

УДК 536-12

Ю. А. Фридман¹, К. В. Чукбар^{1,2}¹Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»²Московский физико-технический институт (государственный университет)

Соотношения взаимности Онзагера и симметрии пространства, связанные с векторными полями в среде

Рассматривается задача об обращении теорем взаимности для потенциальных и вихревых полей в среде. Формулируется и доказывается геометрический принцип взаимности, позволяющий сделать вывод о взаимной обусловленности свойств симметрии тензоров, связывающих термодинамические потоки и силы в однородной среде, и симметрий пространственного характера. Рассмотрение проводится как для гамильтоновых, так и для диссипативных систем.

Ключевые слова: соотношения взаимности Онзагера, теоремы взаимности, симметричность тензора, тензор проводимости, тензор диэлектрической проницаемости, стационарные процессы, энтропия, энергия поля в среде.

Yu. A. Fridman¹, K. V. Chukbar^{1,2}¹National Research Centre «Kurchatov Institute»²Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Onsager's reciprocity relations and space symmetries connected with the vector fields in the medium

The problem of inverting of the reciprocity theorems for the potential and vortex fields is considered. The geometric reciprocity principle stating the interdependence of the symmetrical properties of the tensors relating thermodynamic forces to thermodynamic flows in the homogeneous medium to the space symmetries as in geometry is formulated and proved. Both Hamiltonian and dissipative systems are considered.

Key words: Onsager reciprocity relations, reciprocity theorems, symmetry of a tensor, conductivity tensor, dielectric permeability tensor, stationary processes, entropy, field energy in the medium.

1. Введение

Соотношения взаимности Онзагера [1], исходя из временной симметрии микроскопических процессов в среде, задают пространственные симметрии для скалярных и векторных полей. Напомним вкратце, в чем заключаются эти соотношения и как они обыкновенно выводятся [2].

Рассмотрим набор параметров $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, характеризующих состояние некоторой системы частиц, близкое к положению равновесия. отождествим этот набор с компонентами вектора $\alpha = \alpha^0 + \tilde{\alpha}$, где α^0 — вектор в n -мерном пространстве состояний системы, характеризующий положение равновесия, $\tilde{\alpha}$ — вектор малых отклонений (флуктуаций) от этого положения. Предположим [3], что флуктуации $\tilde{\alpha}$ затухают по линейному закону $d\tilde{\alpha}/dt = \hat{M}\tilde{\alpha}$, где \hat{M} — некая матрица $n \times n$ с отрицательно определенной симметричной частью. Состояние системы, в частности энтропия S , определяется набором флуктуаций $\tilde{\alpha}$, причем $\tilde{S} = S - S_0 = g_{ij}\tilde{\alpha}_i\tilde{\alpha}_j$, где S_0 — равновесное значение энтропии, g_{ij} — коэффициенты отрицательно определенной матрицы \hat{G} такой, что $\partial S/\partial\alpha = \hat{G}\tilde{\alpha}$, и мы пренебрегаем членами более чем второго порядка малости. Положим $J_i = \dot{\alpha}_i$, $X_i = \partial S/\partial\alpha_i$, в этом случае

J_i, X_i называются сопряженными друг другу (термодинамическими) потоком и силой. В рассматриваемом приближении потоки линейно зависят от сил:

$$\mathbf{J} = \hat{L}\mathbf{X}, \quad (1)$$

где \mathbf{J} — вектор с компонентами (J_1, \dots, J_n) ; \mathbf{X} — вектор с компонентами (X_1, \dots, X_n) ; \hat{L} — матрица $n \times n$ с постоянными коэффициентами. Принцип взаимности Онзагера утверждает, что эта матрица симметрична: $\hat{L} = \hat{L}^T$, где верхний индекс T обозначает транспонирование. Во вращающейся среде принцип взаимности принимает вид $\hat{L}(\boldsymbol{\omega}) = \hat{L}^T(-\boldsymbol{\omega})$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения среды. Так же¹ в присутствии внешнего магнитного поля \mathbf{B} матрица \hat{L} симметрична с учетом обращения знака у \mathbf{B} : $\hat{L}(\mathbf{B}) = \hat{L}^T(-\mathbf{B})$. Помимо сделанных выше предположений, в основе доказательства принципа взаимности Онзагера лежит микроскопическая обратимость во времени законов движения частиц, составляющих систему. Из микроскопической обратимости ньютоновской динамики следует

$$\langle \tilde{\alpha}_i(t, \mathbf{B}, \boldsymbol{\omega}) \tilde{\alpha}_j(t + \tau, \mathbf{B}, \boldsymbol{\omega}) \rangle = \langle \tilde{\alpha}_i(t + \tau, -\mathbf{B}, -\boldsymbol{\omega}) \tilde{\alpha}_j(t, -\mathbf{B}, -\boldsymbol{\omega}) \rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю или по времени, t — произвольный момент времени, τ — небольшой временной промежуток. Отсюда и из линейности затухания флуктуаций путем некоторых преобразований получается симметричность матрицы \hat{L} с учетом обращения знака магнитного поля/угловой скорости вращения среды.

Принцип взаимности Онзагера объясняет симметричность матриц переноса, например, равенство электротермического и термоэлектрического коэффициентов или симметричность (термо-)диффузионных матриц, которые фигурируют в законах Фика для многокомпонентной среды. Симметричность тензоров, связывающих векторные потоки и силы в диссипативных процессах, например, тензора проводимости, вязкости или теплопроводности, также выводятся из соотношений Онзагера [2, 4]. Напомним, что, в соответствии с замечанием Казимира [2], онзагеровская схема, приведенная выше, не переносится автоматически на ситуацию трехмерных потоков и сил, линейно связанных друг с другом посредством характеризующих среду тензоров. Действительно, в выражении $j_\lambda = \sigma_{\lambda\mu} E_\mu$, где \mathbf{j} — плотность электрического тока в среде, $-\nabla\varphi = \mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\lambda, \mu = x, y, z$ индексируют (например) декартовы координаты в среде, компоненты j_λ по отдельности не представимы в виде временных производных каких-либо скалярных параметров, чьи отклонения от положения равновесия корректно характеризуют состояние среды. В этом смысле симметрия тензора проводимости может быть получена при применении онзагеровской схемы лишь опосредованно. Алгоритм действий выглядит так: среда разбивается на малые участки (такие, что каждый из них можно считать эквипотенциальным); как нетрудно показать, производство энтропии представляется в виде $T\dot{S} = \dot{q}_i\varphi_i$, где q_i — заряд элемента среды с номером i , φ_i — его потенциал, T — температура среды (для простоты мы будем предполагать, что в среде температура поддерживается однородной и постоянной). Тогда схема Онзагера применима к набору флуктуаций (q_i) (в равновесном состоянии среда нейтральна) и позволяет заключить, что в равенстве $\dot{q}_i = L_{ij}\varphi_j$ матрица коэффициентов симметрична: $L_{ij} = L_{ji}$. Путем измельчения исходного разбиения приходим к равенству, в котором сумма заменяется интегралом:

$$\dot{q}(\mathbf{r}) = \int L(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (2)$$

причем $L(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = L(\mathbf{r}', \mathbf{r})$. Далее, воспользовавшись тем, что $\dot{q} = \text{div } \mathbf{j}$ и $\mathbf{j} = \sigma_{\lambda\mu}(-\nabla\varphi)$, записав

$$\text{div}(\hat{\sigma} \nabla\varphi) = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \text{div}'[\hat{\sigma} \nabla'\varphi(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}', \quad (3)$$

¹Онзагер в [1] вместо угловой скорости вращения говорит о «кориолисовых силах». В общем случае можно говорить о гироскопических силах, зависящих от скоростей и не совершающих работы при перемещении среды — таких, как сила Лоренца, обращение знака которой равносильно обращению направления магнитного поля \mathbf{B} .

