. Для того, чтобы эндоморфизм φ_P^k был $*$-автоморфизмом необходимо и достаточно, чтобы каждый простой делитель числа k встречался бесконечно много раз в последовательности P.*

Из теоремы 4.3.1 и результатов о наличии деления в группах и о существовании обобщенных средних следует

Теорема 4.3.2. *Для последовательности простых чисел P и натурального числа $k \geqslant 2$ следующие условия эквивалентны:*
1) *морфизм $\varphi_P^k : C_r^*(\mathbb{Q}_P^+) \longrightarrow C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$ является $*$-автоморфизмом;*
2) *группа рациональных чисел Q_P является k-делимой;*
3) *на P-адическом соленоиде Σ_P существует k-среднее.*

В последнем §4.4 диссертации естественная структура топологической группы обратимых матриц $GL_n(\mathbb{C})$ в полной матричной алгебре $M_n(\mathbb{C})$ используется при доказательстве следующего результата. В его формулировке под элементом из $M_n(\mathbb{C})$, имеющим простой спектр, подразумевается квадратная матрица, у которой n различных собственных значений, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.4.1. *Пусть заданы отображения $f_1, f_2 : GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, среди которых хотя бы одно является открытым. Пусть $\|\cdot\|$ — произвольная норма на пространстве квадратных матриц $M_n(\mathbb{C})$. Тогда для любых матриц A, $B \in M_n(\mathbb{C})$ и любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существуют обратимые матрицы A_ε, $B_\varepsilon \in GL_n(\mathbb{C})$ с простыми спектрами, такие, что выполняются неравенства $\|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon$, $\|B - B_\varepsilon\| < \varepsilon$, и при этом произведение матриц $f(A_\varepsilon)g(B_\varepsilon)$ имеет простой спектр.*

В конце параграфа сформулирована теорема 4.4.2, являющаяся обобщением теоремы 4.4.1 на случай произвольного конечного числа отображений и матриц.

Заключение. В диссертации исследованы свойства отображений компактных групп, многочленов Вейерштрасса над банаховыми алгебрами непрерывных функций на компактных группах и $*$-гомоморфизмов полугрупповых C^*-алгебр. Все поставленные цели достигнуты.

Центральным результатом диссертации является теорема о накрывающей группе для конечнолистных накрытий произвольных компактных связных групп. На основе этой теоремы изучена структура конечнолистных накрывающих отображений на компактные связные абелевы группы и выявлена тесная связь таких отображений с полиномиальными накрытиями, определяемыми многочленами Вейерштрасса с непрерывными коэффициентами. Доказанная теорема применена к изучению вопроса о существовании обобщенных средних.

В диссертации исследованы свойства предельных морфизмов для двух важных классов объектов в категории компактных групп и в категории C^*-алгебр. Этими объектами являются соответственно P-адические соленоиды и полугрупповые C^*-алгебры для полугрупп рациональных чисел.

В работе продемонстрировано использование структуры топологической группы обратимых матриц при аппроксимации элементов полной матричной алгебры.

Среди перспективных направлений дальнейшего развития идей, представленных в диссертации, выделяются две темы. Одной из них является исследование полиномиальных накрытий и многочленов Вейрштрасса для конкретных классов компактных связных абелевых групп. Другой темой является изучение индуктивных систем C^*- алгебр над частично упорядоченными множествами. Несомненной мотивацией для исследователей таких индуктивных систем служит их значимая роль, которую они играют в аксиоматике алгебраической квантовой теории поля.

Автор выражает глубокую благодарность профессору С. А. Григоряну за плодотворные обсуждения задачи о поднятии групповой структуры и ее приложений в теории многочленов Вейерштрасса с непрерывными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бардаков, В. Г. Многочлены Вейерштрасса сингулярных кос и зацеплений / В. Г. Бардаков, А. Ю. Веснин // Чебышевский сб. – 2005. — Т. 6. — №2. — С. 36–51.

[2] Богатый, С. А. Классификация обобщенных соленоидов / С. А. Богатый, О. Д. Фролкина // Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. — Вып. XXVI. — М.: МГУ, 2005. — С. 31–59.

[3] Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли. Глава IX. Компактные вещественные группы Ли / Н. Бурбаки. — М.: Мир, 1986. — 174 с.

