УДК 517.98, 519.2

В. Ж. Сакбаев

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Российский университет дружбы народов

О законе больших чисел для композиций независимых случайных операторов и случайных полугрупп

В настоящей работе изучаются случайные линейные операторы в банаховых пространствах и случайные однопараметрические полугруппы таких операторов. Исследуется справедливость закона больших чисел для последовательностей итераций случайных операторов при различных определениях второго момента случайного оператора. Получены условия, достаточные для выполнения закона больших чисел для полугрупп случайных линейных операторов в банаховом пространстве. Приведены примеры нарушения закона больших чисел для таких полугрупп или для случайных унитарных операторов в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: закон больших чисел, случайное отображение, случайная полугруппа, теорема Чернова.

V. Zh. Sakbaev

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
Peoples' Friendship University of Russia

On the law of the large numbers for the composition of independent random operators and random semigroups

The random linear operators in Banach spaces and one-parameter semigroups of such operators are studied. The law of large numbers for a sequence of compositions of random operators is investigated. The sufficient conditions for the law of large numbers for a sequence of compositions of independent random semigroups of linear operators in some Banach space are given. Examples of violation of the law of large numbers for these semigroups and for the random unitary operators in the Hilbert space are presented.

Key words: large numbers law, random map, random semigrop, Chernoff theorem.

Введение

В настоящей работе будут исследованы такие объекты как случайные операторы, случайные полугруппы и их итерации.

В работах С. Какутани, В. И. Оселедца, Р. И. Григорчука, М. Л. Бланка (см. [1, 2, 8, 16]) случайные динамические системы с дискретным временем изучаются как последовательности композиций из n независимых случайных отображений фазового пространства. В указанных работах изучаются инвариантные меры, разложение динамики на детерминированную и стохастическую компоненты, эргодические свойства, аттракторы.

В работах А. В. Скорохода ([12]) случайные динамические системы с непрерывным временем (стохастические полугруппы) рассматриваются как пределы последовательности композиций из n независимых случайных линейных ограниченных преобразований банахова пространства при $n \to \infty$ и измельчении шага по времени. Изучаются условия на случайные полугруппы, достаточные для того, чтобы эти случайные полугруппы являлись решениями стохастических дифференциальных уравнений. Изучаются предельные теоремы для произведений независимых случайных линейных ограниченных операторов в схеме серий, в том числе асимптотика поведения произведения независимых одинаково распределенных операторов в схеме серий.

В работах [3, 6, 7] изучаются случайные полугруппы – случайные величины со значениями во множестве полугрупп, а также итерации случайных полугрупп – последовательности композиций из n, $n \in \mathbf{N}$ независимых случайных полугрупп линейных ограниченных преобразований банахова пространства. Установлены условия на случайные полугруппы, достаточные для того, чтобы математическое ожидание итераций случайных полугрупп сходилось к полугруппе при стремлении к бесконечности кратности итераций.

В настоящей работе исследуется предельное поведение последовательности n-кратных композиций независимых одинаково распределенных случайных полугрупп. Будут приведены условия, достаточные для выполнения и достаточные для нарушения закона больших чисел для композиции независимых одинаково распределенных случайных полугрупп.

Для изучения случайных полугрупп и динамических систем нам потребуется изучить математическое ожидание и дисперсию случайных операторов и их степеней. Математическое ожидание операторнозначных случайных величин определяется с помощью интеграла Петтиса, а дисперсии могут определяться с помощью различных неотрицательных квадратичных отображений как отклонения среднего значения квадратичного отображения случайного оператора от значения квадратичного отображения на математическом ожидании случайного оператора. При этом каждому такому квадратичному отображению соответствует специальный выбор второго момента случайного оператора.

Здесь будут исследованы аналоги таких предельных теорем для сумм независимых случайных величин как закон больших чисел и центральная предельная теорема. Для последовательности композиций из n независимых случайных операторов (или полугрупп) будет исследовано математическое ожидание и второй момент. Стремлению к нулю при $n \to \infty$ второго момента для среднего геометрического совокупности из n случайных операторов означает выполнеение «некоммутативного мультипликативного» закона больших чисел для случайных операторов. Ключевым моментом является выбор определения среднего геометрического композиции n независимых случайных операторов $\mathbf{A}_1, ...\mathbf{A}_n$ – является ли таким средним оператором оператор

$$\hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}_n \circ ... \circ \mathbf{A}_1)^{\frac{1}{n}}$$

или оператор

$$\bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\mathbf{A}_1)^{\frac{1}{n}} \ ?$$

Установлены условия на случайные операторы, достаточные для выполнения закона больших чисел, приведены примеры случайных операторов, для которых закон больших чисел не выполняется (и тем более не может быть выполнена центральная предельная теорема).

Случайные операторы и полугруппы

Для изучения случайных полугрупп и операторов введем следующее расширение понятия случайной величины. Всюду далее измеримым пространством называется пара $(\Omega, \mathcal{A})$, где Ω – множество, $\mathcal{A}$ – некоторая алгебра его подмножеств; вероятностным пространством называется набор $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, где $(\Omega, \mathcal{A})$ – измеримое пространство, а μ – неотрицательная нормированная конечно аддитивная функция на алгебре $\mathcal{A}$, которую мы называем также вероятностной мерой. Случайной величиной мы называем $\mathcal{A}$-измеримую функцию ξ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ со значениями в некотором измеримом пространстве. Случайная величина ξ может принимать как числовые значения, так и значения в топологическом векторном пространстве, снабженном минимальной алгеброй подмножеств, содержащей топологию. Например, если такая случайная величина ξ принимает значения в пространстве операторов, то она называется случайным оператором, аналогично определяется и понятие случайной полугруппы (определение 1 ниже).

Понятие случайной полугруппы состоит в следующем. Пусть $Y_s(X)$ – топологическое векторное пространство сильно непрерывных отображений $\mathbf{F}$ полуоси $R_+ = [0, +\infty)$ в банахово пространство $B(X)$ линейных преобразований банахова пространства X, топология τ_s на котором определяется семейством функционалов $\varphi_{T,u}$, $T \geq 0$, $u \in X$, действующих по правилу $\varphi_{T,u}(\mathbf{F}) = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|\mathbf{F}(t)u\|_X$; пусть также X_* – такое банахово пространство, что $(X_*)^* = X$.

