УДК 519.179.1

И. А. Акользин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

О справедливых раскрасках простых гиперграфов

Исследуется проблема о справедливых раскрасках гиперграфов, связанная с теоремой Хайнала–Семереди. Получена новая оценка максимальной степени вершины простого однородного гиперграфа, которая обеспечивает наличие справедливой раскраски в два цвета.

Ключевые слова: справедливые раскраски, простые гиперграфы.

I. A. Akolzin

Moscow Institute of Physics and Technology

Equitable colorings of simple hypergraphs

The work deals with a problem of equitable colorings of hypergraphs, which is connected with the Hajnal-Szemeredi theorem. We obtain a new bound for the maximal vertex degree of a simple uniform hypergraph that provides the existence of an equitable coloring with two colors.

Key words: equitable colorings, simple hypergraphs.

1. Введение

Работа посвящена известной экстремальной задаче, связанной с раскрасками гиперграфов. Напомним основные определения.

Гиперграфом в дискретной математике называется пара $H = (V, E)$, где V – это некоторое конечное множество, называемое множеством вершин гиперграфа, а E – семейство подмножеств множества вершин V, называемых ребрами гиперграфа. Гиперграф называется *n-однородным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин. *Степенью вершины* v гиперграфа называется количество его ребер, содержащих v. Максимальную степень вершины гиперграфа H мы будем обозначать через $\Delta(H)$. *Раскраской вершин* в r цветов называется отображение из множества вершин V во множество цветов $\{1, ..., r\}$. Раскраска является *правильной*, если в ней все ребра гиперграфа неодноцветны. *Хроматическим числом* гиперграфа H, $\chi(H)$, называется такое минимальное число r, что для H существует правильная раскраска в r цветов.

Один из базовых фактов теории графов состоит в том, что для любого графа G выполнено

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1.$$

Однако, как показали Хайнал и Семереди [1], в данных условиях имеет место более сильное утверждение, а именно, что каждый граф G можно справедливо раскрасить в $\Delta(G) + 1$ цвет. Напомним, что раскраска называется *справедливой*, если она является правильной и мощности всех цветовых классов отличаются не более чем на единицу. Настоящая работа посвящена обобщению теоремы Хайнала–Семереди на случай гиперграфов.

Первая количественная связь между хроматическим числом и максимальной степенью вершины в гиперграфе была получена в классической работе Эрдеша и Ловаса [2]. Они показали, что если H – n-однородный гиперграф с максимальной степенью вершины

$$\Delta(H) \leqslant \frac{r^{n-1}}{en},$$

то $\chi(H) \leqslant r$. Данный результат был обобщен на случай справедливых раскрасок в работе Лу и Секеи [3]. Они показали, что если число вершин n-однородного гиперграфа H делится на r и

$$\Delta(H) \leqslant \frac{r^{n-1}}{2en},$$

то для H существует справедливая раскраска в r цветов.

Для класса простых гиперграфов, т.е. гиперграфов, у которых любые два различных ребра имеют не более одной общей вершины, результат Лу и Секеи был усилен в работе Шабанова [4], где было показано, что если H – простой n-однородный гиперграф с

$$\Delta(H) \leqslant c\frac{2^{n-1}}{\sqrt{n\ln n}},$$

где $c > 0$ – некоторая абсолютная константа, то для H существует справедливая раскраска в два цвета.

Основной результат работы дополнительно усиливает оценку на максимальную степень вершины простого n-однородного гиперграфа, которая обеспечивает существование справедливой раскраски вершин в два цвета.

Теорема 1. *Существуют такие $n_0 \in \mathbb{N}$ и $c > 0$, что при $n > n_0$ для любого n-однородного простого гиперграфа $H = (V, E)$ с максимальной степенью вершины, не превосходящей $c \cdot 2^{n-1}$, существует справедливая раскраска H в два цвета.*

Отметим, что для случая обычных раскрасок (а не справедливых) данный результат был получен ранее в работе Козика и Шабанова [5]. Найденная в теореме 1 оценка на максимальную степень вершины достаточно близка к максимально возможной, так, например, в работе Косточки и Рёдля [6] было доказано существование простых гиперграфов с хроматическим числом больше двух и максимальной степенью вершины не более $\lceil n2^{n-1}\ln 2\rceil$. В следующем разделе мы приведем доказательство теоремы 1.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть $|V| = N$. Без ограничения общности можно считать, что N четно, иначе можно добавить одну изолированную вершину. Рассмотрим W и B — два непересекающихся множества размера $N/2$. Нам необходимо показать, что существует справедливая раскраска H в два цвета, т.е. что существует такая биекция $f\colon V \to W \sqcup B$, что для любого ребра $A \in E$ выполнено

$$f(A) \subsetneq W \text{ и } f(A) \subsetneq B.$$

Мы построим некоторую случайную биекцию и покажем, что с положительной вероятностью она будет удовлетворять искомому свойству.

2.1. Алгоритм перекраски

Для построения случайной биекции мы воспользуемся методом случайной перекраски, следуя идеям из работ [5], [4]. Суть его проста: если некоторая раскраска не является искомой, то мы случайной перекраской небольшого числа вершин пытаемся ее исправить.

Рассмотрим случайную биекцию $\tau_0\colon V \to W \sqcup B$, имеющую равномерное распределение на множестве всех биекций. Будем говорить, что вершина $v \in V$ имеет начальный белый (черный) цвет, если $\tau_0(v) \in W(B)$. Кроме того, пусть для каждой вершины v задана случайная величина X_v, имеющая равномерное распределение на $[0;1]$ и независимая как с τ_0, так и с остальными случайными величинами $X_u, u \in V \setminus \{v\}$. Величину X_v будем называть *весом* вершины v, и будем называть вершину *свободной*, если ее вес не превосходит некоторого числа $p \in (0, 1/2)$, которое является параметром нашей конструкции.

В силу того что нам необходимо соблюдать баланс цветовых классов, перекраска вершины возможна только при одновременной перекраске некоторой вершины противоположного цвета. Для этого мы введем понятие двойственности вершин. Пусть $\sigma\colon W \to B$ – некоторая фиксированная биекция. Тогда на множестве V можно задать следующую индуцированную биекцию $T\colon V \to V$:

- $T(v) = \tau_0^{-1}(\sigma(\tau_0(v)))$, если $\tau_0(v) \in W$;
- $T(v) = \tau_0^{-1}(\sigma^{-1}(\tau_0(v)))$, иначе.

Случайную вершину $T(v)$ будем называть двойственной к вершине v. Заметим, что начальные цвета двойственных вершин всегда различны по построению.

Опишем следующий алгоритм изменения биекции τ_0 (и индуцированной ею раскраски):

1) На вход алгоритм получает начальную раскраску, веса всех вершин и разбиение на двойственные пары.

2) Если в текущей раскраске τ_i индуцированной текущей биекцией есть одноцветное ребро A, то находим в этом ребре свободную вершину v с наименьшим весом, которая еще ни разу не была перекрашена.

3) После нахождения подобной вершины v меняем ее цвет и цвет двойственной к ней вершины $T(v)$ на противоположные. Формально биекция меняется следующим образом:
$$\tau_{i+1}(v) := \tau_i(T(v));$$
$$\tau_{i+1}(T(v)) := \tau_i(v);$$
$$\tau_{i+1}(u) := \tau_i(u) \text{ для любой } u \in V \setminus \{v, T(v)\}.$$

4) Повторяем второй шаг пока возможно.

Заметим, что согласно алгоритму каждая вершина перекрашивается не более одного раза, поэтому он всегда завершается.

2.2. Построение h-дерева

Поймем, какие конфигурации из ребер гиперграфа возможны в случае, если алгоритм не привел к правильной раскраске. Пусть по итогам работы алгоритма ребро A оказалось полностью одноцветным (например, белого цвета). Тогда ребро A могло содержать вершины только двух типов:

1) либо вершина $v \in A$ была изначально белой и несвободной,

2) либо вершина $v \in A$ была изначально черной, свободной и перекрашена в процессе работы алгоритма.

Рассмотрим подробнее вершины второго типа. Если вершина v сменила свой цвет, то снова возможны две ситуации:

(a) либо саму вершину v содержало некоторое ребро B, которое в некоторый момент процесса перекраски оказалось полностью черным и v была свободной вершиной с наименьшим весом среди еще неперекрашенных;

(б) либо двойственную вершину $T(v)$ содержало некоторое ребро C, которое в некоторый момент процесса перекраски оказалось полностью белым и $T(v)$ была свободной вершиной с наименьшим весом среди еще неперекрашенных.

В первой ситуации будем говорить, что ребро B *портит* вершину v, а во второй – что ребро C портит вершину $T(v)$. Далее, само ребро B не обязано было быть изначально полностью черным, значит, в нем могли быть изначально белые вершины. Раз в какой-то момент процесса перекраски оно оказалось полностью черным, то для каждой подобной вершины было ребро, которое ее испортило.

Данное рассуждение показывает, что можно рассмотреть следующую конфигурацию, которую мы будем называть h-деревом:

- $R = (V', E')$ – граф-дерево с корнем, вершинами которого являются ребра исходного гиперграфа H;
- корень – это ребро A;
- пара ребер (A', B') гиперграфа соединяется ребром e в дереве R, если в ребре A' либо нашлась вершина v, которую испортило ребро B' (тогда ребро e будем называть *настоящим*), либо нашлась вершина v такая, что ребро B' испортило двойственную вершину $T(v)$ (тогда ребро e будем называть *мнимым*);
- в предыдущем случае будем говорить, что ребро B' является потомком ребра A' в дереве R, тем самым, каждой вершине из A' может соответствовать не более одного потомка;
- если ребро A' в процессе перекраски стало полностью одноцветным цвета $\alpha(A')$, то будем говорить, что цвет $\alpha(A')$ является *доминирующим* в ребре A';
- дерево R является *полным*, т.е. множество потомков A' в дереве R в точности соответствует множеству вершин A', имевших изначально не доминирующий цвет $\alpha(A')$.

Заметим, что наличие одноцветного ребра A в итоговой раскраске влечет наличие полного h-дерева с корнем A. Остается разобрать различные варианты структуры h-дерева.

2.3. Случай 1: ребро с большим числом потомков

Пусть ребро A' в дереве R имело хотя бы $n/3$ потомков. Это в точности означает, что в нем было не менее $n/3$ вершин, каждая из которых либо сама была свободной, либо свободной была ее двойственная. Заметим, что A' не может содержать пару двойственных вершин, в противном случае оно не могло стать одноцветным в процессе перекраски. Обозначим данное событие через $D(A')$. Тогда вероятность события $D(A')$ оценивается следующим образом:

$$\mathrm{P}(D(A')) \leqslant \binom{n}{n/3}(2p)^{n/3} \leqslant 2^{2n}p^{n/3}.$$

Для применения локальной леммы нам понадобятся *локальные полиномы* для всех видов событий. Для событий типа D он будет выглядеть следующим образом: $\forall v \in V$

$$w_v^1(z) = \sum_{A' : v \in A'} \mathrm{P}(D(A')) \cdot z^{|A'|} \leqslant 2^{2n}p^{n/3} \cdot \Delta(H) \cdot z^n. \tag{2.1}$$

2.4. Случай 2: гипердерево

Пусть R – это полное h-дерево с корнем A и любая вершина h-дерева имеет не более $n/3$ потомков. Осуществим следующую процедуру над множеством вершин исходного гиперграфа: отождествим двойственные вершины. Если после применения подобной процедуры набор вершин h-дерева как набор ребер гиперграфа H образует настоящее гипердерево, то будем называть такой случай *правильным h-деревом.*

Выделим следующие свойства правильного h-дерева:

- если зафиксирован итоговый цвет корня R и зафиксированы типы ребер R (настоящие или мнимые), то для всех вершин гиперграфа H, входящих в R, будут зафиксированы цвета в изначальной раскраске;

- если R состоит из m вершин и имеет u мнимых ребер, то число вершин H, входящих в R, равно $m \cdot (n-1)+1+u$ и среди них будет u двойственных пар;

- для каждого ребра A', не являющегося корнем R, существует вершина $v \in A'$, которую A' испортило, тогда эта вершина v будет иметь наименьший вес среди всех вершин A', не соответствующих потомкам A'. Все подобные подмножества вершин не будут попарно пересекаться и будут иметь мощность не менее $2n/3$;

- все вершины A, которые не соответствуют его потомкам, являются несвободными.

Обозначим выражение $N!/(N-m)!$ как $(N)_m$ Тогда вероятность начальной раскраски вершин R при фиксированном итоговом цвете корня A равна

$$\frac{(N/2)_a\,(N/2-u)_{m\cdot(n-1)+1-a}}{(N)_{m\cdot(n-1)+1+u}},$$

где a – число белых вершин в h-дереве. Теперь оценим это выражение. Обозначим $q = m\cdot(n-1)+1$, тогда

$$\frac{(N/2)_a\,(N/2-u)_{q-a}}{(N)_{q+u}} =$$

$$= 2^{-q}\frac{N(N-2)\ldots(N-2a+2)(N-2u)\ldots(N-2u-2q+2a+2)}{N(N-1)\ldots(N-q-u+1)}. \tag{2.2}$$

Здесь необходимо разобрать несколько случаев, чтобы хорошо оценить данное выражение. Если $u \geqslant a$, то тогда правая часть (2.2) не превосходит

$$2^{-q}\frac{(N-2u)\ldots(N-2u-2q+2a+2)}{(N-1)(N-3)\ldots(N-2a+1)}\times$$

$$\times\frac{1}{(N-2a)\ldots(N-a-u+1)(N-a-u)\ldots(N-q-u+1)} \leqslant$$

(заметим, что $(N-2u)\ldots(N-2u-2q+2a+2) \leqslant (N-a-u)\ldots(N-q-u+1)$)

$$\leqslant 2^{-q}\frac{1}{(N-1)(N-3)\ldots\ldots(N-2a+1)(N-2a)\ldots(N-a-u+1)} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-q}\frac{1}{(N-1)(N-3)\ldots(N-2u+1)}.$$

Если же $a > u$, то правая часть (2.2) не превосходит

$$2^{-q}\frac{(N-2u)\ldots(N-2u-2q+2a+2)}{(N-1)(N-3)\ldots(N-2a+1)(N-2a)\ldots(N-q-u+1)}.$$

Множитель $(N-2u+1)$ находится перед $(N-2a+1)$, и, начиная с него в знаменателе, множители последовательно уменьшаются сначала на 2, а потом, дойдя до $(N-2a)$, — на 1, при этом общее число множителей равно $q-a+1$. Стало быть, числитель меньше подобного хвоста знаменателя даже без последнего множителя $(N-q-u+1)$. Отсюда оцениваемое выражение не превосходит

$$2^{-q}\frac{1}{(N-1)\cdots(N-2u+3)(N-q-u+1)},$$

что несколько больше, чем полученное выражение в предыдущем случае, когда $u > a$. Заметим далее, что $u \leqslant m \leqslant q/(n-1) < N/4$ при $n \geqslant 5$. Таким образом, вероятность не превосходит

$$2^{-q}(2/N)^{u-1}(N-q-u+1)^{-1}.$$

Обозначим через $HT(R)$ рассматриваемое событие, когда R является правильным полным h-деревом. Тогда, в силу предыдущих рассуждений, мы получаем, что

$$\mathrm{P}(HT(R)) \leqslant 2^{-q}(2/N)^{u-1}(N-q-u+1)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2n}\right)^{m-1}(1-p)^{2n/3}.$$

Далее, для каждой вершины v оценим локальный полином, отвечающий событиям $HT(R)$, когда $v \in R$:

$$w_v^2(z) = \sum_{R\colon v \in V(R)} \mathrm{P}(HT(R)) \cdot z^{2|V(R)|},$$

где $V(R)$ – множество вершин исходного гиперграфа в h-дереве R.

Вспоминая, что $q = m \cdot (n-1) + 1$, получаем, что

$$w_v^2(z) = \sum_{R\colon v \in V(R)} 2^{-q}(2/N)^{u-1}(N-q-u+1)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2n}\right)^{m-1}(1-p)^{2n/3} \cdot z^{2(q+u)} =$$

$$= \sum_{m=1}^{|E(H)|}\sum_{u=0}^{m-1} m4^m \binom{m-1}{u} \Delta(H)(n\Delta(H))^{m-1-u}(Nn\Delta(H))^u \times$$

$$\times 2^{-(m\cdot(n-1)+1)}(2/N)^{u-1}(N-m\cdot(n-1)-u)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2n}\right)^{m-1}(1-p)^{2n/3} \cdot z^{2(m\cdot(n-1)+1+u)}. \quad (2.3)$$

Прокомментируем полученное неравенство. Сколько h-деревьев размера m с u мнимыми ребрами может содержать фиксированную вершину v? Необходимо выбрать

- структуру дерева (не более 4^m способов),
- номер ребра, которое будет содержать v (не более m способов),
- номера мнимых ребер ($\binom{m-1}{u}$ способов),
- ребро, содержащее v (не более $\Delta(H)$ способов),
- последовательно остальные ребра конфигурации (не более $(n\Delta(H))^{m-1-u}(Nn\Delta(H))^u$ способов, ведь при настоящем переходе мы выбираем ребро, содержащую вершину из уже имеющего ребра, не более $n\Delta(H)$ способов, а при мнимом — вершину из имеющегося ребра, любую другую в качестве двойственной и ребро, содержащее двойственную, не более чем $n\Delta(H)N$ способов).

2.5. Случай 3: большое поддерево

Пусть теперь при отождествлении двойственных вершин полного h-дерева R мы не получили настоящее гипердерево, а получили конфигурацию ребер, содержащую циклы. Для каждой вершины B h-дерева введем понятие *полного h-поддерева* с корнем в B, состоящего из всех вершин h-дерева, чей кратчайший путь до корня проходит через B. Рассмотрим S – минимальное по размеру полное h-поддерево R, которое при отождествлении двойственных вершин содержит цикл из ребер гиперграфа H. Тогда каждое поддерево самого S уже не содержит циклов и возможны две ситуации:

1) либо все поддеревья S имеют размер не более $\ln n$, тогда в S найдется цикл длины не более $2\ln n + 1$,

2) либо нашлось поддерево S' с корнем B' размера более $\ln n$.

В данном параграфе мы разберем второй случай.

Заметим, что S' очень похоже на правильное h-дерево. Единственное отличие состоит в том, что про вершины B', которые не соответствуют его потомкам в S', мы не можем сказать, что они являются несвободными вершинами. Тогда, обозначая это событие через $HS(S')$, получаем, что его вероятность не превосходит

$$\mathrm{P}(HS(S')) \leqslant 2^{-q}(2/N)^{u-1}(N-q-u+1)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2n}\right)^{m-1}.$$

Далее, для каждой вершины v оценим локальный полином, отвечающий событиям $HS(S')$, когда $v \in S'$:

$$w_v^3(z) = \sum_{S' \colon v \in V(S')} \mathrm{P}(HS(S')) \cdot z^{2|V(S')|},$$

где $V(S')$ – множество вершин исходного гиперграфа в h-поддереве S'.

Вспоминая, что $q = m \cdot (n-1) + 1$, получаем, что

$$w_v^3(z) = \sum_{S' \colon v \in V(S')} 2^{-q}(2/N)^{u-1}(N-q-u+1)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2n}\right)^{m-1} \cdot z^{2(q+u)} =$$

$$= \sum_{m > \ln n} \sum_{u=0}^{m-1} m4^m \binom{m-1}{u} \Delta(H)(n\Delta(H))^{m-1-u}(Nn\Delta(H))^u \times$$

$$\times 2^{-(m\cdot(n-1)+1)}(2/N)^{u-1}(N-m\cdot(n-1)-u)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2n}\right)^{m-1} \cdot z^{2(m\cdot(n-1)+1+u)}. \qquad (2.4)$$

2.6. Случай 4: короткие циклы длины > 2

Осталось рассмотреть случай, когда исходное h-дерево при отождествлении двойственных вершин содержит цикл длины от 2 до $2\ln n+1$ из ребер гиперграфа H. Случай циклов длины 2 – особый, и мы разберем его позднее. Пусть теперь $C = (A_1, ..., A_m)$ – это простой цикл длины $m \geqslant 3$, получившийся в результате отождествления двойственных вершин, т.е. ребро $A_i, i = 1, ..., m$, либо имеет одну общую вершину с ребром A_{i+1}, либо оно содержит вершину v_i, двойственная к которой лежит в ребре A_{i+1} (считаем, что $A_{m+1} = A_1$).

Обозначим через α_i цвет, в котором ребро A_i стало одноцветным в процессе перекраски. Тогда каждая вершина ребра A_i либо имела изначальный цвет α_i, либо имела противоположный начальный цвет, но была свободной или же свободной была ее двойственная. Обозначим через u количество таких i, что $v_i \in A_i$ и $T(v_i) \in A_{i+1}$. Важное замечание состоит в том, что каждая вершина, не лежащая в пересечении ребер A_i, не является двойственной ни к какой другой вершине нашего цикла. Обозначим через a количество изначально черных вершин цикла C, а через b – количество изначально белых вершин. В цикле имеется ровно u пар двойственных вершин, стало быть, вероятность подобного исхода равна

$$\frac{\left(\frac{N}{2}\right)\cdots\left(\frac{N}{2}-a+1\right)\left(\frac{N}{2}-u\right)\cdots\left(\frac{N}{2}-b+1\right)}{N(N-1)\cdots(N-a-b+1)}.$$

Далее, $a+b = m(n-1)+u$ и $u \leqslant m \leqslant 2\ln n + 1$, значит, величина $a+b$ не превосходит n^2, что сильно меньше, чем общее число вершин N. Следовательно, при больших n можно считать, что эта вероятность не превосходит

$$2\frac{\left(\frac{N}{2}\right)^{a+b-u}}{N^{a+b}} = 2^{1-(n-1)m}N^{-u}.$$

Отсюда получаем, что вероятность того, что все вершины ребер A_i, которые были изначально покрашены не в искомый цвет α_i, являлись свободными, не превосходит

$$(1+2p)^{mn} \cdot 2^{1-(n-1)m} N^{-u}. \tag{2.5}$$

Множитель $(1+2p)^{mn}$ отвечает грубой оценке сверху для перебора вариантов: либо начальный цвет уже правильный, либо вершина свободная, либо свободной является ей двойственная.

Обозначим за $\mathcal{C}(C)$ событие, состоящее в том, что $C = (A_1, ..., A_m)$ образует простой цикл. Тогда в силу предыдущих рассуждений мы получаем, что

$$\mathrm{P}(\mathcal{C}(C)) \leqslant (1+2p)^{mn} \cdot 2^{1-(n-1)m} N^{-u}.$$

Далее, для каждой вершины v оценим локальный полином, отвечающий событиям $\mathcal{C}(C)$, когда $v \in C$:

$$w_v^4(z) = \sum_{C\colon v \in V(C)} \mathrm{P}(\mathcal{C}(C)) \cdot z^{2|V(C)|},$$

где $V(C)$ – множество вершин исходного гиперграфа в цикле C. Теперь

$$w_v^4(z) = \sum_{C\colon v \in V(C)} (1+2p)^{mn} \cdot 2^{1-(n-1)m} N^{-u} z^{2(n-1)m+u} =$$

$$= \sum_{3 \leqslant m \leqslant 2\ln n+1} \sum_{u=0}^{m} m \binom{m}{u} (\Delta(H))^{m-1} n^m N^u \cdot (1+2p)^{mn} \cdot 2^{1-(n-1)m} N^{-u} z^{2((n-1)m+u)}. \tag{2.6}$$

Поясним последнюю формулу. Ребро A_i цикла C, содержащее вершину v, можно выбрать $\Delta(H)$ способами. При уже выбранном ребре A_j вершину v_j, участвующую в пересечении ребер A_j и A_{j+1}, можно выбрать не более чем n способами, двойственную к ней - не более чем N способами (это необходимо сделать u раз), а само ребро A_{j+1} – не более, чем $\Delta(H)$ способами. Наконец, последнее ребро A_{i-1} можно будет выбрать не более одного способа предварительно выбрав вершину v_{i-1} в ребре A_i (и двойственную к ней при необходимости).

2.7. Случай 5: короткий цикл длины 2

Рассмотрим случай, когда исходное h-дерево при отождествлении двойственных вершин содержит цикл длины ровно 2 из ребер гиперграфа H. Пусть теперь $D = (A_1, A_2)$ — это подобный 2-цикл. Заметим, что в силу простоты гиперграфа H ребра A_1, A_2 не могут иметь более одной общей вершины, поэтому все оставшиеся совпавшие в результате отождествления вершины являются парами двойственных вершин. Обозначим через u количество пар двойственных вершин в ребрах A_1, A_2 и через s – количество общих вершин A_1, A_2. Тогда $s \in \{0, 1\}$, а $u \geqslant 2 - s$.

Теперь воспользуемся оценкой вероятности (2.5), которая верна и для 2-цикла. Обозначим изучаемое событие через $SC(D)$, тогда

$$\mathrm{P}(SC(D)) \leqslant (1+2p)^{2n} \cdot 2^{1+s-2n} N^{-u}.$$

Осталось для каждой вершины v оценить локальный полином, отвечающий событиям $SC(D)$, когда $v \in D$:

$$w_v^5(z) = \sum_{D\colon v \in V(D)} \mathrm{P}(SC(D)) \cdot z^{2|V(D)|},$$

где $V(D)$ – множество вершин исходного гиперграфа в 2-цикле D. Теперь

$$w_v^5(z) = \sum_{D\colon v \in V(D)} (1+2p)^{2n} \cdot 2^{1+s-2n} N^{-u} z^{4n} =$$

$$= \sum_{s=0}^{1} \sum_{u=2-s}^{n-s} 2\Delta(H) n^s (nN)^{2-s} (1+2p)^{2n} \cdot 2^{1+s-2n} N^{-u} z^{4n}. \tag{2.7}$$

Поясним последнюю формулу. Ребро A_i, содержащее вершину v, можно выбрать $\Delta(H)$ способами. В выбранном ребре A_i надо выбрать либо одну общую вершину с ребром A_{3-i} и вторую с ней двойственную, либо две пары двойственных вершин. В обоих случаях само ребро A_{3-i} можно выбрать не более чем одним способом в силу простоты гиперграфа.

3. Локальная лемма

Для завершения доказательства теоремы нам понадобится специальный случай локальной леммы. Сформулируем ее в удобном для нас варианте.

Лемма 1. *Пусть $A_1, ..., A_M$ – это события на вероятностном пространстве. Пусть для каждого события A_i выделено некоторое конечное множество $dom(A_i)$ с таким условием, что для любого $J \subset \{j : dom(A_j) \cap dom(A_i) = \emptyset\}$ выполнено*

$$\mathrm{P}\left(A_i | \bigcap_{j \in J} \bar{A}_j\right) \leqslant \mathrm{P}(A_i). \tag{3.1}$$

Обозначим через $DOM = \bigcup_{i=1}^{M} dom(A_i)$ и для каждого $v \in DOM$ введем полином

$$w_v(z) = \sum_{i:\, v \in dom(A_i)} \mathrm{P}(A_i) z^{|dom(A_i)|}.$$

Если существует такой полином $w(z)$ с условием $w(z) \geqslant w_v(z)$ для любых $v \in DOM$ и $z \geqslant 1$, а также $y \in (0,1)$, такое, что $w(1/(1-y)) \leqslant y$, то

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{M} \bar{A}_i\right) > 0.$$

Для исходной случайной биекции τ_0 и произвольного набора вершин U нашего гиперграфа H можно рассмотреть *каноническое событие* $\mathcal{A}(U,Q,g)$, где $Q \subset W \cup B$, $|Q| = |U|$, $g : U \to Q$ – фиксированная биекция, состоящее в том, что

$$\mathcal{A}(U,Q,g) = \{\forall v \in U\ \tau_0(v) = g(v)\}.$$

Два канонических события $\mathcal{A}(U,Q,g)$ и $\mathcal{A}(U',Q',g')$ *конфликтуют*, если $\exists v \in U \cap U' : g(v) \neq g'(v)$ или $\exists \delta \in Q \cap Q' : g^{-1}(\delta) \neq g'^{-1}(\delta)$.

Из работы Лу и Секеи [3] известно, что свойство отрицательной корреляции (3.1) выполнено для канонических событий, если для любого $j \in J$ событие A_j не конфликтует с событием A_i.

Каждое плохое событие из $SC(D)$, $\mathcal{C}(C)$, $HS(S)$, $HT(R)$, $D(A)$ можно представить как дизъюнктное объединение простых событий вида $L = \mathcal{A}(U,Q,g) \cap \{(X_v, v \in U) \in F\}$, где U – это набор вершин гиперграфа H (плохая конфигурация), $Q \subset W \cup B$, $\mathcal{A}(U,Q,g)$ – каноническое событие, а F – некоторое борелевское множество. Для каждого такого события введем $dom(L) = U \cup Q$. Тогда, как было показано в работе [4] (утверждение 1 на с. 194), подобные события будут удовлетворять свойству (3.1). Все, что нам остается сделать, это оценить полиномы $w_v(z)$ и подобрать значения параметров y, p, c, чтобы выполнялось неравенство $w(1/(1-y)) \leqslant y$ для мажорирующего многочлена $w(z)$.

Заметим, что в рассматриваемой нами ситуации $DOM = V \sqcup W \sqcup B$ и для любого простого события $L = \mathcal{A}(U,Q,g) \cap \{(X_v, v \in U) \in F\}$ выполнено $|dom(L)| = |U| + |Q| = 2|U|$.

Для каждой $v \in V$ введем общий полином плохих событий, содержащих v:

$$w_v(z) = \sum_{i=1}^{5} w_v^i(z) = \sum_{L: v \in dom(L)} \mathrm{P}(L) z^{|dom(L)|}.$$

Для каждого из полиномов $w_v^i(z)$ были получены оценки (2.1), (2.3), (2.4), (2.6), (2.7), сумма которых и может выступить в качестве мажорирующего полинома $w(z)$.

Если же $v \in W \sqcup B$, то общий полином плохих событий можно оценить следующим образом:

$$w_v(z) = \sum_{L: v \in dom(L)} \mathrm{P}(L) z^{|dom(L)|} \leqslant \sum_{q \in V} \sum_{L: q, v \in dom(L)} \mathrm{P}(L, \tau_0(q) = v) z^{|dom(L)|}.$$

Вероятность события $\mathrm{P}(L, \tau_0(q) = v)$ оценивается точно так же, как и вероятность для выбранного плохого события L, единственное — мы требуем дополнительно, чтобы конкретная вершина q при случайной биекции перешла в конкретную вершину v. Это означает, что при суммировании вероятности для v не будет выбора из $N/2$ вершин. Следовательно,

$$w_v(z) \leqslant \sum_{q \in V} \sum_{L: q, v \in dom(L)} \mathrm{P}(L, \tau_0(q) = v) z^{|dom(L)|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{N} \sum_{q \in V} \sum_{L: q \in dom(L)} \mathrm{P}(L) z^{|dom(L)|} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \max_{q \in V} \sum_{L: q \in L} \mathrm{P}(L) z^{|dom(L)|}.$$

Указанные соотношения показывают, что величина, равная сумме правых частей (2.1), (2.3), (2.4), (2.6), (2.7), умноженная на два, подходит в качестве мажорирующего полинома для применения локальной леммы в формулировке 1. Нам остается лишь осуществить подходящий выбор параметров.

4. Выбор параметров и итоговые оценки

Итак, в качестве мажорирующего многочлена $w(z)$ выступит сумма правых частей (2.1), (2.3), (2.4), (2.6), (2.7), умноженная на два:

$$w(z) = 2^{2n+1} p^{n/3} \cdot \Delta(H) \cdot z^n +$$

$$+2 \sum_{m=1}^{|E(H)|} \sum_{u=0}^{m-1} m 4^m \binom{m-1}{u} \Delta(H) (n\Delta(H))^{m-1-u} (Nn\Delta(H))^u \times$$

$$\times 2^{-(m \cdot (n-1)+1)} (2/N)^{u-1} (N - m \cdot (n-1) - u)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2n}\right)^{m-1} (1-p)^{2n/3} \cdot z^{2(m \cdot (n-1)+1+u)} +$$

$$+2 \sum_{m > \ln n} \sum_{u=0}^{m-1} m 4^m \binom{m-1}{u} \Delta(H) (n\Delta(H))^{m-1-u} (Nn\Delta(H))^u \times$$

$$\times 2^{-(m \cdot (n-1)+1)} (2/N)^{u-1} (N - m \cdot (n-1) - u)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2n}\right)^{m-1} \cdot z^{2(m \cdot (n-1)+1+u)} +$$

$$+2 \sum_{3 \leqslant m \leqslant 2 \ln n + 1} \sum_{u=0}^{m} m \binom{m}{u} (\Delta(H))^{m-1} n^m N^u \cdot (1+2p)^{mn} \cdot 2^{1-(n-1)m} N^{-u} z^{2((n-1)m+u)} +$$

$$+2 \sum_{s=0}^{1} \sum_{u=2-s}^{n-s} 2\Delta(H) n^s (nN)^{2-s} (1+2p)^{2n} \cdot 2^{1+s-2n} N^{-u} z^{4n}. \qquad (4.1)$$

Осуществим следующий выбор параметров:

$$y = \frac{1}{n+1},\ z = \frac{1}{1-y} = 1 + \frac{1}{n},\ p = \frac{5\ln n}{n}.$$

Напомним, что по условию теоремы $\Delta(H) \leqslant c \cdot 2^{n-1}$.

Теперь оценим каждое из составляющих (4.1) по отдельности. Нам необходимо показать, что $w(1/(1-y)) \leqslant y$.

1) Рассмотрим первое слагаемое:

$$2^{2n+1}p^{n/3} \cdot \Delta(H) \cdot z^n \leqslant 2^{2n+1}\left(\frac{5\ln n}{n}\right)^{n/3} \cdot c \cdot 2^{n-1} \cdot e \leqslant$$

$$\leqslant ce \cdot 2^{3n}\left(\frac{5\ln n}{n}\right)^{n/3} \leqslant \frac{y}{5}$$

при всех достаточно больших $n > n_0$.

2) Рассмотрим второе слагаемое:

$$2\sum_{m=1}^{|E(H)|}\sum_{u=0}^{m-1} m4^m \binom{m-1}{u} \Delta(H)(n\Delta(H))^{m-1-u}(Nn\Delta(H))^u \times$$

$$\times 2^{-(m\cdot(n-1)+1)}(2/N)^{u-1}(N - m\cdot(n-1) - u)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2n}\right)^{m-1}(1-p)^{2n/3} \cdot z^{2(m\cdot(n-1)+1+u)} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{m=1}^{|E(H)|}\sum_{u=0}^{m-1} m4^m \binom{m-1}{u}(c\cdot 2^{n-1})^m n^{m-1}N^u \times$$

$$\times 2^{-(m\cdot(n-1)+1)}(2/N)^{u-1}(N - m\cdot(n-1) - u)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2n}\right)^{m-1} n^{-10/3} \cdot e^{2m} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{|E(H)|}\sum_{u=0}^{m-1} m4^m \binom{m-1}{u} c^m N \times$$

$$\times 2^{u-1}(N - m\cdot(n-1) - u)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{m-1} n^{-10/3} \cdot e^{2m} \leqslant$$

(разобьем сумму по m на две части: либо $mn \leqslant N/2$, либо $mn > N/2$, в первом случае $(N - m\cdot(n-1) - u) \geqslant N/2$, во втором мы оценим это выражение единицей)

$$\leqslant \sum_{m=1}^{N/2n}\sum_{u=0}^{m-1} m4^m \binom{m-1}{u} c^m N 2^{u-1}(N/2)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{m-1} n^{-10/3} \cdot e^{2m} +$$

$$+ \sum_{m>N/2n}\sum_{u=0}^{m-1} m4^m \binom{m-1}{u} c^m N 2^{u-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{m-1} n^{-10/3} \cdot e^{2m} =$$

$$= \sum_{m=1}^{N/2n} m4^m 3^{m-1} c^m \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{m-1} n^{-10/3} \cdot e^{2m} +$$

$$+ \sum_{m>N/2n} Nm4^m 3^{m-1} c^m \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{m-1} n^{-10/3} \cdot e^{2m}.$$

При достаточно малой константе $c < 1/500$ первая сумма будет иметь порядок $O(n^{-10/3}) < y/10$, а вторая сумма будет иметь порядок $O(N(18e^2c)^{N/2n}n^{-10/3})$, что также меньше, чем $y/10$ при всех достаточно больших $n > n_0$, т.к. $N > \frac{2^n}{n^3}$.

3) Третья сумма практически аналогична второй, за исключением отсутствия множителя $(1-p)^{2n/3}$. Стало быть, она не превосходит

$$\sum_{m=\ln n}^{N/2n} m4^m 3^{m-1} c^m \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{m-1} \cdot e^{2m} + \sum_{m>N/2n} Nm4^m 3^{m-1} c^m \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{m-1} \cdot e^{2m}.$$

Заметим, что при достаточно малой константе c первая сумма не превосходит $2(18e^2c)^{\ln n}$, что меньше, чем $y/10$ при всех $n > n_0$. Вторая же сумма, как и раньше, будет иметь порядок $O(N(18e^2c)^{N/2n})$, что также меньше $y/10$ при всех достаточно больших $n > n_0$.

4) Рассмотрим четвертое слагаемое:

$$\sum_{3\leqslant m\leqslant 2\ln n+1} \sum_{u=0}^{m} m\binom{m}{u}(\Delta(H))^{m-1} n^m N^u \cdot (1+2p)^{mn} \cdot 2^{1-(n-1)m} N^{-u} z^{2((n-1)m+u)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{3\leqslant m\leqslant 2\ln n+1} \sum_{u=0}^{m} m\binom{m}{u} c^{m-1} 2^{3-n} n^m \cdot n^{10m} \cdot e^{2m} =$$

$$= \sum_{3\leqslant m\leqslant 2\ln n+1} 2^m m c^{m-1} 2^{3-n} n^{11m} \cdot e^{2m} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{3-n} n^{22\ln n+11} \sum_{3\leqslant m\leqslant 2\ln n+1} 2^m m c^{m-1} \cdot e^{2m}.$$

При достаточно малой константе c оставшаяся сумма будет меньше 1, а выражение перед суммой стремится к нулю экспоненциально по n, стало быть, оно будет меньше $y/5$ при всех достаточно больших $n > n_0$.

5) Осталось рассмотреть пятую сумму:

$$2\sum_{s=0}^{1} \sum_{u=2-s}^{n-s} 2\Delta(H) n^s (nN)^{2-s} (1+2p)^{2n} \cdot 2^{1+s-2n} N^{-u} z^{4n} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{s=0}^{1} \sum_{u=2-s}^{n-s} 2c2^{n-1} n^2 n^{20} \cdot 2^{2-2n} e^4 = O(2^{-n} n^{23}),$$

что значительно меньше, чем $y/5$ при всех достаточно больших $n > n_0$.

Подведем итоги. Мы показали, что при подходящем выборе параметров к рассматриваемому набору плохих событий применима локальная лемма, которая утверждает, что с положительной вероятностью ни одно из них не будет выполнено. Значит, с положительной вероятностью предложенный алгоритм перекраски исправит все одноцветные ребра и предоставит на выходе справедливую раскраску вершин гиперграфа. Теорема доказана.

Литература

1. *Hajnal A., Szemerédi E.* Proof of a conjecture of P. Erdős // Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969). 1970. P. 601–623.

2. *Erdős P., Lovász L.* Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions // Infnite and Finite Sets, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai. 1973. V. 10. P. 609–627.

3. *Lu L., Székely L.* Using Lovász Local Lemma in the space of random injections // Electronic Journal of Combinatorics. 2007. V. 13. Research paper N 63.

4. *Shabanov D.A.* Equitable two-colorings of uniform hypergraphs // European Journal of Combinatorics. 2015. V. 43. P. 185–203.

5. *Kozik J., Shabanov D.A.* Improved algorithms for colorings of simple hypergraphs and applications // Journal of Combinatorial Theory, Series B. 2016. V. 116. 312–332.
6. *Kostochka A.V., Rödl V.* Constructions of sparse uniform hypergraphs with high chromatic number // Random Structures and Algorithms. 2010. V. 36, N 1. P. 46–56.

References

1. *Hajnal A., Szemerédi E.* Proof of a conjecture of P. Erdős. Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969). 1970. P. 601–623.
2. *Erdős P., Lovász L.* Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. Infnite and Finite Sets, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai. 1973. V. 10. P. 609–627.
3. *Lu L., Székely L.* Using Lovász Local Lemma in the space of random injections. Electronic Journal of Combinatorics. 2007. V. 13. Research paper N 63.
4. *Shabanov D.A.* Equitable two-colorings of uniform hypergraphs. European Journal of Combinatorics. 2015. V. 43. P. 185–203.
5. *Kozik J., Shabanov D.A.* Improved algorithms for colorings of simple hypergraphs and applications. Journal of Combinatorial Theory. Series B. 2016. V. 116. P. 312–332.
6. *Kostochka A.V., Rödl V.* Constructions of sparse uniform hypergraphs with high chromatic number. Random Structures and Algorithms. 2010. V. 36, N 1. 46–56.

Поступила в редакцию 12.09.2017