[4] Горин, Е. А. Группа кос и алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами / Е. А. Горин, В. Я. Лин // Успехи матем. наук. — 1969. — Т. 24. — №2. — С. 225–226.

[5] Горин, Е. А. Алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами и некоторые вопросы алгебраической теории кос / Е. А. Горин, В. Я. Лин // Матем. сб. — 1969. — Т. 78. — №4. — С. 579–610.

[6] Жиков, В. В. К проблеме существования почти периодических решений дифференциальных и операторных уравнений / В. В. Жиков // Труды ВЕЛИ. — Владимир, 1969. — Т. 8. — С. 94–188.

[7] Лин, В. Я. Косы Артина и связанные с ними группы и пространства / В. Я. Лин // Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 17. Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. — М., 1979. — С. 159–227.

[8] Мёрфи, Дж. C^*-алгебры и теория операторов / Дж. Мёрфи. — М.: Факториал, 1997. — 336 с.

[9] Понтрягин, Л. С. Непрерывные группы / Л. С. Понтрягин. — М.: Наука, 1984. — 520 с.

[10] Хелемский, А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии / А. Я. Хелемский. — М.: Наука, 1989. — 464 с.

[11] Adji, S. Crossed products by semigroups of endomorphisms and the Toeplitz algebras of ordered groups / S. Adji, M. Laca, M. Nilsen, I. Raeburn // Proc. Amer. Math. Soc. — 1994. — V. 122. — P. 1133–1141.

[12] Alexandroff, P. Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension / P. Alexandroff // Ann. Math. — 1929. — V. 30. — P. 101–187.

[13] Araki, H. Mathematical theory of quantum fields / H. Araki. — Oxford University Press, 2009. — 236 p.

[14] Aumann, G. Über Räume mit Mittelbildungen / G. Aumann // Math. Ann. — 1944. — V. 119. — P. 210–215.

[15] Bohr, H. Algebraic equations with almost-periodic coefficients / H. Bohr and D. A. Flanders // Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mathematisk-fysiske Meddelelser. — 1937. — V. 15. — P. 1–49.

[16] Brownlowe, N. Two families of Exel-Larsen crossed products / N. Brownlowe, I. Raeburn // J. Math. Anal. Appl. — 2013. — V. 398. — P. 68–79.

[17] Brunetti, R. Advances in algebraic quantum field theory, mathematical physics studies / R. Brunetti, C. Dappiaggi, K. Fredenhagen, J. Yngvason, (eds.) — Springer International Publishing, Berlin, 2015. — 453 p.

[18] Charatonik, J. J. On covering mappings on solenoids / J. J. Charatonik, P. P. Covarrubias // Proc. Amer. Math. Soc. — 2002. — V. 130. — P. 2145–2154.

[19] Charatonik, J. J. Means on arc-like continua / J. J. Charatonik // Problems from Topology Proceedings. Ed. by E. Pearl. — arXiv:math/0312456v1, 2003. — P. 197–200.

[20] Clark, A. A generalization of Hagopian's theorem and exponents / A. Clark // Topol. Appl. — 2002. — V. 117. — P. 273–283.

[21] Coburn, L. A. The C^*-algebra generated by an isometry / L. A. Coburn // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — V. 73. — №5. — P. 722–726.

[22] Coburn, L. A. The C^*-algebra generated by an isometry. II / L. A. Coburn // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — V. 137. — P. 211–217.

[23] Coburn, L. A. C^*-algebras of operators on a half-space / L. A. Coburn, R. G. Douglas // Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. — 1971. — V. 40. — P. 59–68.

[24] Coburn, L. A. C^*-algebras of operators on a half-space II. Index theory / L. A. Coburn, R. G. Douglas, D. G. Schaeffer, and I. M. Singer // Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. — 1971. — V. 40. — P. 69–79.

[25] Countryman, R. S. (Jr.) On the characterization of compact Hausdorff X for which $C(X)$ is algebraically closed / R. S. (Jr.) Countryman // Pacific. J. Math. — 1967. — V. 20. — №3. — P. 433–448.

[26] van Dantzig, D. Über metrisch homogene Räume / D. van Dantzig, B. L. van der Waerden // Abh. Math. Seminar Hamburg. — 1928. — V. 6. — P. 367–376.