Определение 1. *Случайной полугруппой мы называем случайную величину G, принимающую значения в множестве $\mathcal{S}(X)$ сильно непрерывных однопараметрических полугрупп операторов, действующих в банаховом пространстве X (алгебра $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ подмножеств $\mathcal{S}(X)$, превращающая его в измеримое пространсво, представляет собой минимальную алгебру подмножеств множества $\mathcal{S}(X)$, содержащую все множества из топологии $\tau_{\mathcal{S}}$, индуцированой на $\mathcal{S}(X)$ из топологического пространства $Y_s(X)$).*

Математическим ожиданием случайной полугруппы G (см. формулу (3) ниже) является операторнозначная функция F_G, не являющаяся, вообще говоря, полугруппой.

Математическим ожиданием случайной полугруппы G как отображения пространства с мерой $(\Omega, 2^{\Omega}, \mu)$ в топологическое пространство $Y_s(X)$ будем называть интеграл Петтиса:

$$M[G] = \int\limits_{\Omega} G_{\varepsilon} d\mu(\varepsilon),$$

где $M[G]$ – такой элемент пространства $Y_s(X)$, что для любых $t \in R_+, A \in X, g \in X_*$ выполняется равенство

$$\langle M[G](t)A, g\rangle = \int\limits_{\Omega} \langle G_{\varepsilon}(t)A, g\rangle d\mu(\varepsilon). \tag{1}$$

Здесь через $\langle A, g\rangle$ обозначается значение на элементе $g \in X_*$ линейного непрерывного функционала $A \in X = X_*^*$.

Теорема 1 предоставляет достаточные условия существования последнего интеграла как интеграла от ограниченной числовой функции по конечно аддитивной мере $\mu \in W(E)$ (см. [4]).

Теорема 1 [7]. *Пусть μ – вещественнозначная мера на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества E с ограниченной вариацией. Тогда если измеримое отображение $\xi :\ E \to Y_s(X)$ является равномерно ограниченным и существует такое плотное в пространстве X линейное подпространство $\mathcal{D}$, что для каждого $A \in \mathcal{D}$ семейство отображений $\xi_{\varepsilon}(t)A \in C(R_+, X)$, $\varepsilon \in E$ является сильно равномерно непрерывным, то $M\xi(t) \in Y_s(X)$.*

Если на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ определена случайная полугруппа G, то ее генератором называется случайная величина $\mathbf{H}_G$ на том же вероятностном пространстве, определяемая условием: для каждого $\varepsilon \in \Omega$ значение $\mathbf{H}_G(\varepsilon)$ случайной величины $\mathbf{H}_G$ представляет собой генератор полугруппы $G(\varepsilon) \in \mathcal{S}(X)$. Таким образом, случайная величина $\mathbf{H}_G$ принимает значение в множестве $\mathcal{G}(X)$ генераторов сильно непрерывных однопараметрических полугрупп, действующих в пространстве X. Топология τ_G на множестве $\mathcal{G}(X)$ определяется условием, чтобы биекция $\mathcal{J}$ между $S(X)$ и $G(X)$, при которой каждой полугруппе соответствует ее генератор, была гомеоморфизмом топологических пространств $(S(X), \tau_S)$ и $(G(X), \tau_G)$. Таким образом, $\mathbf{H}_G = \mathcal{J} \circ G$, иначе говоря, $\mathbf{H}_G$ – это измеримая функция на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (случайная величина), принимающая значения в топологическом пространстве генераторов $\mathcal{G}(X)$.

Напомним (см. [7, 17]), что две сильно непрерывные оператор-функции $\mathbf{F} :\ [0, +\infty) \to B(X)$ и $\mathbf{G} :\ [0, +\infty) \to B(X)$, удовлетворяющие условию $\mathbf{F}(0) = \mathbf{G}(0) = \mathbf{I}$, называются эквивалентными по Чернову, если для любого $u \in H$ и любого $T > 0$ выполняется условие: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{t\in[0,T]} \|([\mathbf{F}(\frac{t}{n})]^n - [\mathbf{G}(\frac{t}{n})]^n)u\|_X = 0$.

Если математическим ожиданием случайной полугруппы G является операторнозначная функция F_G, эквивалентная по Чернову (см. [17]) некоторой полугруппе U_G, то генератор полугруппы U_G и будет называться математическим ожиданием случайного генератора $\mathcal{H}_G$ случайной полугруппы G.

Такое определение усреднения генераторов является расширением процедуры усреднения в пространстве операторов, поскольку в случае если все значения случайного генератора ограничены, то его среднее значение совпадает с обычным средним значением элементов банахова пространства $B(H)$ (см. [6]). В случае, когда значения случайного генератора являются неограниченными операторами, естественное определение математического ожидания случайной величины $\mathcal{H}_G$ может не быть корректным в силу отсутствия возможности складывать неограниченные операторы, но введенное нами определение применимо (см. [6, 7]).

Моменты случайных операторов и полугрупп

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство.

Рассмотрим случайную величину $\mathbf{U}$ со значениями в банаховом пространстве $X = B(H)$ и определим объекты, характеризующие моменты ее распределения.

Математическим ожиданием случайного оператора $\mathbf{U}$ называется оператор $M[\mathbf{U}] \in B(H)$, равный интегралу Петтиса от вектор-функции $\mathbf{U}: E \to B(H)$ по мере μ. Математическое ожиданиее является моментом первого порядка для векторной случайной величины $\mathbf{U}$.

Первый момент векторной случайной величины $\mathbf{U}$ характеризуют математические ожидания различных линейных отображений пространства X. Если линейное отображение $F: X \to Y$ непрерывно, то $M[F(\mathbf{U})] = \mathbf{F}(\mathbf{M}[\mathbf{U}])$.

Охарактеризовать второй момент векторной случайной величины $\mathbf{U}$ могут математические ожидания различных неотрицательно-определенных квадратичных отображений пространства X. Дисперсией случайной величины $\mathbf{U}$ является значние второго момента на отклонении случайной величины от ее математического ожидания.

1) Например, если отображение $K: B(H) \to B^+(H)$ действует по правилу $K(\mathbf{U}) = \mathbf{U}^*\mathbf{U}$, то соответствующим функции K вторым моментом случайной величины $\mathbf{U}$ является неотрицательно-определенный оператор $M[K(\mathbf{U})] = M[\mathbf{U}^*\mathbf{U}]$, а дисперсией случайной величины $\mathbf{U}$ является неотрицательный оператор $D_K(\mathbf{U}) = M[K(\mathbf{U} - M[\mathbf{U}])] = M[K(\mathbf{U})] - K(M[\mathbf{U}])$.

