Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
30 июня 2020 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Равновесная статистическая механика сложных систем**
по направлению подготовки:
03.04.01 «Прикладные математика и физика»,
14.04.02 «Ядерные физика и технологии»
физтех-школа: **для всех физтех-школ, кроме ФЭФМ, ФПМИ, ФАКТ, ФБМФ**
кафедра **теоретической физики**
курс: 1 (магистратура)
семестр: 1
Трудоемкость:
теор. курс: вариативная часть – 3 зачет. ед.
лекции – 30 часов
Экзамен – 1 семестр
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
Курсовые и контрольные работы – 4

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60
Самостоятельная работа – 45 часов

Программу и задание составил к.ф.-м.н., доц.
С. Г. Абаимов

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
23 мая 2020 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
Ю. М. Белоусов

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

1. Фракталы

Береговая линия Англии как стохастический фрактал. Триадная кривая Коха как детерминистический аналог. Фрактальная размерность. Определение размерности Минковского методом подсчета кубов. Скейлинг как метод определения размерности. Примеры фракталов. Самоаффинные фракталы. Фракталы-деревья. Геометрическое основание мультифрактала.

2. Неравновесные состояния как флуктуации. Свободная энергия флуктуаций

Микросостояния и флуктуации. Вероятность микросостояния и флуктуации. Логарифмическая точность. Почему статсумма равна своему наибольшему слагаемому? Выбор свободной энергии термостатом. Может ли система повлиять на этот выбор? Вероятность флуктуации. Наиболее общее определение энтропии и свободной энергии. Связь свободной энергии и вероятности. Частичные статсуммы. Вероятность Гиббса–Больцмана как распределение свободной энергии. Флуктуации как инструмент исследователя.

3. Модель Изинга

Модель Изинга с взаимодействием ближайших соседей. Ближний и дальний порядок. Приближение среднего поля как пренебрежение флуктуациями. Теория фазовых переходов Ландау. Поведение равновесной и неравновесной свободной энергии. Потенциальный барьер, критический зародыш. Метастабильные состояния. Критическая точка. Спинодаль. Антиферромагнетики.

4. Перколяция

Явления перколяции в природе. Перколяция узлов и перколяция связей. Виды решеток. Микроконфигурации как микросостояния. Одномерная решетка, критические индексы. Перколяция как фазовый переход второго рода. Квадратная решетка, решеточные звери. Решетка Бете, критические индексы. Случай произвольной решетки, предположение о распределении размеров кластеров, критические индексы. Грубость сделанного предположения, скейлинг-функция распределения размеров кластеров, критические индексы.

5. Система с разрушением

Количественная характеристика разрушения. Модель пучка волокон. Микроконфигурации как микросостояния. Модель при $\varepsilon = \text{const}$, эффективная температура. Модель при σ = const, разрушение как фазовый переход первого рода, замедление спинодаль.

6. Корреляции, отклик, флуктуационно-диссипационная теорема
Корреляции в модели Изинга, восприимчивость, флуктуационно-диссипационная теорема. Какая величина может играть роль восприимчивости? Когда теплоемкость является восприимчивостью? Критерий Гинзбурга. Сравнение выполнения критерия для систем с ближним и дальним взаимодействием. Системы с перколяцией, отличие корреляционно-флуктуационного поведения от систем классической физики. Корреляции, восприимчивость как средний размер кластеров, флуктуационно-диссипационная теорема. Соотношение гиперскейлинга. Модель с разрушением, восприимчивость как теплоемкость.

7. Вероятность флуктуаций
Распределение вероятностей для флуктуаций параметра порядка. Окрестности критической точки и точки спинодаль, расходимость флуктуаций ввиду расходимости восприимчивости. Высшие производные распределения вероятностей как величины, определяющие различия фазовых переходов первого и второго рода. Какая величина является «истинной» восприимчивостью для систем с разрушением?

8. Ренормализационная группа
Огрубление как преобразование подобия. Сохранение модели и поведения. Соответствие микроконфигураций как аксиоматика, сохранение вероятностей как следствие. Одномерная и двухмерная модель Изинга. Одномерная и двухмерная перколяция. Одномерная система с разрушением. Преобразование полевых параметров. Преобразование корреляционной длины. Преобразование критической точки. Фиксированные точки РГ. Почему РГ дает лишь приближенные результаты? Как улучшить точность результатов?

9. Скейлинг-функции. Эффект конечного размера системы. Кроссовер-эффекты. Гомогенные функции и ренормализационная группа как источники скейлинг-поведения
Скейлинг-функции систем с перколяцией и магнитных систем. Сглаживание сингулярностей. Эффект конечного размера системы. Ширина зоны возникновения перколяции. Явления кросс-овер. Опасные переменные. Гомогенные функции как наиболее общий формализм явлений скейлинга. Ренормализационная группа как источник скейлинг-поведения.

Литература

Основная

1. *Абаимов С.Г.* Статистическая физика сложных систем. Москва : Либроком, 2012.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Ч. 1. Москва : Физматлит, 2001.
3. *Зайцев Р.О.* Введение в современную статистическую физику. Москва : УРСС, 2006; Либроком, 2013.
4. *Максимов Л.А., Михеенков А.В., Полищук И.Я.* Лекции по статистической физике. Москва : МФТИ, 2011.