[27] van Dantzig, D. Über topologisch homogene Kontinua / D. van Dantzig // Fund. Math. — 1930. — V. 15. — P. 102–125.

[28] van Dantzig, D. Zur topologischen Algebra, III, Brouwersche und Cantorsche Gruppen / D. van Dantzig // Compositio Math. — 1936. — V. 3. — P. 408–426.

[29] Deckard, D. On matrices over the ring of continuous functions on a Stonian space / D. Deckard and C. Pearcy // Proc. Amer. Math. Soc. — 1963. — V. 14. — P. 322–328.

[30] Deckard, D. On algebraic closure in function algebras / D. Deckard and C. Pearcy // Proc. Amer. Math. Soc. — 1964. — V. 15. — P. 259–263.

[31] Douglas, R. G. On the C^*-algebra of Toeplitz operators on the quater-plane / R. G. Douglas, R. Howe // Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — V. 158. — P. 203–217.

[32] Douglas, R. G. On the C^*-algebra of a one-parameter semigroup of isometries. / R. G. Douglas // Acta Math. — 1972. — V. 128. — P. 143–152.

[33] Dydak, J. Overlays and group actions / J. Dydak // Topology Appl. — 2016. — V. 207. — P. 22–32.

[34] Eckmann, B. Räume mit Mittelbildungen / B. Eckmann // Comment. Math. Helv. — 1954. — V. 28. — P. 329–340.

[35] Eckmann, B. Generalized means / B. Eckmann, T. Ganea, P. J. Hilton // Studies in Math. Anal., Stanford Univ. Press, 1962. — P. 82–92.

[36] Eckmann, B. Social choice and topology, a case of pure and applied mathematics / B. Eckmann // Expos. Math. — 2004. — V. 22 — P. 385–393.

[37] Eda, K. Finite-sheeted covering maps over 2-dimensional connected, compact Abelian groups / K. Eda and V. Matijević // Topology Appl. — 2006. — V. 153. — P. 1033–1045.

[38] Eda, K. Covering maps over solenoids which are not covering homomorphisms / K. Eda and V. Matijević // Fund. Math. — 2013. — V. 221. — P. 69–82.

[39] Eda, K. Existence and uniqueness of group structures on covering spaces over groups / K. Eda and V. Matijević // Fund. Math. — 2017. — V. 238. — P. 241–267.

[40] Fox, R. H. On shape / R. H. Fox // Fund. Math. – 1972. – V. 74. – P. 47–71.

[41] Haag, R. An algebraic approach to quantum field theory / R. Haag, D. Kastler // J. Math. Phys. — 1964. — V. 5. — №7. — P. 848–861.

[42] Haag, R. Local quantum physics: fields, particles, algebras / R. Haag. — 2nd. rev and enlarged ed. — Springer Texts and Monographs in Physics, 1996. — 390 p.

[43] Hansen, V. L. Polynomial covering spaces and homomorphisms into braid groups / V. L. Hansen // Pacific J. Math. — 1979. — V. 81. — P. 399–410.

[44] Hansen, V. L. Coverings defined by Weierstrass polynomials / V. L. Hansen // J. Reine Angew. Math. — 1980. — V. 314. — P. 29–39.

[45] Hansen, V. L. Braids and Coverings: Selected Topics. London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 18 / V. L. Hansen. — Cambridge University Press, Cambridge, 1989. — 202 p.

[46] Hansen, V. L. Weierstrass polynomials for links / V. L. Hansen // Contributions to Algebra and Geometry. — 1998. — V. 39. — P. 359–365.

[47] Hatori, O. On a characterization of the maximal ideal spaces of commutative C^*-algebras in which every element is the square of another / O. Hatori, T. Miura // Proc. Amer. Math. Soc. — 1999. — V. 128. — P. 239–242.

[48] Honma, D. On characterization of compact Hausdorff space X for which certain algebraic equation is solvable in $C(X)$ / D. Honma, T. Miura // Tokyo J. Math. — 2007. — V. 30. — P. 403–416.

[49] Jiang, B. No embeddings of solenoids into surfaces / B. Jiang, S. Wang, H. Zheng // Proc. Amer. Math. Soc. — 2008. — V. 136. — №10. — P. 3697–3700.

[50] Kawamura, K. On the existence of continious (approximate) roots of algebraic equations / K. Kawamura, T. Miura // Topology Appl. — 2007. — V. 154. — №2. — P. 434–442.