2) Непосредственно вторым моментом векторнозначной случайной величины $\mathbf{U}$ является ковариационный оператор, то есть билинейная форма на пространстве X^*, определяемая так: билинейная форма $\beta_{\mathbf{U}}$ каждой упорядоченной паре векторов $(f, g) \in X^* \times X^*$ сопоставляет число $\beta_{\mathbf{U}}(f, g) = M[\overline{f(\mathbf{U})}g(\mathbf{U})]$. При этом соответствующая дисперсия случайной величины $\mathbf{U}$ является билинейной формой $D_\beta(\mathbf{U})$ на пространстве X^*, определяемая для каждой пары векторов $(f, g) \in X^* \times X^*$ равенством $D_\beta(\mathbf{U})(f, g) = M[\overline{(f(\mathbf{U} - M[\mathbf{U}])}(g(\mathbf{U} - M[\mathbf{U}]))] = M[\overline{f(\mathbf{U})}g(\mathbf{U})] - \overline{M[f(\mathbf{U})]}M[g(\mathbf{U})]$.

3) Кроме того, динамика пространства квантовых состояний (динамика алгебры наблюдаемых) прпедставляет собой положительно определенную квадратичную функцию $\Lambda: B(H) \to B(B^*(H))$ (либо $V: B(H) \to B(B(H))$), действующую по правилу $\Lambda(\mathbf{U}) = \mathcal{T}_{\mathbf{U}}$, где $\mathcal{T}_{\mathbf{U}}(\rho) = \mathbf{U}\rho\mathbf{U}^*$ (либо $V(\mathbf{U}) = \mathbf{T}_{\mathbf{U}}$, где $\mathbf{T}_{\mathbf{U}}(\mathbf{A}) = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$). Отображения $\mathcal{T}$ и $\mathbf{T}$ переводят положительные элементы в положительные. Тогда второй момент случайной величины $\mathbf{U}$ может быть определен как $M[\Lambda(\mathbf{U})]$ (как $M[V(\mathbf{U})]$), а соответствующие дисперсии случайной величины $\mathbf{U}$ определяются равенствами $D_\Lambda(\mathbf{U}) = M[\Lambda(\mathbf{U})] - \Lambda(M[\mathbf{U}]) = M[\Lambda(\mathbf{U} - M[\mathbf{U}])]$ (либо как $D_V(\mathbf{U}) = M[V(\mathbf{U})] - V(M[\mathbf{U}]) = M[V(\mathbf{U} - M[\mathbf{U}])]$).

Общим свойством приведенных примеров вторых моментов является следующее – стремление к нулю значений дисперсии на последовательности случайных операторов свидетельствует об асимптотической детерминированности предела последовательности случайных операторов.

Рассмотрим показательный для дальнейшего изложения пример случайного унитарного оператора и случайных унитарных полугрупп. Особенностями рассматриваемого примера являются конечная аддитивность меры на «вероятностном» пространстве $(E, 2^E, \mu)$

и некомпактность (в сильной операторной топологии) множества значений случайной величины $\mathbf{U}$.

Пример 1. Пусть $(E, 2^E, \mu)$ – пространство с неотрицательной, нормированной конечно аддитивной мерой μ на алгебре всех подмножеств множества E и пусть $(B(H), \mathcal{A}_s)$ – пространство ограниченных линейных операторов, снабженное структурой измеримого пространства с алгеброй подмножеств $\mathcal{A}_s$ – минимальной алгеброй, содержащей все открытые подмножества сильной операторной топологии τ_s на пространстве ораниченных линейных операторов $B(H)$. Тогда любое отображение $\mathbf{U}:\ E \to B(H)$ является измеримым отображением пространства с мерой $(E, 2^E, \mu)$ в измеримое пространство $(B(H), \mathcal{A}_s)$, то есть, случайным оператором.

Пусть $\mathbf{L}$ – максимальный симметрический но не самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, и пусть $E = (0,1)$ и $\mathbf{L}_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, – однопараметрическое семейство самосопряженных операторов, сильный граф-предел которых при $\varepsilon \to 0$ совпадает с оператором $\mathbf{L}$ (существование таких операторов установлено в работе [10]). Такое семейство самосопряженных операторов названо в работе [10] самосопряженной регуляризацией максимального симметрического оператора $\mathbf{L}$.

Пусть $\mathbf{U}_\varepsilon = e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon},\ t \geq 0$, где $\mathbf{L}_\varepsilon$, $\varepsilon \in E = (0,1),\ \varepsilon \to +0$ – самосопряженная регуляризация максимального симметрического оператора $\mathbf{L}$, и пусть на алгебре 2^E всех подмножеств множества E задана неотрицательная нормированная мера μ. Тогда отображение $E \ni \varepsilon \to \{e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon},\ t \geq 0\} \in Y_s(H)$ является случайной полугруппой. При фиксированном значении параметра $t > 0$ получаем случайный оператор $\mathbf{U}_\varepsilon(t) = e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon}$, $\varepsilon \in E$, со значениями во множестве унитарных операторов.

Исследуем сначала первый и второй моменты случайного оператора $\mathbf{U}_\varepsilon(t)$ при фиксированном $t > 0$ со значениями в пространстве $B(H)$, случайной полугруппы $\mathbf{U}_\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, со значениями в пространстве $C_s(R_+, B(H))$ и их случайного генератора $\mathbf{L}_\varepsilon$ со значениями во множестве $\mathcal{G}(H)$ генераторов сильно непрерывных полурупп в гильбертовом пространстве H. Дальнейшей целью является изучение предельного поведения первого и второго моментов у композиции из n независимых одинаково распределенных случайных операторов $\mathbf{U}:\ E \to B(H)$ (или случайных полугрупп $\mathbf{U}(\cdot):\ E \to Y_s(H)$) при $n \to \infty$.

Исследуем теперь математическое ожидание и дисперсию случайного оператора из примера 1. Чтобы учесть предельное поведение семейства регуляризованных операторов $\mathbf{L}_\varepsilon$, $\varepsilon \in E = (0,1)$ при $\varepsilon \to 0$ рассмотрим случайные операторы из примера 1 при специальном выборе мер на множестве параметров регуляризации E из класса $W_0(E)$ – класса неотрицательных нормированных конечно аддитивных мер μ на алгебре подмножеств 2^E, сосредоточенных в произвольной проколотой окрестности точки $\varepsilon_0 = 0$ в том смысле, что для любого множества $A \in 2^E$, замыкание которого не содержит точки 0, выполняется условие $\mu(A) = 0$.

