ОТЗЫВ

на диссертацию
Шубина Андрея Витальевича
«Простые числа в специальных последовательностях», представленную к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 - дискретная математика и математическая кибернетика

Автор отзыва:
Ф.И.О.: **Жуковский Максим Евгеньевич**
Учёная степень: **д.ф.-м.н.**
Год присуждения учёной степени и специальность, по которой присуждена учёная степень: **2018, 05.13.17**
Место работы (полное название организации в соответствии с Уставом, подразделение): **Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)", кафедра дискретной математики**
Должность: **доцент**
Контактная информация: **zhukmax@gmail.com**

Диссертация А.В. Шубина относится к аналитической теории чисел и находится в «пограничном слое», на стыке двух значимых направлений. Первое - классическое, связанное с оценкой тригонометрических сумм с простыми числами и восходящее к работам И.М. Виноградова. Второе связано с новейшими методами исследования простых чисел, разработанными за последние 15 лет целым рядом авторов (Д. Голдстон, Я. Пинтц, К.-Й. Йилдирим, Й. Мотохаши, И. Жанг, Дж. Майнард, А. Грэнвилл и др.).

Основным объектом исследования в работе А.В. Шубина является последовательность всех простых чисел $q_1 < q_2 < q_3 < \cdots$, содержащихся во множестве $\mathbb{E} = \mathbb{E}(\alpha)$. Последнее определяется как множество всех натуральных чисел n, удовлетворяющих условию $\{n^\alpha\} < 0.5$ (здесь и далее $\{x\}$ - дробная доля числа x, $\alpha > 0$ - произвольное фиксированное нецелое число). Главный вопрос, стимулировавший появление настоящей работы, заключается в следующем: существует ли постоянная $C > 0$ такая, чтобы неравенство $q_{n+1} - q_n \leqslant C$ выполнялось для бесконечного множества пар соседних простых чисел из $\mathbb{E}$?

Как стало ясно из недавних работ Дж. Майнарда, ключом к ответу на этот вопрос (а также на аналогичный, но более общий вопрос относительно разностей $q_{n+m} - q_n$ при фиксированном $m \geqslant 1$) является доказательство для простых чисел множества $\mathbb{E}$ аналога теоремы Бомбьери-Виноградова, т.е. неравенства типа

$$\sum_{q\leqslant Q}\max_{(a,q)=1}\left|\sum_{\substack{X\leqslant p<2X,\ p\in\mathbb{E}\\ p\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}}1-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{X\leqslant p<2X,\ p\in\mathbb{E}}1\right|\ll\frac{X}{(\ln X)^A}. \qquad (1)$$

Здесь X – растущий параметр, $A > 0$ – сколь угодно больше фиксированное число,

$Q = X^{\theta-\varepsilon}$, ε - сколь угодно малая постоянная, $0 < \theta < 1$. Величина θ, $0 < \theta < 1$, называется в этой проблематике «уровнем распределения». Она приобретает особое значение при рассмотрении задач, связанных с малыми расстояниями между соседними простыми числами. Грубо говоря, между величиной θ и постоянной C из приведенной выше оценки имеется следующая связь: чем больше значение θ в (1), тем меньше C.

Таким образом, центр тяжести работы диссертанта смещается в сторону поисков доказательства неравенства (1), отвечающего как можно большему уровню распределения θ. Отметим, что для множества «обыкновенных» простых чисел (наиболее простом случае) теорема Бомбьери-Виноградова доказана с $\theta = 1/2$; естественно, для более экзотических множеств простых чисел следует ожидать более скромных результатов (с меньшим θ).

На этом пути диссертантом доказаны два замечательных утверждения: 1) доказательство (1) для любого фиксированного нецелого α при $\theta = 1/3$ (теорема 1.1); 2) доказательство (1) для случая малых α, $0 < \alpha < 1/9$ с $\theta = 2/5 - (3/5)\alpha$ (теорема 1.2). Заметим, что ранее неравенство (1) было установлено при $\theta = 1/3$ лишь для диапазона $1/2 \leqslant \alpha < 1$ (С.А. Гриценко, Н.А. Зинченко, 2013). При $\theta > 1/3$ утверждения, подобные (1), в случае множества $\mathbb{E}(\alpha)$ до работ А.В. Шубина не были известны.

Структурно диссертация состоит из 6 глав. В первой главе приводится обстоятельная история исследуемой задачи и формулируются основные результаты (теоремы 1.1-1.5). Во второй главе помещен список основных обозначений и сформулированы вспомогательные леммы. В третьей главе автор показывает, как теорема типа Бомбьери-Виноградова получается из оценок соответствующих тригонометрических сумм с простыми числами.

Важнейшая часть диссертации - главы 4 и 5. В четвертой главе автор получает оценку тригонометрической суммы с простыми числами, из которой следует теорема (1) для $\theta = 1/3$ и произвольного нецелого $\alpha > 0$. В главе 5 автор получает оценку тригонометрической суммы с простыми числами, из которой следует теорема (1) для произвольного α с условием $0 < \alpha < 1/9$ и $\theta = 2/5 - (3/5)\alpha$. При этом техника, используемая в главах 4 и 5, кардинально отличается. Так, при выводе итоговой оценки главы 4 (теорема 1.3) автор опирается на известное тождество И.М. Виноградова в форме Р. Вона и на оценки тригонометрических сумм «по k-й производной», принадлежащие Й.Г. ван дер Корпуту и Д.Р. Хиз-Брауну. В главе 5 для вывода основной теоремы 1.4 автор преобразует сумму с простыми числами с помощью тождества Хиз-Брауна. Получившиеся при этом кратные суммы двух типов автор оценивает с помощью техники главы 4; кратные суммы третьего типа сводятся к тройным суммам специального вида, к которым в дальнейшем дважды применяется формула суммирования Пуассона. Эта часть работы является наиболее сложной в техническом отношении.

Наконец, в шестой главе автор применяет доказанные теоремы к исследованию малых расстояний $q_{n+1} - q_n$ между соседними простыми числами $\mathbb{E}$ и к исследованию малых разностей $q_{n+m} - q_n$ при любом фиксированном $m \geqslant 1$.

В заключение отметим, что полученные в диссертации результаты являются новыми и снабжены полными доказательствами. Основные результаты работы докладывались на международных конференциях и научных семинарах, опубликованы в центральных математических журналах. Автореферат соответствует содержанию диссертации.

Диссертация является научно-квалификационной работой, результаты которой вносят весомый вклад в аналитическую теорию чисел. Она отвечает всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней кандидата наук, доктора наук в МФТИ», а ее автор - Шубин Андрей Витальевич - заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 - дискретная математика и математическая. кибернетика.

Дата:

Подпись / расшифровка подписи

Жуковский М.Е.

ПОДПИСЬ РУКИ Жуковского М.Е.
ЗАВЕРЯЮ:
ЗАВЕДУЮЩАЯ КАНЦЕЛЯРИЕЙ
АДМИНИСТРАТИВНОГО ОТДЕЛА
М.А.ГУСЕВА

КАНЦЕЛЯРИЯ