УДК 519

А. А. Кокоткин[1], *А. М. Райгородский*[1,2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

О реализации подграфов случайного графа графами диаметров на плоскости и в пространстве

Получены новые оценки для максимального числа вершин в индуцированном подграфе случайного графа Эрдеша–Реньи, который с высокой вероятностью можно реализовать как граф диаметров в размерности 2 или 3, имеющий максимальное для этой размерности хроматическое число.

Ключевые слова: граф диаметров, случайный граф.

1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию некоторых вероятностных характеристик, связанных с классической проблемой Борсука. Напомним, что эта проблема состоит в отыскании *числа Борсука* — величины $f(d)$, равной минимальному количеству частей меньшего диаметра, на которые можно разбить произвольное множество диаметра 1 в пространстве $\mathbb{R}^d$:

$$f(d) = \min\{f:\ \forall\ \Omega \subset \mathbb{R}^d,\ \operatorname{diam}\Omega = 1,\ \exists\ \Omega_1, \ldots, \Omega_f:\ \Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_f,\ \forall\ i\ \ \operatorname{diam}\Omega_i < 1\}.$$

Гипотеза Борсука, предложенная Борсуком в 1933 году (см. [1]), состояла в том, что $f(d) = d + 1$. И ровно шестьдесят лет эта гипотеза оставалась ни доказанной, ни опровергнутой. Лишь в 1993 году Кан и Калаи (см. [2]) нашли контрпримеры к гипотезе в размерностях $d \geqslant 2015$. Сейчас известно, что гипотеза Борсука верна при $d \leqslant 3$ и ложна при $d \geqslant 298$ (см. [3] – [13]).

С проблемой Борсука тесно связано понятие *графа диаметров*. Назовем графом диаметров в $\mathbb{R}^d$ любой граф $G = (V, E)$, вершины которого — точки $\mathbb{R}^d$, а ребра — пары вершин, отстоящих друг от друга на максимальное в множестве вершин расстояние:

$$V \subset \mathbb{R}^d,\ \ |V| < \infty,\ \ E = \left\{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}:\ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \operatorname{diam} V := \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|\right\}.$$

Понятно, что минимальное число частей меньшего диаметра, на которые разбивается V (*число Борсука множества* V), — это в точности хроматическое число $\chi(G)$ графа G, т.е. наименьшее количество цветов, в которые можно так покрасить вершины, чтобы концы любого ребра имели разные цвета. Однако было бы некорректно сказать, что $f(d)$ — это максимум таких хроматических чисел. Дело в том, что равенство хроматического числа числу Борсука справедливо лишь в случае конечных множеств; для бесконечных множеств равенства, вообще говоря, нет: например, если взять в качестве V сферу в $\mathbb{R}^d$, то очевидно, что хроматическое число ее графа диаметров (являющегося паросочетанием) равно двум, тогда как ее число Борсука есть $d + 1$ ввиду классической теоремы Борсука–Улама–Люстерника–Шнирельмана (см. [14] – [15]).

Как мы отметили выше, на плоскости и в пространстве гипотеза Борсука доказана. Более того, существует достаточно много примеров графов диаметров в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ с хроматическими числами 3 и 4 соответственно. Интересно оценить, стало быть, насколько эти примеры часты или редки. Одним из инструментов для такой оценки служит случайный граф Эрдеша–Реньи (см. [16] – [22]). А именно, пусть $V_n = \{1, \ldots, n\}$, $p = p(n) \in [0, 1]$

и $G(n,p) = (\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_{n,p})$ — вероятностное пространство, в котором Ω_n — множество всех графов на V_n без петель, кратных ребер и ориентации (так что $|\Omega_n| = 2^{C_n^2}$), $\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$,

$$\mathbb{P}_{n,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}.$$

Иными словами, берутся случайные графы на n вершинах, в которых ребра проводятся взаимно независимо с одной и той же вероятностью p.