Математическое ожидание случайных операторов из примера 1 при условии $\mu \in W_0(E)$ представляет следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любой меры* $\mu \in W_0(E)$ *выполняется равенство* $M[\mathbf{U}](t) = \int\limits_E e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon} d\mu(\varepsilon) = e^{-it\mathbf{L}}$ *при условии* $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* + i\mathbf{I})) = 0$ *либо выполняется равенство* $M[\mathbf{U}](t) = \int\limits_E e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon} d\mu(\varepsilon) = e^{-it\mathbf{L}^*}$ *при условии* $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* + i\mathbf{I})) \neq 0$.

Действительно, в силу опрелеления самосопряженной регуляризации (см. [10]), при $\varepsilon \to +0$ последовательность унитарных операторов $\{\mathbf{U}_\varepsilon\}$, $\varepsilon \to +0$ либо сходится в сильной операторной топологии к оператору $e^{-it\mathbf{L}}$ при условии $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* + i\mathbf{I})) = 0$, либо сходится в слабой операторной топологии к оператору $e^{-it\mathbf{L}^*}$ при условии $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* + i\mathbf{I})) \neq 0$.

Относительно определенных в соответствии с 1)–3) дисперсий D_K, D_β, D_Λ случайного унитарного оператора или случайной унитарной полугруппы заметим следующее.

Предложение 1. Пусть $t > 0$ и $\mathbf{U}(t)$ – случайный оператор из примера 1 и пусть мера μ удовлетворяет условию $\mu \in W_0(E)$. Тогда $D_K(\mathbf{U}(t)) = 0$ при условии $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* + i\mathbf{I})) = 0$, и $D_K(\mathbf{U}(t)) = \mathbf{I} - e^{-it\mathbf{L}}e^{-it\mathbf{L}^*} \equiv \mathbf{P}_{H_1(t)}$ при условии $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* + i\mathbf{I})) \neq 0$. Здесь $H_1(t)$ – сдвиговая компонента в разложении Вольда (см. [11]) изометрического оператора $e^{it\mathbf{L}}$.

Следует отметить, что как функция параметра $t \geq 0$ дисперсия $D_K(\mathbf{U}(t))$ монотонно возрастает от нуля до максимального значения – проектора на пространство некорректности задачи Коши для уравнения Шредингера с гамильтонианом $\mathbf{L}$ (см. [10]).

Хотя второе определение дисперсии случайного оператора является определением ковариации векторнозначной случайной величины, но, как показывает предложение 2, второй момент β на случайном операторе из примера 1 обращается в нуль.

Предложение 2. Пусть $t \geq 0$, $\mathbf{U}(t)$ – случайный оператор из примера 1 и пусть мера μ удовлетворяет условию $\mu \in W_0(E)$. Тогда $D_\beta(\mathbf{U}(t))(f,g) = 0$ для любых $f, g \in B_*(H) = T_1(H)$.

По определению, $f, g \in B^*(H)$, в частности, возможно рассмотреть случай, когда $f, g \in \Sigma(H)$, более того, $f = |u >< u|$ и $g = |v >< v|$. В таком случае $f(\mathbf{U}(t)) = (u, \mathbf{U}(t)u)$, поэтому для любого $\mu \in W_0(E)$ справедливо равенство $M[f(\mathbf{U}(t))] = (u, w - \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{U}_\varepsilon(t)u) = (u, M[\mathbf{U}(t)]u)$. Поэтому для функционалов f, g указанного вида и в случае меры $\mu \in W_0(E)$ справедливо равенство $M[\overline{f(\mathbf{U}(t))}g(\mathbf{U}(t))] = \int\limits_E \overline{(u, \mathbf{U}_\varepsilon(t)u)}(v, \mathbf{U}_\varepsilon(t)v)d\mu(\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}[\overline{(u, \mathbf{U}_\varepsilon(t)u)}(v, \mathbf{U}_\varepsilon(t)v)] =$ $= \overline{(u, M[\mathbf{U}(t)]u)}(v, M[\mathbf{U}(t)]v)$. Следовательно, для функционалов f, g указанного вида и в случае меры $\mu \in W_0(E)$ справедливо равенство

$$D_\beta(\mathbf{U})(f,g) = M[\overline{f(\mathbf{U})}g(\mathbf{U})] - M[\overline{f(\mathbf{U})}]M[g(\mathbf{U})] = 0.$$

Как показывает предложение 3, второй момент D_Λ случайного оператора $\mathbf{U}(t)$ из примера 1 согласован с вторым моментом D_K.

Предложение 3. Пусть $t \geq 0$, $\mathbf{U}(t)$ – случайный оператор из примера 1 и пусть мера μ удовлетворяет условию $\mu \in W_0(E)$. Тогда $D_\Lambda(\mathbf{U}(t))(\rho) = M[\Lambda(\mathbf{U}(t))](\rho) - \Lambda(M[\mathbf{U}(t)])(\rho) = M[e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon}\rho e^{it\mathbf{L}_\varepsilon}] - e^{-it\mathbf{L}}\rho e^{it\mathbf{L}^*} = 0$ при условии $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* + i\mathbf{I})) = 0$, в то время как $D_\Lambda(\mathbf{U}(t))(\rho) = M[\Lambda(\mathbf{U}(t))](\rho) - \Lambda(M[\mathbf{U}(t)])(\rho) = M[e^{-it\mathbf{L}_\varepsilon}\rho e^{it\mathbf{L}_\varepsilon}] - e^{-it\mathbf{L}^*}\rho e^{it\mathbf{L}} =$ $= \mathcal{T}^\mu(t)\rho - e^{-it\mathbf{L}^*}\rho e^{it\mathbf{L}}$ при условии $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* + i\mathbf{I})) = 0$, в частности, $\langle D_\Lambda(\mathbf{U}(t))(\rho), \mathbf{I}\rangle = 1 - \rho(\mathbf{P}_{H_0}) = \rho(\mathbf{P}_{H_1(t)}) = \langle \rho, D_K(\mathbf{U}(t))\rangle$.

То есть $\langle D_\Lambda(\mathbf{U}(t))(\rho), \mathbf{I}\rangle = \langle \rho, D_K(\mathbf{U}(t))\rangle$ и в этом смысле $D_\Lambda(\mathbf{U}(t))$ как элемент пространства $(B(H))^{**}$ совпадает с $D_K(\mathbf{U}(t))$ как с элементом $B(H)$. А при условии $\rho = \rho_\varphi$, где $\varphi \in H_1$, справедливо равенство $D_\Lambda(\mathbf{U}(t))(\rho) = \mathcal{T}^\mu(t)\rho$.

Таким образом, по крайней мере для случайных операторов на вероятностном пространстве с мерами из класса $W_0(E)$ определение 2) второго момента является наиболее бессодержательным.