Дополнительная

1. *Квасников И.А.* Статистическая физика. Т. 2. Теория равновесных систем. Москва : УРСС, 2002.
2. *Федер Е.* Фракталы. Москва : Мир, 1991.
3. *Stauffer D., Aharony A.* Introduction to Percolation Theory. 2nd Ed. Heinemann, 1996.
4. *Goldenfeld N.* Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group – Reading, Massachusetts: Perseus Books, London, Philadelphia: Taylor & Francis, 2003.
5. *Pathria R.K.* Statistical Mechanics. 2nd Ed. Oxford: Butterworth 1992.

ЗАДАНИЕ

1. [C]Вычислить фрактальные размерности

a) множества Кантора

- для числа ветвей $K = 3$ и масштабного множителя $r = 1/4$,
- для числа ветвей $K = 2$ и масштабного множителя $r = 1/2$,
- для числа ветвей $K = 1$ и масштабного множителя $r = 0.999$,
- для произвольного числа ветвей K и произвольного масштабного множителя r;

b) трехмерного множества Кантора;

c) квадратной кривой Коха;

d) кривой Мандельброта–Гивена;

e) салфетки Серпинского;

f) ковра Серпинского.

2. Найти приближенное решение для свободной энергии и средней намагниченности в модели Изинга с взаимодействием ближайших соседей (n.n.). Для поиска решения

- ввести эффективное среднее поле;
- воспользоваться вариационным методом Боголюбова;
- *использовать формулу интеграла Гаусса с ненулевым средним.

Заменить ближний порядок в статсумме интегралом Гаусса;

- *использовать преобразование Хаббарда–Стратоновича.

*Объяснить качественно для двух последних методов решения, использование какого приближения привело к решению среднего поля.

3. Найти точное решение для свободной энергии и средней намагниченности в модели Изинга с взаимодействием, не зависящим от расстояния между спинами.

4. *Найти приближенное решение для свободной энергии и намагниченности для n.n. антиферромагнетика на квадратной решетке. Найти решение

- введением эффективного поля;
- вариационным методом Боголюбова.

Для нулевого магнитного поля качественно объяснить, почему свободные энергии ферромагнетика и антиферромагнетика совпадают. Для ненулевого магнитного поля найти смещение критической температуры.

5. *Введением эффективного поля найти приближенное решение для свободной энергии и средней намагниченности смешанного n.n. ферромагнетика-антиферромагнетика.

6. Введением эффективного поля найти корреляционную функцию модели Изинга с произвольным взаимодействием.

7. *Введением переменного по пространству магнитного поля (метод Каданова) найти корреляционную функцию модели Изинга.

8. Система представляет собой твердое тело с тонкими стенками, окружающими внутреннюю полость, содержащую черное излучение. Принять, что объем стенок твердого тела пренебрежимо мал по сравнению с объемом полости. Количество фотонов в полости определяется равновесным состоянием системы. Система поддерживается при постоянном объеме и приводится в контакт с термостатом, обменивающимся с ней только теплом. Качественно показать, какой термодинамический потенциал будет свободной энергией системы.

9. *Рассмотреть тепловую версию модели волоконного пучка с восстановлением волокон. Принять, что энергия целого волокна равна $0.5 E V_f \varepsilon^2$ (здесь V_f – объем волокна), а энергия разрушенного волокна равна энергии образования свободной поверхности γ. Предположить, что разрушенные волокна могут восстанавливаться (исцелять-

ся). Для упрощения принять, что восстановленное волокно воспринимает деформацию его соседей и тем самым должно иметь энергию $0.5EV_f\,\varepsilon^2$. Вводя «эффективные спины» $S_i = 0$ для разрушенного волокна i и $S_j = 1$ для целого волокна j, записать гамильтониан системы в спиновых переменных. Выполнив замену переменных решеточного газа, перейти к подобию модели Изинга. В приближении среднего поля найти свободную энергию системы при $\varepsilon = \text{const}$ и при $\sigma = \text{const}$. Качественно обсудить сходства и различия модели и ее свободной энергии с моделью Изинга.

10. Построить преобразование РГ с произвольным числом спинов в ячейке для одномерной n.n. модели Изинга в отсутствие магнитного поля.

11. Построить преобразование РГ для одномерной n.n. модели Изинга со спинами – 1, 0, 1 в отсутствие магнитного поля.

12. Построить преобразование РГ для двумерной n.n. модели Изинга на квадратной решетке в отсутствие магнитного поля.

13. [C]Построить преобразование РГ для перколяции узлов на треугольной и квадратной решетках. Построить преобразование РГ для перколяции связей на квадратной решетке.

14. [C]Для перколяции узлов на одномерной решетке при периодических и свободных граничных условиях найти точное решение для эффекта конечного размера системы для среднего размера кластеров. Показать, что скейлинг-поведение появляется лишь в малой окрестности критической точки, и найти соответствующую скейлинг-функцию.

Срок сдачи задания: 30.11 – 07.12. 2020 г.

Подписано в печать 30.06.2020. Формат 60 × 84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 0,5. Уч.-изд. л. 0,4. Тираж 100 экз. Заказ № 87.
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
Тел.: +7(495)408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Моск. обл. г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел.: +7(495)408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru