

УДК 519.837

В. Н. Гежа

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Сравнение равновесий Нэша и поведения участников экспериментов в динамической симуляции распространения COVID-19

Распространение инфекционных заболеваний в человеческих сообществах традиционно описывается с помощью математических моделей. Развитие математического аппарата со временем позволило перейти от простейших динамических моделей к более сложным, изучающим различные аспекты распространения болезни. Теория игр является довольно молодой областью математики, в которой последнее время были сделаны значительные открытия. Переход от описания действий общества в целом к описанию действий конкретных индивидов может быть интересен и в рамках изучения динамики распространения инфекционных заболеваний. В данной работе изучается динамическая игра, моделирующая распространение COVID-19 в замкнутом сообществе. Приводятся описание экспериментов, их результаты, а также поведение участников оценивается с точки зрения равновесия Нэша.

Ключевые слова: COVID-19, динамическая игра, равновесие Нэша, экспериментальная экономика.

V. N. Gezha

Moscow Institute of Physics and Technology

Comparison of Nash equilibrium and the behavior of experiment participants in the dynamic simulation of COVID-19 spread

The spread of infectious diseases in human communities is traditionally described using mathematical models. The development of the mathematical tool over time makes it possible to move from the simplest dynamic models to more complex ones which study various aspects of the spread of the disease. Game theory is a pretty young field of mathematics in which significant discoveries are made recently. The transition from describing the actions of society as a whole to describing the actions of specific individuals may be interesting in the framework of studying the dynamics of the spread of infectious diseases. This paper explores a dynamic game that simulates the spread of COVID-19 in a closed community. The description of the experiments, their results, as well as the behavior of the participants are evaluated from the viewpoint of the Nash equilibrium.

Key words: COVID-19, dynamic game, Nash equilibrium, experimental economics.

1. Введение

Уже больше года человечество борется с эпидемией COVID-19, первая вспышка которой была зафиксирована в Ухани (Китай) ещё в конце 2019 года. Эта эпидемия стала самой масштабной на памяти большей части ныне живущих людей – через год после начала пандемии число заражённых перевалило за 100 миллионов, число погибших – за два миллиона.

© Гежа В. Н., 2021

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

Математический аппарат давно уже используется для изучения и моделирования динамики распространения инфекционных заболеваний [1–3]. Текущая пандемия не стала исключением – уже написано много статей, в которых изучается динамика распространения COVID-19 как внутри организма отдельного человека [4, 5], так и внутри различных сообществ [6, 7]. Во многих статьях изучается вопрос о том, как государственное регулирование может повлиять на распространение болезни.

Главным отличием нашей статьи является то, что мы фокусируем наше внимание на поведении отдельных людей, свободных от регулирования государством. Кажется, что в условиях постепенного перехода государственных институтов по всему миру с жёстких на мягкие инструменты внутреннего регулирования, особенности поведения конкретных индивидов всё больше будут влиять на такие процессы, как динамика распространения инфекционных заболеваний. Для изучения поведения конкретных индивидов хорошо подходит аппарат Теории игр и Экспериментальной экономики. Приведём краткие правила игры (подробнее о дизайне, экспериментах и предпосылках создания игры можно прочесть в [8]):

Всего в игре $2N$ участников, причём, как минимум, один из них должен являться ботом – в случае чётного числа реальных игроков добавляются два бота, иначе – один. В начале игры один из ботов является заразным. После этого все участники в течение каждого из M раундов делятся случайным образом на пары и взаимодействуют друг с другом, играя в матричную игру, заданную следующей матрицей (рис.1):

		Игрок 2		
		Изоляция	Подозрение	Взаимодействие
Игрок 1	Изоляция	0 очков, 0 очков	0 очков, 1 очко	0 очков, 3 очка
		$p=0$	$p=0$	$p=0$
	Подозрение	1 очко, 0 очков	2 очка, 2 очка	3 очка, 4 очка
		$p=0$	$p=0,25$	$p=0,5$
	Взаимодействие	3 очка, 0 очков	4 очка, 3 очка	5 очков, 5 очков
		$p=0$	$p=0,5$	$p=0,75$

Рис. 1. Матрица игры «Пандемия»

Взаимодействие заключается в следующем: один из игроков выбирает столбец матрицы, а другой – строку, таким образом, однозначно определяется ячейка матрицы, которая и определяет результат раунда. Помимо выигрышей первого и второго игроков (слева – выигрыш первого игрока, справа – выигрыш второго игрока), в каждой ячейке матрицы также стоит вероятность p , которая соответствует шансу того, что здоровый игрок заразится от больного при условии, что игроки выберут данную ячейку. Суть заражения заключается в следующем: болезнь длится шесть периодов, при этом игрок является заразным в течение всей болезни, но в течение первых трех раундов он не знает о своём статусе больного. В конце болезни (или конце игры, если для кого-то в конце не успевают пройти все шесть раундов болезни) у больного игрока разыгрываются следующие вероятности: с вероятностью 60% он «выздоровливает без последствий» – не получает штрафа и до конца игры становится иммунным к болезни; с вероятностью 30% «выздоровливает с последствиями» – получает 200 очков штрафа, но всё равно до конца игры остаётся иммунным к болезни; с вероятностью 10% «умирает» – получает 500 очков штрафа и автоматически выбирает Изоляцию до конца игры.