Закон больших чисел для композиций независимых случайных операторов

Предельные теоремы для последовательностей сумм независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_j, $j \in \mathbf{N}$ со значениями в R (или R^d) характеризуют асимптотические при $n \to \infty$ свойства распределения вероятности случайной величины $\Xi_n = \sum\limits_{j=1}^n \xi_j$ и усредненной случайной величины $\bar{\xi}_{(n)} = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n \xi_j$.

При изучении последовательностей композиций независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_j, $j \in \mathbf{N}$ со значениями в банаховом пространстве ограниченных линейных операторов $B(H)$ нас будут интересовать асимптотические при $n \to \infty$ свойства распределения вероятности случайной величины $\Xi_n = \xi_n \circ \ldots \circ \xi_1$. В качестве усредненной случайной величины могут выступать случайные величины

$$\hat{\xi}_n = (\xi_n \circ ... \circ \xi_1)^{\frac{1}{n}} \quad (2)$$

и

$$\bar{\xi}_n = (\xi_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\xi_1)^{\frac{1}{n}}, \quad (3)$$

где дробная степень оператора определяется с помощью спектрального разложения в случае самосопряженного или унитарного оператора. В связи с этим при изучении случайных унитарных или самосопряженных операторов допустимо рассматривать оба варианта усреднения композиции случайных операторов, но нами в этой статье будут рассмотрены только предельные свойства усредненных по правилу (3) случайных операторов $\bar{\xi}_n$.

Для последовательности композиций независисимых случайных операторов аналогом закона больших чисел является следующее утверждение:

Сильный закон больших чисел: пусть $\{\mathbf{A}_n\}$ – последовательность независимых случайных операторов, имеющих одинаковое математическое ожидание $\bar{\mathbf{A}}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\|((\mathbf{A}_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\mathbf{A}_1)^{\frac{1}{n}} - \bar{\mathbf{A}})x\| > \varepsilon\}) = 0 \quad (4)$$

при любых $x \in H$, $x \neq 0$, и любых $\varepsilon > 0$.

Закон больших чисел в форме Чебышева: пусть $\{\mathbf{A}_n\}$ – последовательность независимых случайных операторов, имеющих одинаковое математическое ожидание $\bar{\mathbf{A}}$ и ограниченную последовательность вторых моментов $\{D(\mathbf{A}_n)\}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} D((\mathbf{A}_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\mathbf{A}_1)^{\frac{1}{n}}) = 0. \quad (5)$$

Аналогом закона больших чисел для последовательности сумм независимых случайных величин является следующее утверждение о последовательности композиций независисимых случайных полугрупп.

Сильный закон больших чисел. Пусть $\{\mathbf{U}_n(t),\ t \geq 0\}$ – последовательность независимых случайных полугрупп, имеющих одинаковое математическое ожидание $\bar{\mathbf{U}}(t)$, $t \geq 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\|(\mathbf{U}_n(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_1(\frac{t}{n}) - \bar{\mathbf{U}}(t))x\| > \varepsilon\}) = 0 \quad (6)$$

при любых $x \in H$, $x \neq 0$, и любых $\varepsilon > 0$.

Закон больших чисел в форме Чебышева: пусть $\{\mathbf{U}_n(t),\ t \geq 0\}$ – последовательность независимых случайных полугрупп, имеющих одинаковое математическое ожидание $\bar{\mathbf{U}}(t)$, $t \geq 0$, и ограниченную последовательность вторых моментов $\{D(\mathbf{U}_n)\}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} D((\mathbf{U}_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\mathbf{U}_1)^{\frac{1}{n}}) = 0. \quad (7)$$

Замечание. Подчеркнем, что для случайных полугрупп $\mathbf{U}(t), t \geq 0$, равенство $(\mathbf{U}(t))^{\frac{1}{n}} = \mathbf{U}(\frac{t}{n})$ имеет место при всех $t \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$. При этом равенство $(\mathbf{U}_n \circ ... \circ \mathbf{U}_1)^{\frac{1}{n}} = (\mathbf{U}_n)^{\frac{1}{n}} \circ ... \circ (\mathbf{U}_1)^{\frac{1}{n}}$ не справедливо в силу некоммутативности операторного умножения. Это делает более удобным исследование усредненных величин (3) по сравнению с усредненными величинами (2).

Моменты композиции независимых случайных полугрупп

Рассмотрим теперь вместо случайного линейного оператора $\mathbf{U}$ последовательность $\{\mathbf{U}^n\}$, значением n-го члена которой является композиция из n независимых случайных линейных операторов $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ..., \mathbf{U}_n$:

$$\mathbf{U}^n = \mathbf{U}_n \circ ... \circ \mathbf{U}_2 \circ \mathbf{U}_1, \quad (8)$$

то есть линейную случайную динамическую систему σ (если случайная динамическая система σ как марковская цепь является стационарной, то независимые случайные операторы в композициях (8) являются стодинаково распределенными).

Если при каждом $n \in \mathbf{N}$ случайные операторы $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ..., \mathbf{U}_n$ являются независимыми в совокупности, то
$$M[\mathbf{U}^n] = M[\mathbf{U}_n] \circ ... \circ M[\mathbf{U}_2] \circ M[\mathbf{U}_1]$$
при каждом $n \in \mathbf{N}$; а если при этом случайные операторы $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ..., \mathbf{U}_n$ являются одинаково распределенными, то
$$M[\mathbf{U}^n] = (M[\mathbf{U}])^n \ \forall \ n \in \mathbf{N}.$$

Исследуем вторые моменты линейной случайной динамической системы (8).

При каждом $t \geq 0$ и каждом $n \in \mathbf{N}$ справедливы следующие равенства.

1) При выборе в качестве второго момента функционала D_K имеем следующее:
$$D_K((\mathbf{U}(t))^n) = M[\mathbf{U}_1^*(t) \circ ... \circ \mathbf{U}_n^*(t) \circ \mathbf{U}_n(t) \circ ... \circ \mathbf{U}_1(t)] - (M[(\mathbf{U}(t))^n])^* M[(\mathbf{U}(t))^n].$$
Поэтому если $\{\mathbf{U}_n\}$ – последовательность независимых случайных унитарных операторов, то
$$D_K((\mathbf{U}(t))^n) = \mathbf{I} - ((M[\mathbf{U}(t)])^n)^*(M[\mathbf{U}(t)])^n;$$
если, кроме того, математическое ожидание случайной полугруппы $\mathbf{U}(t)$, $t \geq 0$, является полугруппой, то
$$D_K((\mathbf{U}(t))^n) = \mathbf{I} - (M[\mathbf{U}(nt)])^* M[\mathbf{U}(nt)] = D_K(\mathbf{U}(nt)),$$
то есть при перечисленных предположениях дисперсия D_K композиции n независимых одинаково распределенных случайных полугрупп совпадает с дисперсией n-кратной композиции одной из этих случайных полугрупп: $D_K(\mathbf{U}_n(t) \circ ... \circ \mathbf{U}_1(t)) = D_K((\mathbf{U}_1(t))^n)$.