посредством двукратного интегрирования по частям приведем (3) к виду (2):

$$\dot{q} = \int \sum_{\lambda, \mu} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \left[\sigma_{\lambda\mu}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial x'_\lambda} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \varphi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (4)$$

Симметричность ядра интеграла в (2) означает, что

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} \left[\sigma_{\lambda\mu}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial x'_\lambda} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\sigma_{\lambda\mu}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right], \quad (5)$$

откуда следует

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial \sigma_{\lambda\mu}}{\partial x_\lambda} = \sum_{\lambda} \frac{\partial \sigma_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda} \quad (6)$$

Равенство (6) (в отсутствие магнитного поля и гироскопических сил) гарантируется соотношениями Онзагера и, строго говоря, не сводится к симметричности тензора проводимости. Поскольку бездивергентная добавка к термодинамическому потоку (в случае, разобранным выше — плотности электрического тока), обуславливаемая несимметричной частью соответствующего тензора, не дает вклада в производство энтропии, это именно то, чего следовало ожидать. Равенство $\sigma_{\mu\lambda} = \sigma_{\lambda\mu}$ можно получить из (6) по непрерывности, если положить $\sigma_{\mu\lambda} = 0$ в вакууме.

Для однородных сред (или, возможно, составных и неоднородных, но с условием, что тензор, характеризующий диссипативный процесс, зависит только от среды) принципу взаимности Онзагера можно придать наглядный характер «пространственной» симметрии векторных полей. В этом качестве он отвечает² за целый класс теорем взаимности — в механике, в термодинамике, в электротехнике и т. д. Представим себе два (умозрительных) опыта. В первом из них мы пропустим единичный ток между клеммами A и B и измерим напряжение U_1 между другой парой клемм C и D . Во втором опыте единичный ток будем пропускать между клеммами C и D , а напряжение U_2 измерять на паре клемм A и B . Измерения покажут $U_1 = U_2$, как бы хитро ни была устроена схема постоянного тока. (Ср. теорему взаимности для цепей линейного тока, теоремы Бетти о взаимности работ etc.)

Сходной симметрией обладают гамильтоновы («энергетические») системы. Так, если поместить на проводники A и B заряды Q и $-Q$ соответственно, то напряжение между проводниками C и D будет таким же, как напряжение между проводниками A и B , если те же заряды размещены на проводниках C и D (предполагается, что обе пары проводников погружены в диэлектрическую среду). Но энергетический «принцип взаимности» выводится из постулата о существовании энергии, зависящей только от расположения зарядов [4] — точнее, в нетеровских терминах, из существования у системы зарядов лагранжиана, инвариантного по отношению к сдвигу во времени. Равенство смешанных производных

$$\frac{\partial^2 W}{\partial Q_1 \partial Q_2} = \frac{\partial^2 W}{\partial Q_2 \partial Q_1}, \quad (7)$$

где W — электрическая энергия системы из двух «конденсаторов», $Q_1, -Q_1$ — заряды на проводниках A и B , $Q_2, -Q_2$ — заряды на проводниках C и D , автоматически обеспечивает симметричность матрицы электроемкостей. Симметричность тензора диэлектрической проницаемости не базируется на микроскопической обратимости во времени (обратимости ньютоновской динамики) — она имеет отношение, скорее, к инвариантности законов

²Следует отметить, что соотношения Онзагера получены им [1] для систем, находящихся вблизи положения равновесия. Системы с постоянными источниками, которые мы рассматриваем ниже, суть системы в стационарном состоянии; соотношения взаимности, полученные для равновесной ситуации, на них распространялись как бы автоматически. Нюансы, возникающие из-за различия между этими ситуациями, отмечались физиками (см., например, [5]) и математиками [6, 7]. Доказано, что соотношения взаимности Онзагера, обобщенные для случая стационарных состояний, выполняются в определенных предположениях относительно микропроцессов, идущих в системе.

движения относительно сдвига во времени, соответственно, от знака магнитного поля или угловой скорости вращения среды она не зависит.

В настоящей работе мы сосредоточимся на геометрической наглядности, свойственной теоремам взаимности. Мы пойдем обратным путем: от пространственной симметрии некоторых базовых пар типа «источник–сток» и «точки измерения разности потенциалов» к симметрии онзагеровских коэффициентов. Мы покажем, что геометрически наглядный принцип «пространственной» взаимности сопряженных потоков и сил (для диссипативных систем) равносильно принципу взаимности Онзагера. К сожалению, путем «обращения» онзагеровского доказательства нельзя прийти к временной обратимости микроскопических процессов. Можно утверждать лишь, что при наличии пространственной взаимности система с данным законом (усредненного) затухания флуктуаций может быть реализована на базе микроскопических процессов (столкновений между частицами), обладающих симметрией по отношению к обращению времени. При этом преобразование параметров (таких, как угловая скорость вращения среды $\boldsymbol{\omega}$ и внешнее магнитное поле \mathbf{B}), по отношению к которому имеет место пространственная взаимность, вместе с преобразованием скоростей частиц определяет отображение, осуществляющее обращение времени в микроскопической системе. Можно сказать, что это преобразование есть «пространственный отпечаток» временной симметрии микроскопических процессов в среде.

Мы рассмотрим также случай, когда термодинамическая сила имеет не скалярный, но векторный потенциал; произвольные пары точек в этом случае заменяются произвольными контурами. Мы сформулируем условие пространственной взаимности для случая, когда рост энтропии определяется не одной, но несколькими парами сопряженных потоков и сил. Наше рассмотрение будет применимо и к «энергетическим» системам.

2. Вывод геометрического принципа взаимности

Сопряженные термодинамические поток и сила, например, плотность электрического тока \mathbf{j} и напряженность электрического поля \mathbf{E} , создают диссипацию: $\dot{s} = \mathbf{E}\mathbf{j}/T > 0$, где \dot{s} — плотность производства энтропии (равенство верно в отсутствие других потоков и сил). При этом $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, где φ — электростатический потенциал, а $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ всюду в среде, кроме областей источников (и стоков). Эти два векторных поля связаны тензором проводимости: $\mathbf{j} = \hat{\sigma}\mathbf{E}$. В присутствии любого параметра $\boldsymbol{\beta}$, родственного гироскопическим силам, как, например, \mathbf{B} (постоянного магнитного поля) и $\boldsymbol{\omega}$ (постоянной угловой скорости вращения среды), тензор проводимости, как следует из соотношений взаимности Онзагера, обладает следующей симметрией: $\hat{\sigma}(\boldsymbol{\beta}) = \hat{\sigma}^T(-\boldsymbol{\beta})$.

В энергетических системах можно наблюдать сходную диспозицию. Например, плотность электрической энергии в диэлектрике $w = \mathbf{E}\mathbf{D}$, где $\mathbf{D} = \hat{\epsilon}\mathbf{E}$ — вектор электрической индукции, $\hat{\epsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости. При этом снова $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ и $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ всюду, кроме областей источников (свободных положительных зарядов) и стоков (отрицательных). Тензор диэлектрической проницаемости симметричен: $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}^T$.