[51] Kawamura, K. On the root closedness of continuous function algebras / K. Kawamura, T. Miura // Topology Appl. — 2009. — V. 156. — №3. — P. 624–628.

[52] Kawamura, K. Higher dimensional compacta with algebraically closed function algebras / K. Kawamura // Tokyo J. Math. — 2009. — V. 32. — №2. — P. 441–445.

[53] Keesling, J. The group of homeomorphisms of a solenoid / J. Keesling // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — V. 172. — P. 119–131.

[54] Kolmogorov, A. N. Sur la notion de la moyenne / A. N. Kolmogorov // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (ser. 6) — 1930. — V. 12. — P. 388–391.

[55] Krupski, P. Means on solenoids / P. Krupski // Proc. Amer. Math. Soc. — 2003. — V. 131. — P. 1931–1933.

[56] Li, X. Semigroup C^*-algebras and amenability of semigroups / X. Li // J. Funct. Anal. — 2012. — V. 262. — P. 4302–4340.

[57] Li, X. Nuclearity of semigroup C^*-algebras and the connection to amenability X. Li // Adv.Math. — 2013. — V. 244. — P. 626–662.

[58] Li, X. Semigroup C*-Algebras / X. Li // arxiv:1707.05940v1 [math.OA] — 2017. — 105 p.

[59] Mardešić, S. Classifying overlay structures of topological spaces / S. Mardešić, V. Matijević // Topology Appl. — 2001. — V. 113. — P. 167–209.

[60] Matijević, V. Classifying finite-sheeted coverings of paracompact spaces / V. Matijević // Revista Mat. Comput. — 2003. — V. 16. — P. 311–327.

[61] Miura, T. On a characterization of the maximal ideal spaces of algebraically closed commutative C^*-algebras / T. Miura, K. Niijima // Proc. Amer. Math. Soc. — 2003. — V. 131. — P. 2869–2876.

[62] Murphy, G. J. Ordered groups and Toeplitz algebras / G. J. Murphy // J. Oper.Theory. — 1987. — V. 18. — P. 303–326.

[63] Murphy, G. J. Simple C^*-algebras and subgroups of Q / G. J. Murphy // Proc. Amer. Math. Soc. — 1989. — V. 107. — P. 97–100.

[64] Murphy, G. J. Ordered groups and crossed products of C^*-algebras / G. J. Murphy // Pacific J. Oper. Math. — 1991. — V. 2. — P. 319–349.

[65] Murphy, G. J. Crossed products of C^*-algebras by semigroups of automorphisms / G. J. Murphy // Proc. Lond. Math. Soc. — 1994. — V. 3. — P. 423–448.

[66] Pedersen, G. K. C^*-algebras and their automorphism groups / G. K. Pedersen. — London, New York, San Francisco: Academic Press, 1979. — 416 p.

[67] Ruzzi, G. Homotopy of posets, net-cohomology and superselection sectors in globally hyperbolic spacetimes / G. Ruzzi // Rev. Math. Phys. — 2005. — V. 17. — №9. — P. 1021–1070.

[68] Ruzzi, G. A new light on nets of C^*-algebras and their representations / G. Ruzzi, E. Vasselli // Comm. Math. Phys. — 2012. — V. 312. — №3. — P. 655—694.

[69] Ruzzi, G. The $C_0(X)$-algebra of a net and index theory / G. Ruzzi, E. Vasselli // J. Functional Anal. — 2014. — V. 267. — №1. — P. 112–143.

[70] Ruzzi, G. The K-homology of nets of C^*-algebras / G. Ruzzi, E. Vasselli // J. Geometry and Phys. — 2014. — V. 86. — P. 476–491.

[71] Scheffer, W. A. Maps between topological groups that are homotopic to homomorphisms / W. A. Scheffer // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — V. 33. — P. 562–567.

[72] Vasselli, E. Presheaves of symmetric tensor categories and nets of C^*-algebras / E. Vasselli // J. Noncommut. Geometry. — 2015. — V. 9. — №1. — P. 121–159.

[73] Vietoris, L. Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen / L. Vietoris // Math. Ann. — 1927. — V. 97. — P. 454–472.

[74] Walther, A. Algebraische Funktionen von fastperiodischen Funktionen / A. Walther // Monatshefte fur Mathematik und Physik. — 1933. — V. 40. — P. 444–457.

[75] Youcheng, Z. Covering mappings on solenoids and their dynamical properties / Z. Youcheng // Chinese Sci. Bull. — 2000. — V. 45. — P. 1066–1070.

Работы автора по теме диссертации

В научных изданиях из списков RSCI, Scopus, WoS.

[76] Гумеров, Р. Н. Многочлены Вейерштрасса и накрытия компактных групп / Р. Н. Гумеров // Сибирский матем. журнал. — 2013. — Т. 54. — №2. — С. 320–324. — Пер. на англ.: Sib. Math. J. — 2013. — V. 54.— №2. — P. 243–246.

[77] Гумеров, Р. Н. Характеры и накрытия компактных групп / Р. Н. Гумеров // Изв. Вузов. Матем. — 2014. — Т. 58. — №4. — С. 11–17. — Пер. на англ.: Russ. Math. — 2014. — V. 58. — №4. — P. 7–13.

[78] Гумеров, Р. Н. Предельные автоморфизмы C^*-алгебр, порожденных изометрическими представлениями полугрупп рациональных чисел / Р. Н. Гумеров // Сибирский матем. журнал. — 2018. — Т. 59. — №1. — С. 95–109. — Пер. на англ.: Sib. Math. J. — 2018. — V. 59.— №1. — P. 73–84.

[79] Гумеров, Р. Н. Об индуктивных пределах систем C^*-алгебр / Р. Н. Гумеров, Е. В. Липачева, Т. А. Григорян // Изв. Вузов. Матем. — 2018. —Т. 62. — №7. — С. 79–85. — Пер. на англ.: Russ. Math. — 2018. — V. 62. — №7. — P. 68–73.

[80] Гумеров, Р. Н. Нормальные расширения полугрупп и вложения полугрупповых C^*-алгебр / Р. Н. Гумеров // Труды МФТИ. — 2020. — Т. 12. — №1. — С. 74–82.

[81] Гумеров, Р. Н. О накрывающих группах / Р. Н. Гумеров // Изв. Вузов. Матем. — 2020. — Т. 64. — №3. — С. 85–91.

[82] Grigorian, S. A. Group structure in finite coverings of compact solenoidal groups / S. A. Grigorian, R. N. Gumerov, A. V. Kazantsev // Lobachevskii J. Math. — 2000. — V. 6. — P. 39–46.

[83] Grigorian, S. A. On a covering group theorem and its applications / S. A. Grigorian, R. N. Gumerov // Lobachevskii J. Math. — 2002. — V. 10. — P. 9–16.

[84] Gumerov, R. N. On finite-sheeted covering mappings onto solenoids / R. N. Gumerov // Proc. Amer. Math. Soc. — 2005. — V. 133. — P. 2771–2778.

[85] Gumerov, R. N. On the existence of means on solenoids / R. N. Gumerov // Lobachevskii J. Math. — 2005. — V. 17. — P. 43–46.

[86] Grigorian, S. A. On the structure of finite coverings of compact connected groups / S. A. Grigorian, R. N. Gumerov // Topology Appl. — 2006. — V. 153. — P. 3598–3614.

[87] Gumerov, R. N. Approximation by matrices with simple spectra / R. N. Gumerov, S. I. Vidunov // Lobachevskii J. Math. — 2016. — V. 37. — №3. — P. 240–243.

[88] Gumerov, R. N. On norms of operators generated by shift transformations arising in signal and image processing on meshes supplied with semigroup structures / R. N. Gumerov // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng., 2016. — V. 158. — 012042. — Режим доступа: http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012042.

[89] Gumerov, R. N. Coverings of solenoids and automorphisms of semigroup C*-algebras / R. N. Gumerov // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seria Fiziko-Matematicheskie Nauki. — 2018. — V. 160. — №2. — P. 275–286.

[90] Gumerov, R. N. A low-rank approximation of tensors and the topological group structure of invertible matrices / R. N. Gumerov, A. S. Sharafutdinov // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. — 2018. — V. 160. — №4. — P. 788–796.

[91] Gumerov, R. N. Inductive limits for systems of Toeplitz algebras / R.N. Gumerov // Lobachevskii J. Math. — 2019. — V. 40. — №4. — P. 469–478.

[92] Grigorian, S. A. On extensions of semigroups and their applications to Toeplitz algebras / S. A. Grigorian, R. N. Gumerov, E. V. Lipacheva // Lobachevskii J. Math. — 2019. — V. 40. — №12.— P. 2052–2061.

[93] Gumerov, R. N. On a topology and limits for inductive systems of C^*-algebras over partially ordered sets / R. N. Gumerov, E. V. Lipacheva, T. A. Grigoryan // Int. J. Theor. Phys.(2019).— Published: 05 March 2019. — Режим доступа: https://doi.org/10.1007/s10773-019-04048-0.

[94] Gumerov, R. N. Inductive systems of C^*-algebras over posets: a survey / R. N. Gumerov, E. V. Lipacheva // Lobachevskii J. Math. — 2020. — V. 41. — №4. — P. 641–651.

[95] Gumerov, R. N. Inductive sequences of Toeplitz algebras and limit automorphisms / R. N. Gumerov // Lobachevskii J. Math. — 2020. — V. 41. — №4. — P. 634–640.

Список прочих публикаций.

[96] Grigorian, S. A. On the structure of finite coverings of compact connected groups / S. A. Grigorian, R. N. Gumerov // https://arxiv.org/pdf/math/0403329.pdf. — 2004. — 17 p.

[97] Gumerov, R. N. On finite-sheeted covering mappings onto solenoids / R. N. Gumerov // https://arXiv:math/0312288v1. — 2003. — 8 p.

[98] Гумеров, Р. Н. Средние на компактных группах / Р. Н. Гумеров // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 25. Матер. межд. конф. «Актуальные проблемы математики и механики» (Казань, 26 сентября — 1 октября 2004 года). — Казань: Изд-во КГУ, 2004. — С. 97–98.

[99] Гумеров, Р. Н. Динамические свойства накрывающих отображений соленоидов / Р. Н. Гумеров // Тезисы докл. межд. конф. «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посвящ. 100–летию академика С. М. Никольского (Москва, МИРАН им. В. А. Стеклова, 23–29 мая 2005). — Москва, 2005. — с. 92.

[100] Гумеров, Р. Н. Свойства отображений соленоидов / Р. Н. Гумеров // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 30. Матер. Седьмой межд. Казанск. школы — конф. «Теория функций, ее прилож. и смежн. вопросы» (Казань, 27 июня – 4 июля 2007 года). — Казань: Изд-во КГУ, 2005. — С. 53–54.

[101] Гумеров, Р. Н. О накрытиях компактных групп / Р. Н. Гумеров // Тезисы докладов межд. конф. «Александровские чтения — 2006», посвящ. 110–летию со дня рождения академика П. С. Александрова (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, мех.-мат. фак-т, 30 мая — 2 июня 2006). – М.: Интернет-Ун-т Информ. Технологий, 2006. — С. 14.

[102] Гумеров, Р. Н. Динамика компактных групп / Р. Н. Гумеров // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 35. Матер. Восьмой межд. Казанск. школы — конф. «Теория функций, ее прилож. и смежн. вопросы» (Казань, 27 июня — 4 июля 2007 года). — Казань: Изд-во Казанск. матем. о-ва. Изд-во КГУ, 2007. — С. 87.

[103] Гумеров, Р. Н. О свойствах отображений топологических групп / Р. Н. Гумеров // Матер. Одиннадцатой межд. Казанск. школы — конф. «Теория функций, ее прилож. и смежные вопросы». Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 46. — Казань: К(П)ФУ, 2013. — С. 170–171.

[104] Гумеров, Р. Н. Об одной задаче матричной аппроксимации / Р. Н. Гумеров, С. И. Видунов // Матер. Десятой межд. конф. «Сеточные методы для краевых задач и прилож.» (Казань, 24–29 сентября 2014). — Казань: К(П)ФУ, 2014. — С. 240–241.

[105] Гумеров, Р. Н. Аппроксимация матрицами с простыми спектрами: топологический подход к задачам, возникающим в анализе данных и в теории тензорных рангов / Р. Н. Гумеров, С. И. Видунов // Матер. Двенадцатой межд. Казанск. школы — конф. «Теория функций, ее прилож. и смежные вопросы». Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского, Т. 51. — Казань: К(П)ФУ, 2015. — С. 164–166.