3) Оценим поведение последовательности вторых моментов D_Λ для последовательности n-кратных итераций независимых случайных полугрупп при условии $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^* + i\mathbf{I})) = 0$.

Согласно определению
$$D_\Lambda((\mathbf{U}(t))^n)(\rho) = M[\Lambda((\mathbf{U}(t))^n)](\rho) - \Lambda(M[(\mathbf{U}(t))^n])(\rho) =$$
$$= M[e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}} ... e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_1}} \rho e^{it\mathbf{L}_{\varepsilon_1}} ... e^{it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}}] - M[(\mathbf{U}(t))^n]^* \rho M[(\mathbf{U}(t))^n].$$
Поскольку случайные операторы $e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_1}}, ..., e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}}$ являются независимыми, то
$$M[e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}} ... e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_1}} \rho e^{it\mathbf{L}_{\varepsilon_1}} ... e^{it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}}] = M[e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}} ... e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_2}} (\mathcal{T}^\mu(t)\rho) e^{it\mathbf{L}_{\varepsilon_2}} ... e^{it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}}],$$
поэтому
$$D_\Lambda((\mathbf{U}(t))^n)(\rho) = M[e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}} ... e^{-it\mathbf{L}_{\varepsilon_2}} (\mathcal{T}^\mu(t)\rho) e^{it\mathbf{L}_{\varepsilon_2}} ... e^{it\mathbf{L}_{\varepsilon_n}}] - \left(e^{-it\mathbf{L}^*}\right)^n \rho \left(e^{it\mathbf{L}}\right)^n =$$
$$= (\mathcal{T}^\mu(t))^n \rho - e^{-int\mathbf{L}^*} \rho e^{int\mathbf{L}}.$$

В этом случае если среднее значение $\mathcal{T}^\mu$ случайной квантовой динамической полугруппы $\mathcal{T}_{\mathbf{L}_\varepsilon}$ эквивалентно по Чернову квантовой динамической полугруппе $\mathcal{T}_{\mathbf{L}^\mu}$, то в пределе при $n \to \infty$
$$\lim_{n \to \infty} (D_\Lambda((\mathbf{U}(\frac{t}{n}))^n)(\rho)) = \mathcal{T}_{\mathbf{L}^\mu}(t)\rho - e^{-it\mathbf{L}^*} \rho e^{it\mathbf{L}}.$$
В этом случае дисперсия динамики квантового состояния представляет собой ненормальную компоненту предельной в *-слабой топологии динамики квантового состояния.

Назовем детерминированной составляющей последовательности итераций $\{\xi_n \circ ... \circ \xi_1\}$ независимых одинаково распределенных случайных полугрупп последовательность оператор-функций $\{(\mathbf{F})^n\}$, задаваемую итерациями математического ожидания $\mathbf{F} = M\xi$

случайной полугруппы ξ. Последовательность разностей $\{\xi_n \circ ... \circ \xi_1 - (\mathbf{F})^n\}$ назовем случайной составляющей итераций.

Итерации независимых одинаково распределенных случайных полугрупп разлагаются на сумму детерминированной составляющей – итерации математических ожиданий случайных полугрупп, и случайной составляющей – все остальные слагаемые. Иследуем предельное при $n \to \infty$ поведение для детерминированной и случайной компонент динамики – систематическое и случайное отклонения от предельной динамики.

Предположив, что случайная полугруппа с $\mathbf{U}$ имеет математическое ожидание $\mathbf{F}$, введем оператор случайного отклонения $\Delta\mathbf{U} = \mathbf{U} - \mathbf{F}$,с помощью которого оценим композицию:

$$\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n}) = (\mathbf{F}(\frac{t}{n}) + \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n})) \circ ... \circ (\mathbf{F}(\frac{t}{n}) + \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})) =$$
$$= (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n + \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-k} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_k}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{k-1} +$$
$$+ \sum_{1 \le i < j \le n} (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-j} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_j}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{j-i-1} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_i}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{i-1} + ... + \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n}). \tag{9}$$

Подчеркнем, что операторы $\Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}), ..., \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})$ являются независимыми в совокупности и имеют нулевое математическое ожидание.

Поэтому для математического ожидания справедливо равенство

$$M[\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})] = (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n.$$

При произвольном выборе второго момента для случайного оператора дисперсия первой группы слагаемых (линейных по ΔU) в выражении (9) имеет вид

$$D[\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-k} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_k}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{k-1}] =$$
$$= \sum_{j,k=1}^{n} M[((\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-j} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_j}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{j-1})^* ((\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-k} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_k}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{k-1})] =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} M[((\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-k} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_k}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{k-1})^* ((\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-k} \Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_k}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{k-1})] \tag{10}$$

и является суммой n однотипных слагаемых. При этом представление (10) для дисперсии суммы слагаемых, линейных по $\Delta\mathbf{U}$, не зависит от выбора функционала дисперсии.

Аналогично, дисперсия второй группы слагаемых (квадратичных по $\Delta\mathbf{U}$) в выражении (9) является суммой C_n^2 однотипных слагаемых и т.д. Используем представление (9) композиции независимых случайных преобразований для оценки ее дисперсии.

Пример 2. Рассмотрим пример случайной полугруппы линейных преобразований конечномерного гильбертова пространства H. Предположим, что $\{\mathbf{U}_\varepsilon, \varepsilon \in E\}$ – случайная полугруппа линейных преобразований конечномерного гильбертова пространства H, причем $\|\mathbf{U}_\varepsilon(t)\| = 1$ при всех $t \ge 0$ и $\varepsilon \in E$, (например, $\{\mathbf{U}_\varepsilon, \varepsilon \in E\}$ – случайная полугруппа линейных унитарных преобразований конечномерного гильбертова пространства H). Пусть, кроме того, $E = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m\}$ – конечное множество и $\mathbf{L}_{\varepsilon_j}$, $\varepsilon_j \in E$, – генераторы полугрупп $\mathbf{U}_{\varepsilon_j}$ соответственно. Положим $A = \max\{\|\mathbf{L}_{\varepsilon_1}\|, ..., \|\mathbf{L}_{\varepsilon_m}\|\}$. Тогда математическое ожидание $\mathbf{F}(t) = M[\mathbf{U}_\varepsilon(t)]$, $t \in R_+$, является оператор-функцией, эквивалентной по Чернову полугруппе $\bar{\mathbf{U}}(t) = e^{\bar{\mathbf{L}}t}$, $t \ge 0$, с усредненным генератором $\bar{\mathbf{L}} = \sum\limits_{j=1}^{m} p_j \mathbf{L}_{\varepsilon_j}$ (см. [6], следствия 1 и 2 к теореме 2). При этом $\|\mathbf{F}(t)\| \le \sum\limits_{j=1}^{m} p_j \|\mathbf{U}_{\varepsilon_j}(t)\| = 1$.

Оценим дисперсии для последовательности композиций независимых случайных полугрупп в случае примера 2 при каком-либо выборе функционала дисперсии.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{L}$ *– случайная величина со значениями в множестве самосопряженных операторов в пространстве* $B(H)$*, множество значений которой ограничено по норме пространства* $B(H)$*, и* $U(t)=\exp(i\mathbf{L}t)$*,* $t\geq 0$*, – соответствующая случайная унитарная полугруппа. Тогда для последовательности* $\{\mathbf{U}_n\}$ *независимых одинаково распределенных случайных полугрупп при любом* $T>0$ *выполняется условие*

$$\sup_{t\in[0,T]} D[\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n})\circ ...\circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})]=O(\frac{T^2}{n}) \quad as \quad n\to\infty.$$

Действительно, поскольку $\mathbf{L}_{\varepsilon_j}$, $\varepsilon_j\in E$, – генераторы непрерывных по норме полугрупп $\mathbf{U}_{\varepsilon_j}$ соответственно, то в силу конечности множества E множество генераторов $\mathbf{L}_{\varepsilon_j}$, $\varepsilon_j\in E$ ограничено по норме, и поэтому $\sup\limits_{\varepsilon_j\in E}\|\Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_j}(\frac{t}{n})-\mathbf{L}_{\varepsilon_j}\frac{t}{n}\|_{B(H)}=o(\frac{t}{n})$ при $\frac{t}{n}\to 0$. Тогда слагаемое первого порядка в выражении (9) имеет, согласно (10), дисперсию

$$D^{(1)}=D[\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-k}\Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_k}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{k-1}],$$

допускающую (с учетом $\|\mathbf{F}(t)\|\leq 1$) оценку

$$D^{(1)}=D[\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{n-k}\Delta\mathbf{U}_{\varepsilon_k}(\frac{t}{n})(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^{k-1}]\leq$$

$$\leq n\|\mathbf{F}(\frac{t}{n})\|^{2(n-1)}A^2(\frac{t}{n})^2(1+o(1))\leq C_n^1(\frac{At}{n})^2(1+o(1))$$

при $\frac{t}{n}\to 0$. Дисперсия слагаемого из (9), содержащего k сомножителей вида $\Delta\mathbf{U}$, аналогично допускает оценку сверху:

$$D^{(k)}\leq C_n^k\|\mathbf{F}(\frac{t}{n})\|^{2n-k}A^{2k}(\frac{t}{n})^{2k}(1+o(1))^k\leq C_n^k(\frac{At}{n})^{2k}(1+o(1))^k$$

при $\frac{t}{n}\to 0$. Поэтому

$$D[\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n})\circ ...\circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})]\leq\sum_{k=1}^{n}D^{(k)}\leq[\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\frac{At}{n})^{2k}(1+o(1))^k-1]=$$

$$=[(1+\frac{A^2t^2}{n^2}(1+o(1)))^n-1]=\frac{A^2t^2}{n}+to(\frac{t}{n})$$

при $\frac{t}{n}\to 0$. Поэтому для любого фиксированного $T>0$ справедлива оценка

$$\sup_{t\in[0,T]} D[\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n})\circ ...\circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})]\to 0 \quad as \quad n\to\infty,$$

более того,

$$\sup_{t\in[0,T]} D[\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n})\circ ...\circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})]=O(\frac{T^2}{n}) \quad as \quad n\to\infty.$$

Таким образом, при каждом фиксированном $n\in\mathbf{N}$ и при каждом фиксированном $T>0$ случайная величина $\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n})\circ ...\circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})$ имеет математическое ожидание $(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n$, среднее квадратичное отклонение от которого имеет порядок $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ $as \quad n\to\infty$ равномерно на отрезке $[0,T]$. Согласно теореме Чернова в конечномерном пространстве H последовательность $\{(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n\}$ сходится по норме пространства $B(H)$ равномерно на каждом отрезке

$[0,T]$ к предельной полугруппе $e^{\bar{\mathbf{L}}t}$, $t \geq 0$, причем отклонение значения n-го элемента последовательности от предела допускакет оценку $\|e^{\bar{\mathbf{L}}t} - (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n\|_{B(H)} = O(\frac{1}{\sqrt{n}}) \quad as \quad n \to \infty$ равномерно на отрезке $[0,T]$.

Таким образом, в случае конечномерного пространства H последовательность итераций независимых случайных полугрупп (8) в пределе при $n \to \infty$ стремится к детерминированной полугруппе $e^{\bar{\mathbf{L}}t}$, $t \geq 0$, равномерно на каждом отрезке $[0,T]$ в банаховом пространстве $B(H)$. При этом систематическое отклонение итераций от предельной полугруппы (то есть отклонение математического ожидания $M[\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})]$ от предельной полугруппы $e^{\bar{\mathbf{L}}t}$, $t \geq 0$) по норме банахова пространства $B(H)$ имеет порядок $O(\frac{1}{\sqrt{n}}) \; as \quad n \to \infty$ равномерно на отрезке $[0,T]$, а случайное отклонение итераций от предельной полугруппы по норме банахова пространства $B(H)$ (то есть дисперсия случайной величины $\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})$) также имеет порядок $O(\frac{1}{\sqrt{n}}) \; as \quad n \to \infty$ равномерно на отрезке $[0,T]$. В этом смысле для итераций независимых случайных полугрупп (8) в конечномерном пространстве H справедлив закон больших чисел (посдледовательность итераций независимых случайных полугрупп (8) в конечномерном пространстве H является некоммутативным аналогом последовательности сумм независимых случайных величин).

В случае бесконечномерного пространства H согласно оценкам в доказательстве теоремы Чернова (см. [14, 15]) систематическое отклонение итераций от предельной полугруппы (то есть отклонение математического ожидания $M[\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})]$ от предельной полугруппы $e^{\bar{\mathbf{L}}t}$, $t \geq 0$) по полунормам, порождающим сильную операторную топологию пространства $B(H)$ имеет порядок $O(\frac{1}{\sqrt{n}}) \; as \quad n \to \infty$ равномерно на отрезке $[0,T]$. Но, как показывают приведенные выше примеры, случайное отклонение итераций от предельной полугруппы по полунормам, порождающим сильную операторную тополоию пространства $B(H)$ (то есть дисперсия случайной величины $\mathbf{U}_{\varepsilon_n}(\frac{t}{n}) \circ ... \circ \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(\frac{t}{n})$), не является бесконечно малой величиной при $n \to \infty$ ни при каком $t \in (0,T]$ (см. предложения 1, 3). В этом смысле для итераций независимых случайных полугрупп (8) в бесконечномерном пространстве H закон больших чисел не справедлив.

Автор выражает благодарность РФФИ за предоставление гранта № 14-01-00516.

Литература

1. *Бланк М.Л.* Устойчивость и локализация в хаотической динамике. М.: МЦНМО, 2001.

2. *Григорчук Р.И.* Эргодические теоремы для действия свободной группы и свободной полугруппы. Матем. заметки. 1999. Т. 65, № 5. С. 779–783.

3. *Ефремова Л.С., Сакбаев В.Ж.* Понятие взрыва множества решений дифференциальных уравнений и усреднение случайных полугрупп // ТМФ. 2015. Т. 185, № 2. С. 252–271.

4. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир. 1967.

5. *Лётчиков А.В.* Условная предельная теорема для произведений случайных матриц // Мат. Сборник. 1995. Т. 186, № 3. С. 65–84.

6. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Формулы Фейнмана как метод усреднения случайных гамильтонианов // Труды МИАН. 2014. Т. 285. С. 232-243.

7. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Случайные неограниченные операторы и формулы Фейнмана // Изв. РАН (принята в печать).

8. *Оселедец В.И.* Марковские цепи, косые произведения и эргодические теоремы для общих динамических систем // ТВП. 1965. Т. 10, № 3. С. 551–557.

9. *Протасов В.Ю.* Инвариантные функции для показателей Ляпунова случайных матриц // Мат. Сборник. 2011. № 1, Т. 202. С. 105–132.

10. *Сакбаев В.Ж.* Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с вырождением и усреднение аппроксимирующих ее регуляризаций // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т. 43. С. 3–174.

11. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов. М.: Мир. 1970.

12. *Скороход А.В.* Произведения независимых случайных операторов // УМН. Т. 38, № 4(232). С. 255–280.

13. *Тутубалин В.Н.* Некоторые теоремы типа усиленного закона больших чисел // ТВП. 1969. Т. 14, № 2. С. 319–326.

14. *Accardi L., Lu Yun Gang, Volovich I.* Quantum theory and its stochastic limit. 2002. Berlin: Springer-Verlag.

15. *Chernoff P.R.* Note on Product Formulas for Operator Semigroups // J. Funct. Anal. 1968. N 84. 238–242.

16. *Engel K.J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equation. 2000. Springer.

17. *Kakutani S.* Random ergodic theorema and Markov processes with a stable distribution. Proc. 2nd Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob. 1951. P. 247–261.

18. *Smolyanov O.G. Weizsacker H., Wittih O.* Chernoff's theorem and discrete time approximations of Brownian motion on manifolds. Potential Anal. 2007. V. 26. P. 1–29.

References

1. *Blank M.L.* Stability and localization in chaotic dynamics. Moscow: MCNMO, 2001.

2. *Grigorchuk R.I.* Ergodic theorems for the actions of a free group and a free semigroup. Math. Notes. 1999. V. 65:5. P. 654–657.

3. *Efremova L.S., Sakbaev V.Zh.* Notion of blowup of the solution set of differential equations and averaging of random semigroups. Theoretical and Mathematical Physics. November 2015. V. 185, I. 2. P. 1582–1598.

4. *Yosida K.* Functional analysis. Springer Science and Business Media 2012.

5. *Letchikov A.V.* Conditional limit theorem for products of random matrices. (English. Russian original). Sb. Math. 1995. V. 186, N 3. P. 371–389. Translation from Mat. Sb. 1995. V. 186, N 3. P. 65–84.

6. *Orlov Y.N., Sakbaev V.Z., Smolyanov O.G.* Feynman formulas as a method of averaging random Hamiltonians. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2014. V. 285, N 1. P. 222–232.

7. *Orlov Y.N., Sakbaev V.Z., Smolyanov O.G.* Random unbounded operators and Feynman formulas. Izvestiya: Mathematics. 2016 (accepted for publication).

8. *Oseledec V.I.* Markov chains, skew products and ergodic theorems for 'general' dynamic systems. (English. Russian original) Theor. Probab. Appl. 1965. V. 10. P. 499–504. Translation from Teor. Veroyatn. Primen. 1965. V. 10. P. 551–557.

9. *Protasov V.Yu.* Invariant functions for the Lyapunov exponents of random matrices. (English. Russian original). Sb. Math. 2011. V. 202. N 1. 101–126. Translation from Mat. Sb. 202. 2011. N 1. P. 105–132.

10. *Sakbaev V.Zh.* Cauchy Problem for Degenerating Linear Differential Equations and Averaging of Approximating Regularizations. Journal of Mathematical Sciences. March 2016. V. 213, I. 3. P. 287–459.

11. *Sz.-Nagy B., Foias C.* Analyse harmonique des operateurs de l'espace de Hilbert. Acad. Kiado. 1967.

12. *Skorokhod A.V.* Products of independent random operators. (English. Russian original). Russ. Math. Surv. 1983. V. 38, N 4. P. 291–318. Translation from Usp. Mat. Nauk. 1983. V. 38, N 4(232). P. 255–280.

13. *Tutubalin V.N.* Some theorems of the type of the strong law of large numbers. (English. Russian original). Theor. Probab. Appl. 1969. V. 14. P. 313–319. Translation from Teor. Veroyatn. Primen. 1969. V. 14. P. 319–326.

14. *Chernoff P.R.* Note on Product Formulas for Operator Semigroups. J. Funct. Anal. 1968. V. 84. P. 238–242.

15. *Engel K.J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equation. Springer. 2000.

16. *Kakutani S.* Random ergodic theorema and Markov processes with a stable distribution. Proc. 2nd Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob. 1951. P. 247–261.

17. *Smolyanov O.G. Weizsacker H., Wittih O.* Chernoff's theorem and discrete time approximations of Brownian motion on manifolds. Potential Anal. 2007. V. 26. P. 1–29.

Поступила в редакцию 04.03.2016