Действуя по аналогии с теоремой взаимности, например, из электростатики (о том, что заряд q , размещенный в точке A , создает в точке B такой же потенциал, что и возникающий в точке B при размещении того же заряда q в точке A), сформулируем для пары «источник–сток» следующее

Утверждение 1. Пусть заданы два векторных поля \mathbf{a} , \mathbf{b} , причем $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$ всюду в пространстве, кроме малых областей источников, а поле $\mathbf{b} = -\nabla\varphi$ потенциально. Пусть, кроме того, векторные поля $\mathbf{a} = \hat{L}\mathbf{b}$ связаны тензором \hat{L} , зависящим только от среды и обладающим свойством симметрии $\hat{L}(\boldsymbol{\beta}) = \hat{L}^T(-\boldsymbol{\beta})$, где $\boldsymbol{\beta}$ — некоторый «гироскопический» параметр (например, внешнее постоянное магнитное поле или угловая скорость вращения среды). Пусть источник и сток поля \mathbf{a} равной мощности I , размещенные в точках A и B соответственно, создают в пространстве поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 = -\nabla\varphi_1$, а источник и сток той же мощности, размещенные в точках C и D , создают поля \mathbf{a}_2 , $\mathbf{b}_2 = -\nabla\varphi_2$. Тогда

разность потенциалов $\varphi_1(C) - \varphi_1(D)$, возникающая на паре точек CD под воздействием поля, создаваемого парой «источник–сток» в точках A и B , равна разности потенциалов $\varphi_2(A) - \varphi_2(B)$, обязанной своим происхождением паре «источник–сток» в точках C и D .

Напомним, как доказываются теоремы взаимности, подобные утверждению 1. Рассмотрим формальную конструкцию $\int \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 dV$, где интегрирование производится по всему пространству за исключением малых областей A, B, C, D .

$$\int \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 dV = \int \mathbf{a}_1 (-\nabla \varphi_2) dV = - \int \operatorname{div} (\varphi_2 \mathbf{a}_1) dV, \quad (8)$$

мы воспользовались бездивергентностью \mathbf{a}_2 в области интегрирования (а также тем, что поток $(\varphi \mathbf{a})$ через поверхность сферы бесконечно большого радиуса исчезает). По теореме Гаусса последний интеграл по объему равен сумме интегралов по поверхностям, окружающим малые области A, B . Но поле \mathbf{a}_1 однородно на размерах, отвечающих областям C и D , поэтому

$$- \int \operatorname{div} (\varphi_2 \mathbf{a}_1) dV = I_{\varphi_2}(A) - I_{\varphi_2}(B). \quad (9)$$

Аналогично

$$\int \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 dV = I_{\varphi_1}(C) - I_{\varphi_1}(D). \quad (10)$$

С другой стороны, выражая поля $\mathbf{a}_{1,2}$ через поля $\mathbf{b}_{1,2}$ с помощью тензора \hat{L} , имеем

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2 \hat{L}(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1 \hat{L}(-\boldsymbol{\beta}) \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 \mathbf{a}_1. \quad (11)$$

Из (8), (9), (10) и (11) вытекает утверждение 1.

Итак, мы убедились во «взаимности» любых двух пар точек (малых областей) A, B и C, D в следующем смысле: если пропускать один и тот же ток I сперва между точками A, B , а затем между точками C, D , то разность потенциалов на второй паре точек в первом опыте будет равна разности потенциалов на первой паре точек во втором — с точностью до обязательного обращения знаков угловой скорости вращения и внешнего магнитного поля. В этом заключается геометрический принцип взаимности для пар точек. В любой ситуации пары точек A, B и C, D , для которых это условие выполняется, мы будем называть *взаимными* по отношению к паре векторных полей \mathbf{a}, \mathbf{b} . И более общо, если для двух конфигураций источников 1 и 2 выполнено условие утверждения 1, мы будем называть эти конфигурации взаимными по отношению к паре \mathbf{a}, \mathbf{b} .

Геометрический принцип взаимности по отношению к двум полям $\mathbf{a}, \mathbf{b} = -\nabla \varphi$, связанным тензором \hat{L} , зависящим только от свойств среды (и не зависящим от конкретного вида векторных полей), мы формулируем именно для пар точек (и размещаемых в них источников и стоков равной мощности), хотя при условии $\hat{L}(\boldsymbol{\beta}) = \hat{L}^T(-\boldsymbol{\beta})$ его можно было бы сформулировать и для более общего случая, как показывает утверждение 1. Это связано с тем, что взаимности любых двух пар точек по паре полей \mathbf{a}, \mathbf{b} оказывается достаточно, чтобы доказать симметричность тензора \hat{L} с точностью до обращения знаков $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{V}$ etc (доказательство см. в Приложении 1).

3. Базовые пары

Если задана некоторая система источников поля \mathbf{a} , размещенных в точках (малых областях), имеющих радиус-векторы $\mathbf{r}_i, i = 1, \dots, n$, и мощности I_i соответственно, то уравнение, задающее потенциал φ во всем пространстве, имеет вид

$$- \operatorname{div} (\hat{L} \nabla \varphi) = \sum_{i=1}^n I_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (12)$$

Это уравнение линейно, аддитивно по правой части и имеет единственное решение. Объединяя две конфигурации источников, получим поле, являющееся суммой полей, обязанной своим происхождением каждой из конфигураций. Это же относится, очевидно, и к векторным полям \mathbf{a} , \mathbf{b} .

Таким образом, конфигурации источников можно «складывать». Если каждая из двух конфигураций источников попарно взаимна с третьей, то и сумма двух первых взаимна с третьей. Для пар «источник–сток равной мощности», представляющих для нас особый интерес, это означает, что пару «источник–сток» можно «продолжить» другой такой парой (см. рис. 1). Действительно, если пара точек K, L взаимна с парой точек A, B и пара точек L, M взаимна с парой точек A, B , то и пара точек K, M взаимна с парой точек A, B . (Если мы помещаем в точки K, L источники мощностей $I, -I$ соответственно, а затем в точки L, M — снова источники мощностей $I, -I$, то источник и сток, размещенные в точке L , взаимоуничтожаются; в результате мы пропускаем ток I между точками K и M .)

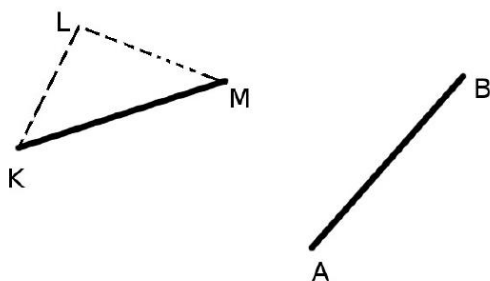


Рис. 1. Если пара точек (K, L) взаимна с (A, B) и пара точек (L, M) взаимна с (A, B) , то и пара точек (K, M) взаимна с (A, B)

Приобретя возможность манипулировать парами «источник–сток», мы вправе «проверить на взаимность» не все пары точек, а только те, из которых мы можем в соответствии с процедурой объединения конфигураций получить остальные.

Пары точек A, B и C, D мы будем называть равными, если равны содержащие их отрезки: $AB = CD$. Предположим, что любые две равные пары точек, расположенные на параллельных (или совпадающих) прямых, взаимны. Тогда, очевидно, любые целые кратные A, B и C, D по длине, лежащие на параллельных прямых, также взаимны. По непрерывности отсюда нетрудно получить взаимность любых двух пар точек, лежащих на параллельных (или совпадающих) прямых.

Примем также, что любые две равные пары точек в пространстве, расположенные таким образом, что отрезок, соединяющий их середины, перпендикулярен обоим содержащим эти пары отрезкам, взаимны. Речь идет о равных парах точек, лежащих «крестом» в точности друг над другом, см. рис. 2.

Если пары A, B и C, D (рис. 2) взаимны, то C, D взаимна с любой парой E, F , получаемой из A, B параллельным переносом вдоль направления, параллельного CD . Но C, D также можно переместить параллельно E, F и получить новую пару G, H , взаимную с E, F . Очевидно, что таким образом можно получить любые две равные перпендикулярные пары, и они окажутся взаимными. А если взаимны любые две равные перпендикулярно расположенные пары точек, то взаимны и две произвольные «перпендикулярные» пары — это показывается так же, как и для параллельных пар.

Очевидно, что произвольную пару точек (как конфигурацию источников) можно представить в виде объединения пар точек, параллельных и перпендикулярных заданному направлению. Поэтому из взаимности всех параллельных и всех перпендикулярных пар вытекает взаимность двух произвольных.

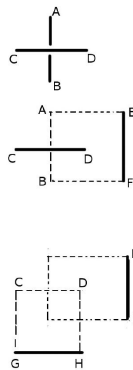


Рис. 2. Пары (A, B) и (C, D) расположены в пространстве крестом в точности друг над другом. Если конфигурация $\{C, D\}$ взаимна с $\{A, B\}$, то $\{E, F\} = \{E, A\} \cup \{A, B\} \cup \{B, F\}$ также взаимна с $\{A, B\}$. Аналогично $\{E, F\}$ взаимна с $\{G, H\}$

Итак, базовые пары точек в пространстве³ — это любые две равные пары точек, расположенные на параллельных прямых, и любые две равные пары точек, расположенные «крестом». Если все такие пары взаимны, взаимны и произвольные пары точек.

Здесь виден чисто геометрический характер принципа взаимности. Во вращающихся средах параллельные прямые остаются параллельными, а перпендикулярные — перпендикулярными; вращение сохраняет взаимное расположение базовых пар. Замечательно, однако, что для однородной среды базовые пары наглядно демонстрируют, что при «переключении» источников от одной пары к другой нужно обратить направление вращения. В самом деле, пусть наблюдатель, смотрящий на рис. 1 сверху, видит источник и сток размещенными в точках A и B и возникающую при этом картину распределения полей. Пусть вся картина вращается против часовой стрелки. Если разместить теперь источник и сток в точках C и D , то наблюдатель может увидеть в точности ту же самую картину, если перейдет на новое место и будет смотреть на рис. 1 снизу, с другой стороны листа. Но для этого придется изменить и направление вращения среды — иначе картины распределения полей не совпадут, и это скажется на измерениях. Заметим также, что для однородной среды выбранные нами базовые пары окажутся взаимными и для нелинейного случая, когда векторные поля \mathbf{a} и \mathbf{b} связаны тензором, зависящим не только от самой среды, но и от самих векторных полей. Однако аддитивность (12) по правой части уже не гарантирована, и взаимность произвольных двух пар точек в пространстве, вообще говоря, не следует в этом случае из взаимности базовых пар.

Для каких-либо утилитарных целей можно поступить и более жестко: выделить три взаимно перпендикулярных направления и выбрать из упомянутого набора базовых пар только те из них, которые отвечают этим направлениям. Такой «решетки», очевидно, достаточно, чтобы доказать взаимность двух произвольных пар.

4. Геометрический принцип взаимности для полей с вектор-потенциалом

Теорема взаимности для вихревых конфигураций, именно, взаимность потока векторного поля, имеющего вектор-потенциал, через контур и вихревого источника второго векторного поля в виде контура (замкнутой вихревой нити) — например, в форме равенства взаимных индуктивностей двух катушек с током $L_{21} = L_{12}$ — обычно доказывается для энергетических систем с использованием факта существования магнитной энергии, зависящей только от конфигурации токов [8]. Чтобы включить в рассмотрение и энтропийные

³Базовые пары можно выбрать и иначе — например, любые две равные параллельные и любые две равные, находящиеся на сторонах некоторого угла на равном расстоянии от вершины.

системы, удобно действовать так же, как и при доказательстве взаимности потоков и (скалярных) потенциалов⁴.

Рассмотрим снова два векторных поля \mathbf{a} , \mathbf{b} , причем $\mathbf{a} = \hat{L} \mathbf{b}$, $\hat{\sigma} = \hat{L}^T$ — симметричный тензор, поле \mathbf{a} является безвихревым всюду, кроме малой области с кольцевым вихревым источником, поле $\mathbf{b} = \text{rot } \boldsymbol{\Omega}$ имеет вектор-потенциал. Рассмотрим малое кольцо 1 и малое кольцо 2. Разместим вдоль кольца 1 вихревую нить — источник векторного поля \mathbf{a}_1 с «линейным зарядом» \mathbf{K} (в том смысле, что если окружить вихревую нить малой тороидальной поверхностью, то циркуляция \mathbf{a}_1 по любому ее сечению, перпендикулярному к вихревой нити, равна $|\mathbf{K}|$). Измерим поток поля \mathbf{b}_1 через площадку, ограниченную кольцом 2. Этот поток равен $\int_2 \mathbf{b}_1 \mathbf{dS} = \oint_2 \boldsymbol{\Omega}_1 \mathbf{dl}$ — циркуляции вектора $\boldsymbol{\Omega}_1$ по периметру кольца 2. Разместим теперь вихревой источник с «линейным зарядом» \mathbf{K} в кольце 2 и измерим поток поля \mathbf{b}_2 через площадку, ограниченную кольцом 1. Он равен $\int_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{dS} = \oint_1 \boldsymbol{\Omega}_2 \mathbf{dl}$ — циркуляции вектора $\boldsymbol{\Omega}_2$ вдоль границы кольца 2. Совпадение потоков, измеренных в двух этих разных опытах, утверждает

Геометрический принцип взаимности для вихревых полей. Если поля $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$ обязаны своим происхождением вихревому источнику поля \mathbf{a}_1 с линейным зарядом \mathbf{K} , размещенному вдоль контура 1, поля $\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2$ — вихревому источнику поля \mathbf{a}_2 с тем же линейным зарядом \mathbf{K} , размещенному вдоль контура 2, $\mathbf{a}_{1,2} = \hat{L} \mathbf{b}_{1,2}$, $\hat{L} = \hat{L}^T$ — симметричный тензор, $\mathbf{b}_{1,2} = \text{rot } \boldsymbol{\Omega}_{1,2}$, то поток векторного поля \mathbf{b}_1 через контур 2 равен потоку векторного поля \mathbf{b}_2 через контур 1:

$$\int_2 \mathbf{b}_1 \mathbf{dS} = \int_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{dS}. \quad (13)$$

По аналогии со случаем, когда поле \mathbf{b} имело скалярный потенциал, вычислим снова $\int \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 dV$ по всему пространству, исключая только малые области, содержащие контуры 1 и 2. В силу безроторности \mathbf{a}_1 в области интегрирования этот интеграл приводится к дивергентному виду $\int \text{div} [\boldsymbol{\Omega}_2, \mathbf{a}_1] dV$. Последний, в свою очередь, сводится к интегралу по малой тороидальной поверхности, охватывающей контур 1, имеющему вид $\int_1 ([\boldsymbol{\Omega}_2, \mathbf{a}_1], \mathbf{dS})$. Под интегралом стоит смешанное произведение, в котором два вектора перпендикулярны друг другу $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{dS}$, а третий $\boldsymbol{\Omega}_2$ можно заменить его проекцией c_{2l} на касательную к контуру, и считать постоянным вдоль всего сечения, ортогонального к линии контура. Элемент площади распадается в произведение $\mathbf{dS} = \mathbf{dl} \times \mathbf{r} d\psi$, так что искомым интеграл можно заменить кратным:

$$\int \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 dV = \int_1 ([\boldsymbol{\Omega}_2, \mathbf{a}_1], \mathbf{dS}) = \int_0^{2\pi} a_{1r} r d\psi \oint_1 (\boldsymbol{\Omega}_2, \mathbf{dl}) = K \int_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{dS}, \quad (14)$$

в последнем интеграле \mathbf{dS} — элемент площади поверхности, натянутой на контур 1. Аналогично получаем

$$\int \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 dV = K \int_2 \mathbf{b}_1 \mathbf{dS}. \quad (15)$$

С другой стороны,

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2 \hat{L} \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1 \hat{L} \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1, \quad (16)$$

отсюда, учитывая (14), (15), получаем утверждение теоремы (13).

Пример энергетической системы с парами векторов типа \mathbf{a}, \mathbf{b} — это система «среда + магнитное поле», где роль поля, безвихревого всюду кроме области источников, играет напряженность магнитного поля \mathbf{H} , роль поля, обладающего вектор-потенциалом — индукция магнитного поля \mathbf{B} , а связывает их тензор магнитной проницаемости $\mathbf{H} = \hat{\mu}^{-1} \mathbf{B}$. Стационарную энтропийную систему, с термодинамическим потоком и термодинамической

⁴В магнитостатике уравнения, подобные приведенным ниже, часто получают посредством принципа перестановочной двойственности.

силой, имеющей вектор-потенциал и не зависящей от времени, организовать не так просто. На каких-то интервалах времени ферромагнитное колечко, помещенное в проводящую среду, можно считать размагничивающимся с постоянной скоростью. Если в этот период достигается стационарное состояние, тогда в соответствии с уравнениями Максвелла напряженность вихревого электрического поля \mathbf{E} имеет источник завихренности $\propto \partial B/\partial t$, а плотность электрического тока $\mathbf{j} \propto \text{rot } \mathbf{H}$ имеет вектор-потенциал; как и в безвихревом случае, эти два векторных поля связаны друг с другом тензором проводимости. То есть в роли вектора \mathbf{a} выступает плотность тока \mathbf{j} , в роли вектора \mathbf{b} — напряженность электрического поля \mathbf{E} , и равными в двух опытах оказываются полные токи через поверхности, ограниченные соответственно контурами 1 и 2.

В присутствии внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 симметрия тензора проводимости будет иметь вид $\hat{L}(\mathbf{B}_0) = \hat{L}^T(-\mathbf{B}_0)$, и в условии теоремы взаимности следует добавить, что измерения потоков вектора \mathbf{b} через площадки 1 и 2 производятся при разных знаках внешнего магнитного поля. Другой пример энтропийной системы с «непривычным» тензором, характеризующим среду, будет рассмотрен в Приложении 2.

Для энергетических систем в аналогичной конструкции вместо тензора проводимости может фигурировать тензор диэлектрической проницаемости. Так, если разместить в диэлектрической среде то же размагничивающееся ферритовое кольцо (или кольцевой соленоид с током, наращиваемом в нем линейно во времени), получим роторный источник электрического поля в среде $\text{rot } \mathbf{E} = \partial B/\partial t$. Индукция электрического поля \mathbf{D} в отсутствие свободных зарядов бездивергентна, следовательно, имеет вектор-потенциал. Для пары полей \mathbf{E} , \mathbf{D} можно формулировать теорему взаимности в соответствии со схемой, разобранный выше.

В рассмотренных примерах встречаются те же тензоры (проводимости/сопротивлений и диэлектрической проницаемости), симметричность которых уже сослужила нам службу при работе с потенциальными полями. Геометрический принцип взаимности, однако, имеет общий характер, и как таковой применим для разных типов полей и тензоров. Пример тензора принципиально иной природы, также характеризующего среду и так же включенного в работу принципа взаимности, приводится в Приложении 2.

5. Базовые контуры

Пусть имеются произвольные контуры 1 и 2. Применим к контуру 2 стандартный прием — начертим на стягивающей его поверхности решетку малых «колец». Суммарный поток любого векторного поля через площадку, ограниченную контуром 2, будет равен сумме потоков через малые кольца. С другой стороны, если по каждому из малых колец идет одинаковый ток I , то все попарно граничащие друг с другом токи компенсируются, и результирующий ток I течет только по границе контура. Отсюда в предположении, что контур 1 взаимен с любым из малых колец, составляющих контур 2, нетрудно заключить, что контур 1 взаимен с контуром 2. Значит, вопрос о взаимности любых двух контуров по паре векторных полей сводится к вопросу о взаимности некоторых более узких наборов базовых контуров.

Подобно тому, как мы делали выше для базовых пар, можно и здесь описать геометрические отношения, в которых должны состоять контуры, чтобы считаться базовыми. Но такое описание оказывается сравнительно громоздким. Проще всего начертить в пространстве решетку, например, ортогональную, с равным шагом, и проверять попарную взаимность всех ее квадратных граней («базовые контуры»), затем измельчать ее, например, вдвое и проверять снова. Ясно, что любой контур можно сколь угодно точно приблизить совокупностью квадратных граней достаточно мелкой решетки.

6. Случай более чем одной пары сопряженных потоков и сил

Производство энтропии в диссипативных системах в общем случае может быть представлено в виде

$$\dot{S} = \sum \mathbf{J}_i \mathbf{X}_i, \quad (17)$$

где \mathbf{J}_i — термодинамические потоки, \mathbf{X}_i — сопряженные им термодинамические силы, $i = 1, \dots, n$ — индекс, нумерующий сопряженные пары сила — поток. В линейном случае каждый из потоков есть линейная комбинация всех термодинамических сил

$$\mathbf{J}_i = \sum_j \hat{M}_{ij} \mathbf{X}_j, \quad (18)$$

где \hat{M}_{ij} — матрица 3×3 , зависящая только от среды. Соотношения Онзагера обеспечивают симметрию полной матрицы, связывающей потоки и силы: $\hat{M}_{ij}(\boldsymbol{\beta}) = \hat{M}_{ji}(-\boldsymbol{\beta})$, где $\boldsymbol{\beta}$ — уже обсуждавшийся выше гироскопический параметр среды. Формально соотношения между матрицами выглядят так же, как соотношения между числовыми коэффициентами при скалярных потоках в исходной схеме Онзагера; это не должно вносить путаницы.

В этом случае снова для любых двух конфигураций источников верно

$$\sum \mathbf{J}_i^1 \mathbf{X}_i^2 = \sum \mathbf{J}_i^2 \mathbf{X}_i^1, \quad (19)$$

где верхние индексы «1» и «2» у векторных полей означают, что они порождены первой или второй конфигурацией источников соответственно. Равенство (19) легко проверяется непосредственным вычислением. Если все термодинамические силы потенциальны, то геометрический принцип взаимности можно сформулировать для n пар источников и стоков полей \mathbf{J}_i и n референтных пар для измерения разности потенциалов φ_i ($\mathbf{X}_i = -\nabla\varphi_i$). Именно, если даны два набора пар точек A_i, B_i и C_i, D_i , $i = 1, \dots, n$, то при размещении источников и стоков мощностей I_i полей \mathbf{J}_i в точках A_i, B_i соответственно мы можем измерить разности потенциалов $\Delta\varphi_i^1 = \varphi_i(C_i) - \varphi_i(D_i)$, а при размещении тех же источников и стоков мощностей I_i в точках C_i, D_i — разности потенциалов $\Delta\varphi_i^2 = \varphi_i(A_i) - \varphi_i(B_i)$ и наблюдать совпадение выражений

$$\sum \Delta\varphi_i^1 I_i = \sum \Delta\varphi_i^2 I_i. \quad (20)$$

Доказывается это аналогично принципу взаимности для одной пары сопряженных потоков и сил. Несмотря на очевидные потери в плане наглядности формулировки, в таком виде принцип взаимности тоже можно свести к взаимности базовых наборов пар точек. Достаточно потребовать взаимности любых двух наборов из n пар точек A_i, B_i и C_i, D_i таких, что отрезки $A_i B_i$ и $C_i D_i$ равны между собой и лежат на параллельных (совпадающих) прямых или «крестом» друг над другом, как и для случая одной пары сопряженных потоков и сил.

Для энергетических систем аналогичные выражения возникают в случае переменных полей заданной частоты.

7. Заключение

Известно, что из «локальной» симметричности тензора, характеризующего среду, следует «глобальная» пространственная симметрия этой же среды относительно интегральных характеристик соответствующих векторных полей. В приложении (см. ниже) показывается, что верно и обратное: при наличии такого тензора, зависящего только от среды, этот тензор оказывается симметричным, если выполняется геометрический принцип взаимности.

Подходя к принципу взаимности с наглядной, геометрической стороны, можно свести его к взаимности некоторых базовых пар (контуров), для которых особый вид симметрии

тензора по отношению к угловой скорости вращения среды и другим аксиальным («гиро-скопическим») параметрам очевидным образом возникает как следствие симметрий одно-родного пространства.

Было бы соблазнительно обратить стандартное онзагеровское доказательство целиком и, исходя из пространственных симметрий, гарантируемых геометрическим принципом взаимности, получить симметрию микроскопических процессов, идущих в среде, по отношению к обращению времени. Это, однако, представляется недостижимым. Как бы то ни было, в справедливости геометрического принципа взаимности проявляется глубокая связь между временной симметрией микроскопических процессов, протекающих в среде, и пространственными симметриями, характеризующими среду как целое. Действительно, под микроскопическими процессами можно подразумевать движение реальных частиц среды (физической системы с конечным числом степеней свободы). Если речь идет о равновесной статистической механике, то движение в среде происходит под действием консервативных сил, энергия системы сохраняется, рассматриваемая система имеет гамильтониан, а ее фазовое пространство представляет собой конечномерное многообразие с симплектической структурой. В неравновесном случае энергия системы также может быть определена, но в силу присутствия неконсервативных сил она уже не обязана сохраняться — тогда, как это делается и в классической термодинамике [9], систему рассматривают вместе с термостатом. Эволюция системы во времени описывается в терминах фазового потока $\dot{x} = f(x)$ (здесь x — «радиус-вектор» точки фазового пространства, $f(x)$ — потоковое преобразование). При некоторых требованиях к структуре $f(x)$ можно определить производство энтропии в системе. Оказывается, что, если $f(x)$ обратимо во времени, производство энтропии положительно (точнее, в общем случае — неотрицательно); можно построить конструкции, отвечающие термодинамическим потокам и термодинамическим силам и доказать симметрию «коэффициентов Онзагера». Обратимость во времени преобразования $f(x)$ означает, что существует отображение i фазового пространства системы на себя такое, что $i^2 = 1, f \circ i = i \circ f^{-1}$. Например, для гамильтоновых систем преобразование i переводит $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{q}, -\mathbf{p})$, где \mathbf{q} — совокупность обобщенных координат, \mathbf{p} — совокупность импульсов. При этом структура преобразования i , обеспечивающая обратимость во времени микропроцессов [6, 7], находит отпечаток в специфике пространственной симметрии по отношению к внешним параметрам (например, внешнему магнитному полю \mathbf{B} или угловой скорости вращения среды $\boldsymbol{\omega}$).

Приложение 1

Геометрическим принципом взаимности мы, следуя традиции, называли выше утверждение о том, что из симметрии тензора, связывающего два векторных поля, следует пространственная симметрия конфигураций его источников. На самом деле верно и обратное утверждение, которое тоже следовало бы включить в формулировку принципа. В этом смысле завершает доказательство геометрического принципа взаимности для пар точек следующее

Утверждение 2. Пусть два векторных поля \mathbf{a}, \mathbf{b} в среде связаны тензором \hat{L} : $\mathbf{a} = \hat{L} \mathbf{b}$, однородным в пространстве (или зависящим только от среды). Пусть, кроме того, поле \mathbf{a} бездивергентно всюду, кроме, возможно, малой области источников, а поле \mathbf{b} имеет скалярный потенциал $\mathbf{b} = -\nabla \varphi$, причем скалярное произведение $\mathbf{a} \mathbf{b}$ всюду в среде одного знака — например, неотрицательно. Тогда, если для любых пар точек среды 1 и 2 верно $\Delta \varphi_{12} = \Delta \varphi_{21}$, где $\Delta \varphi_{12}$ — напряжение, измеренное на паре точек 1 при пропускании тока мощности I (в присутствии внешнего магнитного поля \mathbf{B}) через пару точек 2, а $\Delta \varphi_{12}$ — напряжение на паре точек 2 при пропускании тока той же мощности I (в присутствии внешнего магнитного поля $-\mathbf{B}$) через пару точек 1, то $\hat{L}(\mathbf{B}) = \hat{L}^T(-\mathbf{B})$.

Терминология в формулировке теоремы выше для наглядности заимствована из электротехники. Если пару 1 составляют точки А, В, то «напряжением» на ней мы называем

разность потенциалов $\varphi(A) - \varphi(B)$, и говорим, что через эту пару точек пропущен ток I , если в точке A помещен источник поля \mathbf{a} мощности I , а в точке B — сток его той же мощности.

Приведем доказательство теоремы, обратной к теореме взаимности, для случая скалярного потенциала. Покажем сначала, что в однородной среде для вычисления скалярного поля φ при заданной системе источников и стоков важна только симметричная часть тензора \hat{L} . Уравнение для вычисления скалярного поля φ (при наличии у поля \mathbf{a} источника мощности I в точке с радиус-вектором \mathbf{r}_1 и стока той же мощности в точке \mathbf{r}_2) имеет вид

$$\operatorname{div}(\hat{L} \nabla \varphi) = I [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)]. \quad (21)$$

(Система источников и стоков в правой части (21) в принципе может быть любой — как будет видно из дальнейшего, его решение в любом случае будет определяться только симметричной частью тензора \hat{L} .)

В общем случае $\hat{L} = \hat{L}_s + \hat{L}_a$, где \hat{L}_s — симметричная положительно определенная матрица (поскольку $\nabla \varphi \hat{L} \nabla \varphi \geq 0$), \hat{L}_a антисимметрична.

Но $\hat{L}_a \nabla \varphi$ представимо в виде векторного произведения $[\mathbf{p} \times \nabla \varphi]$, где \mathbf{p} — некоторый постоянный вектор, и

$$\operatorname{div}[\mathbf{p} \times \nabla \varphi] = \nabla \varphi \operatorname{rot} \mathbf{p} - \mathbf{p} \operatorname{rot} \nabla \varphi = 0,$$

поэтому уравнение (21) сводится к

$$\operatorname{div}(\hat{L}_s \nabla \varphi) = I [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)], \quad (22)$$

где на месте тензора \hat{L} стоит его симметричная часть \hat{L}_s . Поле $\mathbf{a} = -\hat{L} \nabla \varphi$, разумеется, зависит от наличия антисимметричной части у оператора \hat{L} .

Сказанное выше можно отнести к уравнению вида (21) с произвольной правой частью:

$$\operatorname{div}(\hat{L} \nabla \varphi) = \operatorname{div}(\hat{L}_s \nabla \varphi) = \sum I_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (23)$$

У матрицы \hat{L}_s есть три собственных вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, попарно ортогональных, и отвечающие им собственные значения $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$. Направим по этим векторам оси координат (без ограничения общности имеем правую ортонормированную тройку базисных векторов). Получим вместо (23) уравнение

$$\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \sum I_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (24)$$

Если выполнить масштабное преобразование $x' = x/\sqrt{\alpha}, y' = y/\sqrt{\beta}, z' = z/\sqrt{\gamma}$, то (24) превратится в уравнение Пуассона; запишем его, опуская штрихи у новых переменных:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}} \sum I_i \delta\left(x - \frac{x_i}{\sqrt{\alpha}}\right) \delta\left(y - \frac{y_i}{\sqrt{\beta}}\right) \delta\left(z - \frac{z_i}{\sqrt{\gamma}}\right). \quad (25)$$

Если система источников и стоков в правой части представляет собой «плоский конденсатор», то и поле, которое получится при его решении, будет однородно во внутренней его области и перпендикулярно «обкладкам». Разумеется, мы можем говорить лишь о приближении такой ситуации с любой наперед заданной точностью: оперируя с парами «источник–сток», мы можем размещать их друг напротив друга на параллельных плоскостях только в виде дискретной решетки, и число этих пар должно оставаться конечным.

Покажем, что из предположения о взаимности для произвольных пар точек следует симметричность тензора \hat{L} . Условие взаимности мы примем в виде

$$\int \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 dV = \int \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 dV, \quad (26)$$

где индексы «1, 2» у поля означают, что оно обязано своим происхождением источнику и стоку, размещенному в паре точек 1, 2 соответственно, а интегрирование производится по всему пространству за вычетом малых областей источников.

Условие (26) перепишем как

$$\int \mathbf{b}_1 \hat{L}(-\mathbf{B}, -\boldsymbol{\omega}) \mathbf{b}_2 dV = \int \mathbf{b}_2 \hat{L}(\mathbf{B}, \boldsymbol{\omega}) \mathbf{b}_1 dV, \quad (27)$$

и это должно выполняться, как бы мы ни выбирали пары источников и стоков, определяющие поля \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 . Введем обозначение $\hat{\eta} = \hat{L}^T(\mathbf{B}) - \hat{L}(-\mathbf{B})$ и перепишем (27) как

$$\int \mathbf{b}_1 \hat{\eta} \mathbf{b}_2 dV = 0. \quad (28)$$

Итак, вопрос заключается в том, может ли тензор $\hat{\eta}$ быть ненулевым, если соотношение (28) верно для полей $\mathbf{b}_1 = -\nabla\varphi_1$, $\mathbf{b}_2 = -\nabla\varphi_2$, выбираемых с достаточным произволом. Если для всех пар полей, задаваемых парой источник–сток равной мощности, оно верно, то должно быть верно и для любых систем источников и стоков, получаемых объединением таких пар.

Самый удобный контрпример — это поле, однородное в некоторой области, и сколь угодно уменьшаемое (интегрально) за ее пределами. То есть именно плоский конденсатор. Выбирая на двух параллельных плоскостях решетки из источников и стоков, мы можем приближаться к нему с нужной точностью. Подчеркнем еще раз, что два составленных из пар «источник–сток» дискретных «плоских конденсатора» взаимны постольку, поскольку взаимны составляющие их пары. Подберем подходящий «конденсатор».

Пусть тензор $\hat{\eta} = \hat{\eta}_s + \hat{\eta}_a$ имеет ненулевую симметричную часть $\hat{\eta}_s \neq 0$. Тогда положим $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$. (Нижние индексы «1» и «2» здесь и ниже обозначают, что поле обязано своим происхождением первой системе источников и стоков или второй соответственно.) Имеем $\mathbf{b}_1 \hat{\eta} \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 \hat{\eta} \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1 \hat{\eta}_s \mathbf{b}_1$. Если обустроить плоский конденсатор таким образом, чтобы \mathbf{b}_1 был направлен вдоль одного из собственных векторов \mathbf{l} тензора $\hat{\eta}_s$ (отвечающего собственному значению $\lambda \neq 0$), то $\int \mathbf{b}_1 \hat{\eta}_s \mathbf{b}_1 dV \sim \lambda \mathbf{b}_1^2 V$, где V — объем внутренней области конденсатора. Эта величина заведомо не обращается в ноль. Чтобы получить такой конденсатор, нужно расположить плоскости источников и стоков перпендикулярно \mathbf{l} .

Контрпример, построенный выше, показывает, что $\hat{\eta}_s = 0$. Значит, $\hat{\eta} = \hat{\eta}_a$. Если $\hat{\eta}_a \neq 0$, то действие этого тензора сводится к векторному умножению на некоторый ненулевой вектор \mathbf{k} . Но тогда мы можем выбрать тройку взаимно перпендикулярных векторов $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}$ и построить два пересекающихся плоских конденсатора таким образом, что $\mathbf{b}_1 \parallel \mathbf{k}_1, \mathbf{b}_2 \parallel \mathbf{k}_2$. Тогда снова $\int \mathbf{b}_1 \hat{\eta}_a \mathbf{b}_2 dV \propto |\mathbf{b}_1| |\mathbf{b}_2| V$, где V — объем той области, по которой пересекаются плоские конденсаторы, и снова он не может оказаться нулевым. Констатируя противоречие, приходим к выводу, что $\hat{\eta} = 0$, и, таким образом, симметричность тензора \hat{L} (с учетом обращения знаков $\mathbf{B}, \boldsymbol{\omega}$) доказана.

Для вихревых полей и контуров с током верно аналогичное утверждение: из взаимности произвольных контуров по двум векторным полям \mathbf{a}, \mathbf{b} в среде следует симметричность тензора, связывающего два векторных поля между собой. Доказывается оно сходным образом, только вместо «конденсаторов» нужно строить «соленоиды» с однородным полем внутри.

Наконец, для случая нескольких сопряженных пар потоков и сил, обеспечивающих производство энтропии в диссипативных системах, также можно доказать утверждение, обратное геометрическому принципу взаимности в формулировке, данной в соответствующем разделе. Доказательство строится аналогично случаю одной пары сопряженных потоков и сил, но вывод формул получается несколько более громоздким, и мы его здесь не приводим.

Приложение 2

В разделе 4 мы приводили примеры систем из двух векторных бездивергентных полей и связывающего их тензора, характеризующего среду, для которых выполняется геометрический принцип взаимности. В этих примерах фигурировали хорошо известные $\hat{\sigma}$ и $\hat{\varepsilon}$, тензор проводимости и тензор диэлектрической проницаемости. Поскольку мы формулируем принцип геометрической взаимности для целого класса систем, имеет смысл предъявить связи иной природы, тоже тензорные и в той же мере характеризующие среду, то есть зависящие не от векторных полей, а от структурных свойств материала.

Построим еще один пример энтропийной системы, которую на определенных промежутках времени можно считать стационарной. Плотность производства энтропии в ней будет (с точностью до постоянного коэффициента) определяться скалярным произведением плотности роста намагниченности среды $\dot{\mathbf{M}}$ и внешнего магнитного поля \mathbf{H} . При этом в соответствии с $\text{rot } \mathbf{H} \propto \mathbf{j}$, где \mathbf{j} — плотность электрического тока в среде, внешнее магнитное поле \mathbf{H} может иметь роторный источник в виде (при необходимости изолированного) контура с током, $\dot{\mathbf{M}}$ бездивергентен и, следовательно, имеет вектор-потенциал. Кроме того, при некоторых дополнительных условиях эти два векторных поля связаны линейным образом, через посредства тензора, зависящего только от среды. Вид этого тензора нам предстоит установить.

Запишем уравнение Ландау–Лифшица для релаксации ферромагнетика во внешнем магнитном поле \mathbf{H} :

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} - \lambda\mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}). \quad (29)$$

Здесь γ — прецессионный коэффициент, λ — коэффициент релаксации. Для кристалла сферической формы и, соответственно, для композитной среды, заполненной сферическими ферромагнитными гранулами, производная свободной энергии по внешнему магнитному полю $\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{H}$. Именно этим случаем мы ограничимся. Производство энтропии при такой релаксации $\dot{S} = \mathbf{H}\dot{\mathbf{M}}/T$. Можно заметить, что первый член в (29) не дает вклада в производство энтропии. С этим можно обойтись двояко: (1) усреднить по времени в предположении $\gamma \gg \lambda$; (2) рассматривать $\dot{\mathbf{M}}' = \dot{\mathbf{M}} + \gamma\mathbf{M} \times \mathbf{H}$ как участвующий в производстве энтропии вместо $\dot{\mathbf{M}}$. В обоих случаях вектор $\boldsymbol{\mu}$, который мы можем определить как $\boldsymbol{\mu} = \langle \dot{\mathbf{M}} \rangle / T$ или $\boldsymbol{\mu} = \dot{\mathbf{M}}' / T$, бездивергентен и, следовательно, имеет вектор-потенциал, и $\boldsymbol{\mu}\mathbf{H} = \dot{S}$. При этом, очевидно, $\boldsymbol{\mu} = \hat{L}\mathbf{H}$, где $L_{\alpha\beta} = \lambda(\mathbf{M}^2\delta_{\alpha\beta} - \mathbf{M}_\alpha\mathbf{M}_\beta)$ — симметричный тензор, α, β индексируют проекции вектора \mathbf{M} на оси x, y, z ; δ — символ Кроннекера. Процесс намагничивания далек от стационарного, но на временах $\gamma^{-1} \ll t \ll \lambda^{-1}$ может рассматриваться как таковой, и тогда плотность производства энтропии (на этих временах) постоянна и определяется текущим распределением магнитного момента. Теорема взаимности формулируется стандартным образом: при одном и том же значении вихревого источника поля \mathbf{H} — тока I , протекающего по контуру 1 в первом случае и по контуру 2 во втором поток вектор-потенциала \mathbf{A} производной момента во времени $\boldsymbol{\mu} = \text{rot } \mathbf{A}$ через контур 2 в первом случае равен потоку \mathbf{A} через контур 2 во втором случае.

Необходимо отметить, что для случая композитной среды недавние результаты [10] показывают, что пренебрегать участием в релаксации спин-поляризованного тока (как мы это сделали, выписав (29) в форме Ландау–Лифшица [11]), может оказаться неправомерно. Повидимому, для суперпарамагнитных вкраплений малых размеров (нанометры) квантовые эффекты играют решающую роль, и для этого случая рассмотрение должно быть модифицировано.

Авторы благодарны В. И. Оселедцу и С. Е. Барнесу (S. E. Barnes) за ценные обсуждения.

Литература

1. *Onsager L.* Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I // *Physical Review*. 1931. V. 37, N 4. P. 405.
2. *De Groot S.P.* Термодинамика необратимых процессов. М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1956.
3. *Casimir H.B.G.* On Onsager's Principle of Microscopic Reversibility // *Reviews of Modern Physics*. 1945. V. 17, N 2–3. P. 343.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Теоретический курс физики. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2005.
5. *Krommes J. A., Genze Hu.* General theory of Onsager symmetries for perturbations of equilibrium and nonequilibrium steady states // *Physics of Fluids B Plasma Physics*. 1993. V. 5(11). DOI: 10.1063/1.860614
6. *Ruell D.* Positivity of entropy production in nonequilibrium statistical mechanics // *Journal of Statistical Physics*. 1996. V. 85, N 1. P. 1–23.
7. *Gallavotti G., Ruell D.* SRB States and Nonequilibrium Statistical Mechanics Close to Equilibrium // *Communications in Mathematical Physics*. 1997. V. 190, N 2. P. 279–285.
8. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. III. Электричество. М.: Физматлит МФТИ, 2002.
9. *Зоммерфельд А.* Термодинамика и статистическая физика. М.: Изд. иностранной литературы, 1955.
10. *Hai P.N., Ohya S., Tanaka M., Barnes S.E., Maekawa S.* Electromotive force and huge magnetoresistance in magnetic tunnel junctions // *Nature*. 2009. V. 458. P. 489.
11. *Ландау Л.Д.* Собрание трудов. М.: Наука, 1969. С. 137.

References

1. *Onsager L.* Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I. *Physical Review*. 1931. V. 37, N 4. P. 405.
2. *De Groot S.R.* Thermodynamics of irreversible processes. North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1951.
3. *Casimir H.B.G.* On Onsager's Principle of Microscopic Reversibility. *Reviews of Modern Physics*. 1945. V. 17, N 2–3. P. 343.
4. *Landau L.D., Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P.* Course of Theoretical Physics. V.8. Electrodynamics of Continuous Media. Butterworth-Heinemann, 1984.
5. *Krommes J. A., Genze Hu.* General theory of Onsager symmetries for perturbations of equilibrium and nonequilibrium steady states. *Physics of Fluids B Plasma Physics*. 1993. V. 5(11). DOI: 10.1063/1.860614
6. *Ruell D.* Positivity of entropy production in nonequilibrium statistical mechanics. *Journal of Statistical Physics*. 1996. V. 85, N 1. P. 1–23.
7. *Gallavotti G., Ruell D.* SRB States and Nonequilibrium Statistical Mechanics Close to Equilibrium. *Communications in Mathematical Physics*. 1997. V. 190, N 2. P. 279–285.
8. *Sivukhin D. V.* General Course of Physics. V. 3. Electricity. М.: Fizmatlit MIPT, 2002. (in Russian).
9. *Sommerfeld A.* Lectures on Theoretical Physics. V. 5. Thermodynamics and Statistical Mechanics. Academic Press, 1956.

10. *Hai P.N., Ohya S., Tanaka M., Barnes S.E., Maekawa S.* Electromotive force and huge magnetoresistance in magnetic tunnel junctions. *Nature*. 2009. V. 458. P. 489.
11. *Landau L.D.* Collected Papers of L.D. Landau. Elsevier Inc., 1965. P. 101–114.

Поступила в редакцию 26.05.2016