Помимо всего прочего, игрокам доступна следующая информация – информация о собственном заражении и общем числе заражённых (с задержкой 3 раунда), информация об общем числе выздоровевших/умерших и своём статусе после окончания болезни – без задержки.

Изначально каждый игрок имеет 0 очков, итоговый результат формулируется как сумма очков, набранных в каждом раунде, и штрафа (при наличии). Цель игры – набрать как можно большее число очков, игроки не соревнуются между собой.

2. Эксперименты

В течение примерно года, начиная с весны 2020 года, было проведено шесть экспериментов с реальными людьми. Формат был следующий: перед началом эксперимента участники ознакомились с правилами игры, им заранее было известно число раундов и сколько всего участников (с учётом ботов) будет участвовать в эксперименте. В большей части экспериментов участники являлись обучающимися, поэтому в качестве мотивации использовалось то, что полученные за эксперимент баллы в итоге влияли на оценку за курс (или в случае с абитуриентами – в конце Летней школы самым успешным участникам выдавались призы). Главной целью проведения экспериментов было сравнение стратегий, продемонстрированных участниками в реальности, и их результативности. В дальнейшем у нас также появилась возможность сравнивать результаты участников с теоретически рассчитанным равновесием Нэша, а также изучать их в рамках разработанной имитационной модели. В данной статье мы сфокусируемся на сравнении результатов участника с найденным равновесием Нэша. Про другие два пункта можно прочитать в статье [8].

Перейдём к непосредственному описанию экспериментов:

	Магистры МФТИ (5й курс 2020) 15.05.2020	Врачи РАНХиГС 30.05.2020	Магистры РАНХиГС 31.05.2020	Абитуриенты МФТИ 04.08.2020	Студенты Томского ГУ 23.09.2020	Магистры МФТИ (5й курс 2021) 12.03.2021
Число участников	24	16	20	22	22	24
Число раундов	34	30	30	30	30	30
Средняя вероятность заражения	0,384	0,371	0,385	0,396	0,384	0,423

Рис. 2. Основные характеристики экспериментов

Как видно из рис. 2, основные параметры данных экспериментов, а именно: число участников, число раундов, а также величина, называемая средним риском взаимодействия, весьма близки для данных экспериментов. Средний риск взаимодействия – это $\frac{\sum_{i=1}^M (0,75 \cdot CC_i + 0,5 \cdot BC_i + 0,25 \cdot BB_i)}{N \cdot M}$, где CC_i , BC_i и BB_i – число выбора стратегий Взаимодействие/Взаимодействие, Взаимодействие/Подозрение и Подозрение/Подозрение соответственно в i -м раунде. Эта характеристика отвечает за рискованность действий игроков в целом за всю игру.

Но если смотреть на динамику среднего риска взаимодействия по раундам, то картина уже существенно отличается для разных экспериментов. В отличие от среднего за игру риска, который является во многом величиной интегральной, данная величина позволяет уловить изменения в поведении популяции на протяжении всей игры. Из рис. 3 и 4 видно, что ситуация с поведением участников и распространением инфекции складывалась в экспериментах по-разному.

После проведения экспериментов мы собирали отзывы об игре, где помимо пожеланий по улучшению просили участников описать свою стратегию поведения во время игры. В эксперименте с врачами от 30.05.2020 игроки в основном придерживались следующей идеи: какое-то время в начале пересидеть в изоляции, а после идти взаимодействовать без страха заболеть. В остальных экспериментах люди придерживались диаметрально противоположной стратегии – успеть проинтерактировать первые несколько раундов, а после сидеть в изоляции, переживая пик заболеваемости. Эксперимент от 30.05.2020 значительно отличается от оставшихся экспериментов и на графиках выше: как динамикой заболе-

ших (быстрый выход на плато, малое число заболевших), так и динамикой среднего риска взаимодействия по раундам (если приближать график параболой, то минимум параболы находится ближе к началу эксперимента чем в других экспериментах).

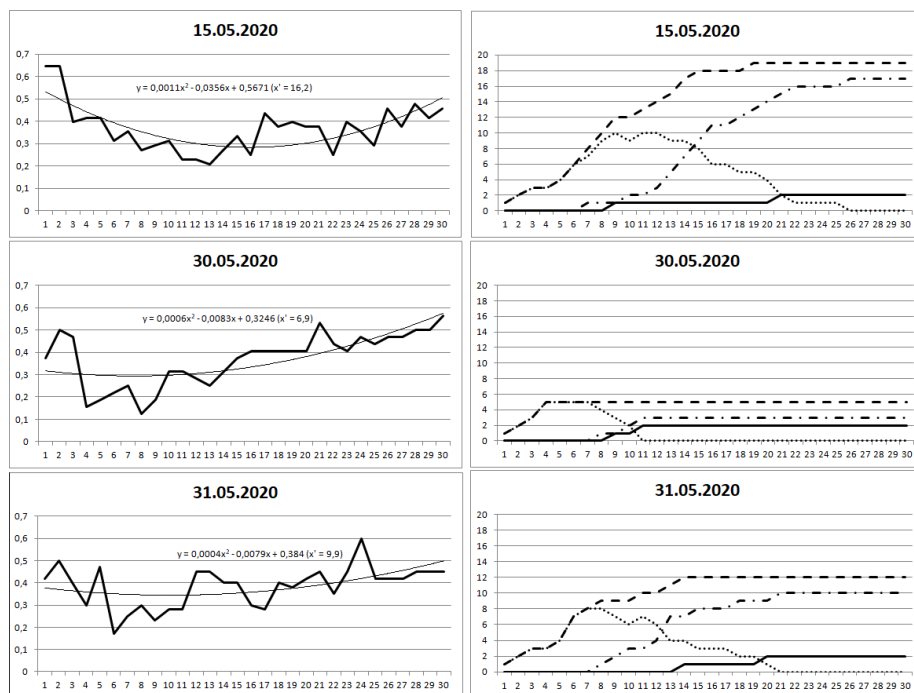


Рис. 3. Динамики среднего риска взаимодействия по раундам и состав популяции для экспериментов от 15.05.2020, 30.05.2020 и 31.05.2020

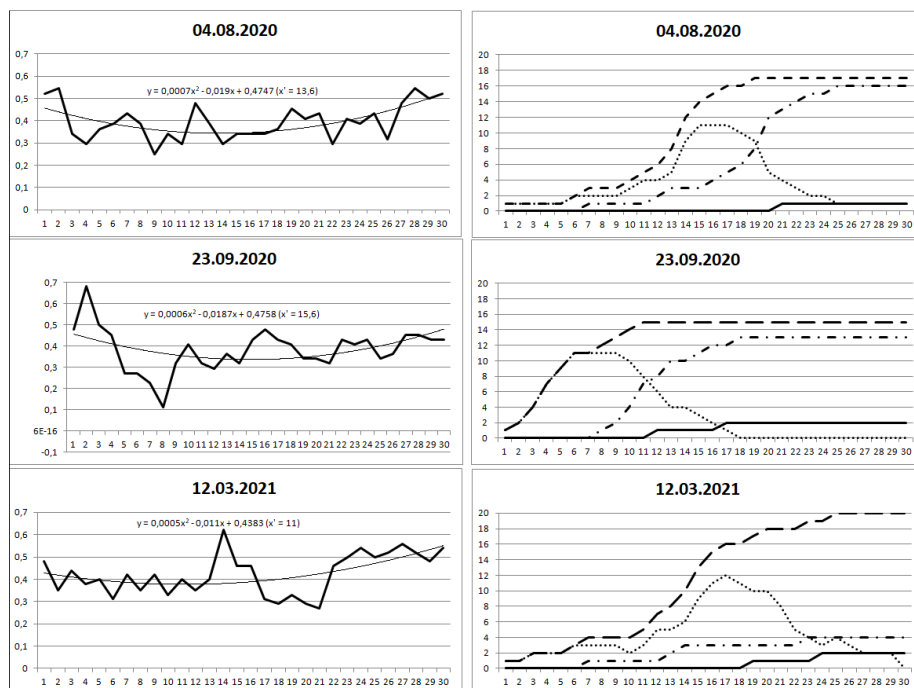


Рис. 4. Динамики среднего риска взаимодействия по раундам и состав популяции для экспериментов от 04.08.2020, 23.09.2020 и 12.03.2021

По мотивам этого мы нашли кандидата на равновесие Нэша – стратегию, при которой здоровые сидят в изоляции первые шесть раундов, а после этого идут взаимодействовать до конца игры, дождавшись выздоровления изначально большого бота (сразу обговорим, что

в силу вероятностной природы игры, говорить о равновесиях Нэша в данной игре можно только в контексте математического ожидания выигрыша). Кажется очевидным, что при некоторых экстремальных условиях (число раундов стремится к бесконечности, а число игроков мало) такая стратегия и правда будет являться не только равновесием Нэша, но и лучшей стратегией в целом. Остаётся математически получить условие на число игроков и число раундов, при котором такая стратегия будет равновесием Нэша.

3. Равновесие Нэша

Сразу обговорим, что здесь мы будем обсуждать множество стратегий, не зависящих от информации о текущем положении вещей, так, учёт подобной информации – довольно сложный с математической точки зрения процесс.

Напомним, что стратегия для всех здоровых игроков, которая нас интересует – отсидеть первые шесть раундов в изоляции, дожидаться выздоровления (или смерти) изначально заразного бота и после этого спокойно взаимодействовать до конца игры. Попробуем понять, при каких параметрах игры ($2N$ – число участников, M – число раундов) эта стратегия будет являться РН. Будем рассматривать игры с $M \geq 6$, так как игры с меньшим числом раундов – это вырожденный случай.

Для дальнейшего доказательства предлагаем следующую удобную форму описания стратегии игрока: пусть A – это изоляция, B – подозрение и C – взаимодействие, под $*$ будем понимать любую из этих трёх возможностей, а под $\#$ – конкретную реализацию $*$. Тогда стратегия игрока – это строка длины M , состоящая из символов A, B, C , где на i -м месте стоит соответствующая стратегия игрока в i -м раунде. Заменяя некоторые из этих символов на $*$, можем получить целый класс стратегий.

Будем доказывать, что выбор стратегии $\{AAAAAAS...C\}$ всеми игроками является РН по определению: фиксируем стратегии всех игроков кроме одного, везде в дальнейшем будем считать, что стратегии остальных игроков имеют вид $\{AAAAAAS...C\}$.

Остаётся показать, что в данной ситуации его изначальная стратегия ведёт к большему выигрышу, чем все остальные варианты.

3.1. Только в первые шесть раундов может быть выгодно отклониться

Хотя всего у игрока существует $3^M - 1$ стратегий, позволяющих отклониться от изначальной, можно показать, что лишь отклонения в первые шесть раундов могут привести к увеличению выигрыша, то есть после этого нам останется рассмотреть лишь $3^6 - 1$ вариантов отклонения.

Лемма 1. Стратегия $\{AAAAAAS...C\}$ для выбранного игрока приводит к большему выигрышу, чем любая стратегия из класса $\{AAAAAA * ...*\} \setminus \{AAAAAAS...C\}$.

Доказательство

Любая стратегия из класса $\{AAAAAA * ...*\} \setminus \{AAAAAAS...C\}$, равно как и стратегия $\{AAAAAAS...C\}$, подразумевает, что после шестого раунда в игре заражённых нет, так как исходный заражённый бот уже выздоровел/умер, а новых заражённых появиться не могло, так как все остальные игроки выбирали изоляцию первые шесть раундов. Таким образом, шанс заразиться при выборе B или C после шестого раунда равен нулю.

Пусть $r \geq 0$ – число A после шестого раунда в некоторой стратегии Q из класса $\{AAAAAA * ...*\} \setminus \{AAAAAAS...C\}$, а $t \geq 0$ – число B после шестого раунда в ней же. Из определения данного класса стратегий, $r + t > 0$. Тогда выигрыш игрока при выборе стратегии $\{AAAAAAS...C\}$

$$6 \cdot 0 + (M - 6) \cdot 5' - \sum_{i=1}^6 p_i \cdot T_i, \quad (1)$$

где p_i – вероятность заразиться при такой стратегии в раунде i , а T_i – математическое ожидание штрафа при заражении в раунде i ($1 \leq i \leq 6$).

Здесь впервые появляется выражение $5' = 5 \cdot (0,9 + 0,1 \cdot (\frac{2N-2}{2N-1} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2N-1}))$, которое обусловлено вероятностной природой игры. Эта величина отвечает математическому ожиданию от выбора Взаимодействия, в котором учитывается вероятность того, что игрок попадёт на заражённого бота, который умер после первых шести раундов. Аналогично вводится $3' = 3 \cdot (0,9 + 0,1 \cdot (\frac{2N-2}{2N-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2N-1}))$ как математическое ожидание выигрыша от выбора Подозрение, с учётом вероятности попадания на умершего бота. В подобном уточнении математического ожидания для выбора Изоляции смысла нет, так как, очевидно, $0' = 0$. Нетрудно проверить, что для $N > 0$ выполнено неравенство $5' > 3' > 0' = 0$.

Аналогично запишем выигрыш игрока при выборе стратегии Q :

$$6 \cdot 0 + (M - 6 - r - t) \cdot 5' + t \cdot 3' + r \cdot 0 - \sum_{i=1}^6 q_i \cdot T_i, \quad (2)$$

где q_i – вероятность заразиться при этой стратегии в раунде i , а T_i – математическое ожидание штрафа за заражение в раунде i при стратегии Q ($1 \leq i \leq 6$).

Благодаря тому, что $p_i = q_i = 0$ для всех $1 \leq i \leq 6$, становится проще сравнивать выигрыши (1) и (2):

$$(M - 6) \cdot 5' > (M - 6 - r - t) \cdot 5' + t \cdot 3', \quad (3)$$

так как $(r + t) \cdot 5' > (r + t) \cdot 3' \geq t \cdot 3'$ при $r + t > 0, r \geq 0, t \geq 0$.

Таким образом, стратегия $\{AAAAAAS...C\}$ приносит выбранному игроку больший выигрыш, чем любая стратегия из класса $\{AAAAAA * ...*\} \setminus \{AAAAAAS...C\}$. **Лемма доказана.**

Лемма 2. Стратегия $\{#####C...C\}$ для выбранного игрока приводит к большему выигрышу, чем любая стратегия из класса $\{##### * ...*\} \setminus \{#####C...C\}$.

Доказательство

Рассматриваемый нами игрок может заразиться только в первые шесть раундов: остальные игроки первые шесть раундов сидят в изоляции, а значит, не могут быть заражены ботом, а сам бот может заражать только первые шесть раундов. Обозначим вероятность заражения в i -й раунд как $p_i^\#$ (вообще говоря, нетривиальным образом зависит от реализации стратегии на первых шести раундах).

Пользуясь обозначениями из **Леммы 1**, запишем выигрыш игрока при выборе стратегии $\{#####C...C\}$:

$$R^\# + (M - 6) \cdot 5' - \sum_{i=1}^6 p_i^\# \cdot T(p)_i^\#, \quad (4)$$

где $R^\#$ – математическое ожидание очков, полученных исходным игроком в первые шесть периодов.

Для некоторой стратегии Q из класса $\{##### * ...*\} \setminus \{#####C...C\}$ получаем следующий выигрыш:

$$R^\# + (M - 6 - r - t) \cdot 5' + t \cdot 3' + r \cdot 0 - \sum_{i=1}^6 q_i^\# \cdot T(q)_i^\#. \quad (5)$$

Заметим, что в первых шести раундах действия одинаковы как для $\{#####C...C\}$, так и для Q , то есть в обеих функциях выигрыша стоят одинаковые величины $R^\#$. Величины $p_i^\#$ и $q_i^\#$ ($1 \leq i \leq 6$) на самом деле также равны, так как вероятность заразиться в i -м раунде ($1 \leq i \leq 6$) определяется лишь действиями за первые шесть раундов. При этом равны $T(p)_i^\#$ и $T(q)_i^\#$ ($1 \leq i \leq 6$), так как математическое ожидание штрафа на самом деле имеет вид

$$0,3 \cdot 200 + 0,1 \cdot (500 + L \cdot \max(0, M - 6 - i)), \quad (6)$$

где первое слагаемое отвечает штрафу за тяжёлое выздоровление, а второе – штрафу за смерть (включая упущенную выгоду, так как после смерти выбирается лишь изоляция), а под L подразумевается $5'$, $3'$ или $0'$ в зависимости от выбора действия, то есть зависит лишь от раунда и распределения вероятностей заражения по раундам. Так как вероятность заражения для каждого из первых шести раундов одинакова для стратегий $\{\#\#\#\#\#C\dots C\}$ и Q , то одинаковы и величины сумм. Теперь мы можем видеть, что **Лемма 1** была лишь весьма наглядным частным случаем **Леммы 2**, где легко рассчитываются величины $p_i^\# = 0$ ($1 \leq i \leq 6$) и $R^\# = 0$.

Так как $p_i^\# = q_i^\#$ ($1 \leq i \leq 6$), получаем для (4) и (5), что

$$R^\# + (M - 6) \cdot 5' - \sum_{i=1}^6 p_i^\# \cdot T_i^\# > R^\# + (M - 6 - r - t) \cdot 5' + t \cdot 3' + r \cdot 0 - \sum_{i=1}^6 q_i^\# \cdot T_i^\#,$$

используя для этого неравенство (3), доказанное в **Лемме 1**.

Таким образом, стратегия $\{\#\#\#\#\#C\dots C\}$ приносит выбранному игроку больший выигрыш, чем любая стратегия из класса $\{\#\#\#\#\# * \dots * \} \setminus \{\#\#\#\#\#C\dots C\}$.

Лемма доказана.

Остаётся понять, при каких значениях параметров N и M стратегия $\{AAAAAAS\dots C\}$ будет давать игроку больший выигрыш, чем любую стратегию из множества $\{* * * * * C\dots C\} \setminus \{AAAAAAS\dots C\}$, ведь из этого в силу **Леммы 2** будет следовать то, что выбор $\{AAAAAAS\dots C\}$ для каждого игрока – симметричное РН.

Замечание: возможна ситуация, когда исходный игрок заразился от изначально больного бота, заразил другого игрока, сам выжил, но при этом другой игрок умер, и исходный игрок провзаимодействовал с этим игроком после смерти. С учётом этого нам необходимо модифицировать понятия математических ожиданий выигрыша от выбора Взаимодействия и Подозрения: $5'$ и $3'$. Важным является тот факт, что даже для модифицированных понятий $5''$ и $3''$ продолжает выполняться отношение порядка $5'' > 3'' > 0'' = 0$. Таким образом, доказательство остаётся корректным при замене в **Лемме 2** $5'$ и $3'$ на $5''$ и $3''$.

3.2. Изучение поведения игрока в первые шесть раундов

В силу **Леммы 2** нам достаточно рассмотреть различные стратегии исходного игрока в течение лишь первых шести раундов. Как мы покажем позже, некоторые из них строго доминируют над другими вне зависимости от условий на $2N$ и M . Напомним, что мы свели нашу задачу к рассмотрению стратегий вида $\{\#\#\#\#\#C\dots C\}$, выигрыш для которых можно однозначно записать в виде

$$R^\# + (M - 6 - r - t) \cdot 5' + t \cdot 3' + r \cdot 0 - \sum_{i=1}^6 q_i^\# \cdot T_i^\#,$$

причём $r = t = 0$, то есть выигрыш будет иметь вид

$$R^\# + (M - 6) \cdot 5' - \sum_{i=1}^6 q_i^\# \cdot T_i^\#.$$

Таким образом, для каждой стратегии нам необходимо сравнивать лишь величины

$$R^\# - \sum_{i=1}^6 q_i^\# \cdot T_i^\#. \quad (7)$$

Введём следующие обозначения.

Пусть $p = \frac{1}{2N-1}$ – вероятность выбранного игрока встретиться с заражённым ботом в определённом раунде, c – количество выборов C в первые шесть раундов, b – количество

выборов B в первые шесть раундов. Тогда $6 - c - b$ – количество выборов A в первые шесть раундов.

Заметим, что выигрыш игрока за первые шесть раундов зависит лишь от c и b , но не зависит от номеров раундов, в которых игрок выберет стратегии C или B :

$$R^\# = c \cdot (5 \cdot p + 3 \cdot (1 - p)) + b \cdot (3 \cdot p + 1 \cdot (1 - p)). \quad (8)$$

При этом величина $\sum_{i=1}^6 q_i^\# \cdot T_i^\#$ зависит от номеров раундов, в которые выбраны определённые стратегии. Покажем это далее.

Определение. Назовём строку из символов $\{A, B, C\}$ возрастающей по риску заражения, если символы в ней упорядочены в лексикографическом порядке ($A < B < C$).

Заметим, что любой стратегии исходного игрока на первые шесть раундов взаимнооднозначно отвечает строка длины 6 в алфавите $\{A, B, C\}$.

Лемма 3. Среди всех строк длины 6 с фиксированным числом A , B и C величина $\sum_{i=1}^6 q_i^\# \cdot T_i^\#$ достигает (строгого, если $M \geq 12$) минимума на строках, возрастающих по риску заражения.

Доказательство

Доказательство этой леммы напрямую следует из следующих утверждений.

Утверждение 1. Пусть в строке длины 6 на месте k ($1 < k < 5$) стоит C , а на месте $k + 1$ стоит A . Тогда величина $\sum_{i=1}^6 q_i^\# \cdot T_i^\#$ у этой строки больше либо равна (строго больше при $M \geq 12$), чем у строки длины 6, в которой на месте k ($1 < k < 6$) стоит A , на месте $k + 1$ стоит C .

Доказательство утверждения 1

До k -го слагаемого суммы совпадают, можно сократить. После $k + 1$ слагаемого суммы также совпадают, так как при перестановке действий за 2 раунда вероятность заражения в последующих равенствах не меняется. Таким образом, достаточно сравнивать два слагаемых. Хотим доказать, что

$$t_k \cdot T_k + t_{k+1} \cdot T_{k+1} \geq q_k \cdot T_k + q_{k+1} \cdot T_{k+1},$$

где вероятность t отвечает первой ситуации, а q – второй.

Пусть r – вероятность того, что игрок уже заразился до раунда k . Тогда $t_k = (1 - r) \cdot p \cdot 0,75$, $t_{k+1} = 0$, $q_k = 0$, $q_{k+1} = (1 - r) \cdot p \cdot 0,75$.

Видим, что ситуация сводится к сравнению $T_k \geq T_{k+1}$.

Данное неравенство следует из определения T_k (явная формула для математического ожидания штрафа про заражении в раунде k приведена в (6)). При этом, если $M \geq 12$, то выполнено даже более строгое неравенство: $T_k > T_{k+1}$.

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Пусть в строке длины 6 на месте k ($1 < k < 5$) стоит C , а на месте $k + 1$ стоит B . Тогда величина $\sum_{i=1}^6 q_i^\# \cdot T_i^\#$ у этой строки больше либо равно (строго больше при $M \geq 12$), чем у строки длины 6, где на месте k ($1 < k < 6$) стоит A , на месте $k + 1$ стоит C .

Утверждение 3. Пусть в строке длины 6 на месте k ($1 < k < 5$) стоит B , а на месте $k + 1$ стоит A . Тогда величина $\sum_{i=1}^6 q_i^\# \cdot T_i^\#$ у этой строки больше либо равно (строго больше при $M \geq 12$), чем у строки длины 6, где на месте k ($1 < k < 6$) стоит A , на месте $k + 1$ стоит C .

Доказательство утверждений 2 и 3 аналогично доказательству утверждения 1.

В свою очередь, из этих трёх утверждений, делая попарные сравнения величины $\sum_{i=1}^6 q_i^\# \cdot T_i^\#$ для различных последовательностей длины 6, приходим к утверждению

Леммы 3.

Лемма доказана.

Получили, что при $M \geq 12$ нам достаточно рассматривать лишь возрастающие по риску заражения строки длины 6, так как максимизация выигрыша при фиксированном $R^\#$ эквивалентна минимизации штрафа, а как мы показали выше, своего минимума он достигает именно на строках, возрастающих по риску заражению.

При выборе стратегии, которой отвечает строка АААААА (полная изоляция первые шесть раундов), величина $R^\# - \sum_{i=1}^6 q_i^\# \cdot T_i^\#$ будет равна 0. Для того чтобы другие стратегии были менее выгодны игроку, выигрыш для них должен быть меньше 0.

Запишем величину $R^\# - \sum_{i=1}^6 q_i^\# \cdot T_i^\#$ из (7) для некоторой стратегии на первые шесть раундов, представимой возрастающей по риску заражения строкой длины 6, используя формулы (6) (с учётом перехода от 5' и 3' к 5'' и 3'') и (8):

$$\begin{aligned} R^\# - \sum_{i=1}^6 q_i^\# \cdot T_i^\# &= c \cdot (5p + 3 \cdot (1 - p)) + b \cdot (3p + 1 \cdot (1 - p)) - \\ &- \sum_{i=7-c}^6 0,75 \cdot p \cdot (0,3 \cdot 200 + 0,1 \cdot (500 + 5'' \cdot \max(0, M - 6 - i))) - \\ &- \sum_{i=7-c-b}^{6-c} 0,5 \cdot p \cdot (0,3 \cdot 200 + 0,1 \cdot (500 + 3'' \cdot \max(0, M - 6 - i))) \leq \\ &\leq \frac{1}{2N-1} \cdot (c \cdot (6N-1) + b \cdot (2N+1) - 0,75c \cdot (60 + 0,1 \cdot (500 + 5'' \cdot \max(0, M - 6 - 6)))) - \\ &- 0,5b \cdot (60 + 0,1 \cdot (500 + 3'' \cdot \max(0, M - 6 - 6 + c))) \leq \\ &\leq \frac{1}{2N-1} \cdot [c \cdot (6N-1-45-37,5-\frac{3}{40} \cdot 5'' \cdot (M-12)) + b \cdot (2N-1-30-25-\frac{1}{20} \cdot 3'' \cdot (M-12))]. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались предположением, что $M \geq 12$ (при этом условие начинает выполняться строгое неравенство в предыдущей лемме), а для сумм сделали оценку сверху наименьшим (так как перед суммой стоит знак минус) из слагаемых.

Так как b и c – неотрицательные, при этом $b + c > 0$, то для того, чтобы получившееся выражение было меньше нуля, достаточно, чтобы были выполнены следующие неравенства:

$$\begin{cases} 6N - 83,5 - \frac{3}{40} \cdot 5'' \cdot (M - 12) < 0, \\ 2N - 56 - \frac{2}{40} \cdot 3'' \cdot (M - 12) < 0. \end{cases}$$

Сделаем грубую, но эффективную оценку на 5'': математическое ожидание доли умерших игроков даже при полном заражении составляет 0,1, а значит, что при взаимодействии после шестого раунда игрок как минимум в 90% случаев провзаимодействует с живым участником, то есть получит пять очков, а значит, верно сравнение $5'' \geq 4,5$. Аналогично $3'' \geq 2,7$.

С учётом этого переходим к следующей системе:

$$\begin{cases} 6N - 83,5 - \frac{3}{40} \cdot 4,5 \cdot (M - 12) < 0, \\ 2N - 56 - \frac{2}{40} \cdot 2,7 \cdot (M - 12) < 0. \end{cases} \quad (9)$$

В итоге получаем из (9) следующую зависимость между числом игроков и количеством раундов, при которой выбор каждым игроком стратегии ААААААС...С является симметричным РН:

$$M > \frac{480N - 6356}{27}. \quad (10)$$

4. Сравнение действий участников экспериментов с найденным равновесием Нэша

Несложно проверить, что для всех проведённых нами экспериментов неравенство (10) выполнено, то есть стратегия, при которой все участники выбирают Изоляцию первые шесть раундов, после чего выбирают Взаимодействие до конца игры, является равновесием Нэша. Тем не менее почти во всех экспериментах, за исключением эксперимента с врачами от 30.05.2020, участники скорее стремились к стратегии 100% выбора Взаимодействия.

Это явление поддаётся объяснению: давайте взглянем на таблицу со средними выигрышами для игр, проведённых между ботами в рамках имитационной модели с параметрами, совпадающими с параметрами эксперимента от 15.05.2020, в котором участники были наиболее близки к стратегии 100% выбора Взаимодействия.

АС	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
0%	67,76	55,36	49,92	50,96	55,21	60,8	66,72	72,35	77,76	82,92	87,4
10%	84,75	68,53	57,2	52,13	51,82	55,1	60,21	65,58	71,14	76,39	
20%	100,85	86,38	72,48	61,59	55,45	54,22	56,2	60,06	65,17		
30%	112,36	102,3	90,41	78,24	68,09	61,76	58,88	59,03			
40%	120,29	113,86	105,89	96,42	86,46	77,93	71,13				
50%	124,82	121,25	116,57	111,1	104,34	97,24					
60%	127,57	125,86	123,66	120,9	117,46						
70%	129	128,53	127,73	126,97							
80%	130,1	129,94	129,23								
90%	130,67	130,64									
100%	130,7										

Рис. 5. Таблица средних выигрышей для разных стратегий ботов в имитационной модели

В имитационной модели использовались простые боты, стратегия которых заключалась в случайном выборе в каждом раунде Изоляции (А), Подозрения (В) и Взаимодействия (С) с заданными изначально вероятностями, которые для А и С указаны в строках и столбцах таблицы соответственно. При этом после выздоровления всех участников стратегия у ботов переключалась на 100% Взаимодействие. Для усреднения результата в силу вероятностной природы игры проводилось большое число (один миллион) попыток, что давало довольно большую (до второго знака после запятой) точность. В данной таблице найденному нами равновесию Нэша отвечает нижняя левая клетка, а 100% выбору Взаимодействия – верхняя правая клетка. Из рис. 5 видно, что верхняя правая клетка является локальным максимумом, в то время как найденное нами равновесие Нэша является глобальным.

Таким образом, становится понятно поведение участников в экспериментах, отличных от эксперимента 30.05.2020. В вопросе сходимости системы к равновесию Нэша зачастую важна начальная точка – так настроенные более скептически к вопросам общественного блага и эгоистичные студенты изначально начинали с предположений о том, что другие также будут взаимодействовать, поэтому пытались сойтись именно к тому локальному оптимуму. В то же время врачи, которые больше верили в то, что их коллеги способны действовать во имя всеобщего блага, пытались сойти именно к равновесию Нэша, которое было более выгодным в среднем.

Особенностью этой игры является то, что в отличие от игр вроде Дилеммы заключённых или Общественного блага, тут существует равновесие Нэша в смысле математических ожиданий выигрыша. Проблема заключается в том, что равновесие неочевидно и участни-

ком сложно скооперироваться для его достижения, если среди них есть те, кто изначально не имеет понятия о его существовании.

На примере данной игры можно увидеть, что зачастую существует выгодное как для общества в целом, так и для конкретных индивидов решение, к которому можно было бы сойтись, если бы все участники понимали, что оно является выигрышным для всех. Это применимо и к текущей ситуации с COVID-19: если в случае с Китаем достаточно авторитарное государство смогло жёсткими карантинными мерами остановить распространение болезни, то для западных стран, использующих более мягкие формы регулирования, на первый план выходит поведение отдельных индивидов. Кажется, что большой задачей в будущем является разработка механизмов непрямого воздействия, способных направлять поведение отдельных индивидов в нужную сторону. В будущем авторы надеются разработать модификацию данной игры, в которой присутствовал бы механизм направления поведения игроков к равновесию Нэша.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-01-00296).

Литература

1. *Bernoulli D.* Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir // Histoire de l'Acad Roy Sci(Paris) avec Mem. 1766. P. 1–45.
2. *Bailey N.T.J., [et al.]*. The mathematical theory of infectious diseases and its applications. High Wycombe : Charles Griffin & Company Ltd., 1975.
3. *Anderson R.M., May R.M.* Infectious diseases of humans: dynamics and control. Oxford : Oxford university press, 1992.
4. *Guan W., Ni Z., Hu Y., Liang W., Ou C., He J., [et al.]*. Clinical characteristics of coronavirus disease 2019 in China // New England journal of medicine. 2020. V. 18, N 382. P. 1708–1720.
5. *Grasselli G., Zangrillo A., Zanella A., Antonelli M., Cabrini L., Castelli A., [et al.]*. Baseline characteristics and outcomes of 1591 patients infected with SARS-CoV-2 admitted to ICUs of the Lombardy Region, Italy // JAMA. 2020. V. 16, N 323, P. 1574–1581.
6. *Xu B., Gutierrez B., Mekar S., Sewalk K., Goodwin L., Loskill A., [et al.]*. Epidemiological data from the COVID-19 outbreak, real-time case information // Scientific data. 2020. V. 1, N. 7. P. 1–6.
7. *Flaxman S., Mishra S., Gandy A., Unwin H.J.T., Mellan T.A., Coupland H., [et al.]*. Estimating the effects of non-pharmaceutical interventions on COVID-19 in Europe // Nature. 2020. V. 584, N 7820, P. 257–261.
8. *Gezha V., Menshikova O., Sedush A., Yaminov R., Zarubin I.* Laboratory Study of Different Social Groups Behavior during the Pandemic // IEEE. 2020. P. 1–5. doi: 10.1109/MLSD49919.2020.9247721.

References

1. *Bernoulli D.* Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. Histoire de l'Acad Roy Sci(Paris) avec Mem. 1766. P. 1–45.
2. *Bailey N.T.J., et al.*, The mathematical theory of infectious diseases and its applications. High Wycombe : Charles Griffin & Company Ltd., 1975.
3. *Anderson R.M., May R.M.* Infectious diseases of humans: dynamics and control. Oxford : Oxford university press, 1992.

4. Guan W., Ni Z., Hu Y., Liang W., Ou C., He J., et al., Clinical characteristics of coronavirus disease 2019 in China. *New England journal of medicine*. 2020. V. 18, N 382. P. 1708–1720.
5. Grasselli G., Zangrillo A., Zanella A., Antonelli M., Cabrini L., Castelli A., et al., Baseline characteristics and outcomes of 1591 patients infected with SARS-CoV-2 admitted to ICUs of the Lombardy Region, Italy. *JAMA*. 2020. V. 16, N 323, P. 1574–1581.
6. Xu B., Gutierrez B., Mekaru S., Sewalk K., Goodwin L., Loskill A., et al., Epidemiological data from the COVID-19 outbreak, real-time case information. *Scientific data*. 2020. V. 1, N. 7. P. 1–6.
7. Flaxman S., Mishra S., Gandy A., Unwin H.J.T., Mellan T.A., Coupland H., et al., Estimating the effects of non-pharmaceutical interventions on COVID-19 in Europe. *Nature*. 2020. V. 584, N 7820, P. 257–261.
8. Gezha V., Menshikova O., Sedush A., Yaminov R., Zarubin I. Laboratory Study of Different Social Groups Behavior during the Pandemic. *IEEE*. 2020. P. 1–5. doi: 10.1109/MLSD49919.2020.9247721.

Поступила в редакцию 25.05.2021