[106] Гумеров, Р. Н. Аппроксимация накрывающих отображений. Учеб.-метод. пособие / Р. Н. Гумеров. — Казань: КГУ, 2008. — 17 с.

[107] Гумеров, Р. Н. Конечнолистные накрытия соленоидов. Учеб.-метод. пособие. / Р. Н. Гумеров. — Казань: К(П)ФУ, 2014. — 17 с.

[108] Grigorian, S. A. On covering groups of compact solenoids / S. A. Grigorian, R. N. Gumerov, A. V. Kazantsev // Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 5. Мат-лы межд. науч. конф. «Актуальные проблемы математики и механики» (Казань, 1–3 октября 2000). — Казань: Унипресс, 2000. — С. 240–241.

[109] Gumerov, R. N. Covering spaces of compact groups / R. N. Gumerov // Abstracts of talks of the Tenth Prague Topological Symposium (Prague, August 13–19, 2006). — Elsevier, 2006. – P. 33–34.

[110] Gumerov, R. N. Matrices with simple spectra and Weierstrass polynomials arising in estimations of tensor ranks / R. N. Gumerov // Abstracts of talks of the International Mathematical Conference (Ufa, September 27–30, 2016). — Ufa: RITS BashSU, 2016. — P. 48–49.

[111] Gumerov, R. N. Weierstrass continuous varieties arising from coverings of compact groups and tensor approximation problems / R. N. Gumerov // Матер. межд. конф. «Фундаментальные проблемы алгебры, анализа и геометрии», посвящ. юбилеям П. А. и А. П. Широковых. — Казань: К(П)ФУ, изд-во АН РТ, 2016. — с. 47–48.

[112] Gumerov, R. N. Limit automorphisms of semigroup C*-algebras / R. N. Gumerov // Abstracts. Intern. Math. Conf. on Function Theory dedic. to the centenary of corresp. member of USSR Academy of Sc. A. F. Leont'ev (Ufa, May 24–24, 2017). — Ufa, Russia: RITS BashSU, 2017. — P. 186.

[113] Gumerov, R. N. Chaotic coverings of solenoids and automorphisms of semigroup C^*-algebras / R. N. Gumerov // Abstracts of talks of the International conference «Probability Th. and Math. Stat.» (Kazan, November 7–10, 2017). — Kazan: KFU, 2017. — P. 10.

[114] Gumerov, R. N. Weierstrass polynomials and the structure of finite-sheeted covering mappings onto compact groups / R. N. Gumerov // Тезисы докладов межд. конф. «Комплексный анализ и геометрия» (Уфа, 23–26 мая 2018), отв. ред. З. Ю. Фазуллин. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2018. — С. 17–18.

[115] Gumerov, R. On inductive systems of C^*-algebras arising in algebraic quantum field theory / R. Gumerov, E. Lipacheva, T. Grigoryan // Abstracts of talks of the 14-th Biennial IQSA Conference «Quantum Structures – 2018» (Kazan, July 16–20, 2018). — Kazan: KFU, 2018. — P. 29.

[116] Gumerov, R. On inductive limits for systems of C^*-algebras / R. Gumerov, E. Lipacheva, T. Grigoryan // Abstracts. Intern. Conf. dedic. to the 100-th ann. of M. Djrbashyan (Yerevan, Armenia, October 22–24, 2018). — http://math.sci.am/sites/default/files/Djrbashyan-100.pdf — P. 32.

[117] Gumerov, R. N. Inductive limits for systems of Toeplitz algebras and their automorphisms / R. N. Gumerov // Abstracts. Intern. Conf. «Mathematical Physics, Dynamical Systems, Infinite-Dimensional Analysis» (Dolgoprudny, June 17–21, 2019). — Dolgoprudny, Russia, 2019. — P. 36.

[118] Gumerov, R. N. On inductive systems of semigroup C^*-algebras / R. N. Gumerov // Матер. международ. конф. «Алгебра и матем. логика: теория и прилож.», посвящ. 125–летию со дня рожд. основателя каф. алгебры Казанск. унив-та чл.-корр. АН СССР Н. Г. Чеботарева и 75–летию зав. каф. ак. АН РТ М. М. Арсланова (Казань, 24–28 июня 2019). — Казань: К(П)ФУ, 2019. — С. 44–45.