Положим для $d \in \{2,3\}$

$$u_d(n,p) = \max\Big\{k : \ \mathbb{P}_{n,p}\left(\exists\ H = (W,F) \subset G : \right.$$

$$\left. |W| = k,\ H = G|_W,\ H - \text{граф диаметров в } \mathbb{R}^d,\ \chi(H) = d+1\Big) > \frac{1}{2}\right\}.$$

Таким образом, мы ищем максимальное количество вершин в индуцированном подграфе случайного графа, который одновременно реализуется графом диаметров на плоскости или в пространстве и имеет наибольшее возможное в этом случае хроматическое число. Если для любого k

$$\mathbb{P}_{n,p}\Big(\exists\ H = (W,F) \subset G : \ |W| = k,\ H = G|_W,\ H - \text{граф диаметров в } \mathbb{R}^d,\ \chi(H) = d+1\Big) \leqslant \frac{1}{2},$$

то полагаем $u_d(n,p) = 0$.

Величина $u_2(n,p)$ была введена в работе [23], а похожие величины для так называемых дистанционных графов рассматривались в статьях [24] – [26]. В следующем разделе мы сформулируем результаты, доказанные в [23], их усиления и обобщения на случай $\mathbb{R}^3$.

2. Формулировки результатов

В работе [23] были доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u_2(n,p) = 0$.*

Теорема 2. *Пусть $q := 1 - p = o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u_2(n,p) = 3$.*

Теорема 3. *Пусть $q = o\left(\frac{1}{n}\right)$, но при этом $qn^{1.5} \to \infty$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u_2(n,p) = 4$.*

Теорема 4. *Положим $\tau(n) = pn$ и $\sigma(n) = q \ln n$. Пусть $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ стремятся к бесконечности с ростом n. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполнено*

$$u_2(n,p) \leqslant (2+\varepsilon)\log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Теорема 5. *Положим $\tau(n) = \frac{p\sqrt[4]{n}}{\ln n}$ и $\sigma(n) = q \ln n$. Пусть $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ стремятся к бесконечности с ростом n. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполнено*

$$u_2(n,p) \geqslant \left(2 - \varepsilon + \frac{4\ln p}{\ln(np)}\right)\log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Эти теоремы говорят о том, что если величины p и q не слишком малы, то

$$u_2(n,p) \sim 2\log_{\frac{1}{1-p}}(np) = \Theta\left(\frac{\ln n}{p}\right).$$

В частности, требуется, чтобы величина p не стремилась к нулю со скоростью $n^{-\alpha}$ при $\alpha > \frac{1}{4}$ (теорема 5). Это ограничение можно существенно ослабить. Справедлива новая

Теорема 6. *Зафиксируем некоторое число* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *и положим* $\tau(n) = pn^{\alpha}$. *Пусть с некоторым* $C > 0$ *начиная с некоторого* n *выполнено* $1 < \tau(n) < C$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* n_0, *что при* $n \geqslant n_0$ *имеет место неравенство*

$$u_2(n,p) \geqslant (2 - 2\alpha - \varepsilon)\,\frac{\ln n}{p}.$$

Теорема 6 дает принципиально новый в сравнении с теоремой 5 результат при $\alpha \geqslant \frac{1}{4}$. Однако и при меньших α новая теорема сильнее. А именно, если в теореме 5 взять $p = n^{-\alpha}$, то она (с точностью до вычитания ε) даст оценку величиной

$$\left(2 + \frac{-4\alpha\ln n}{(1-\alpha)\ln n}\right)\frac{(1-\alpha)\ln n}{p} = (2 - 6\alpha)\frac{\ln n}{p}.$$

В то же время в теореме 6 мы имеем оценку величиной $(2-2\alpha)\frac{\ln n}{p}$, и это намного больше.

При $d = 3$ также удается установить серию оценок, аналогичных оценкам из теорем 1–6.

Теорема 7. *Пусть найдется такое* $c < 1$, *что* $p < \frac{c}{n}$. *Тогда при всех достаточно больших* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено* $u_3(n,p) = 0$.

Теорема 8. *Пусть* $q = o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)$. *Тогда при всех достаточно больших* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено* $u_3(n,p) = 4$.

Теорема 9. *Положим* $\tau(n) = pn$ *и* $\sigma(n) = q\ln n$. *Пусть* $\tau(n)$ *и* $\sigma(n)$ *стремятся к бесконечности с ростом* n. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* n_0, *что при* $n \geqslant n_0$ *выполнено*

$$u_3(n,p) \leqslant (2+\varepsilon)\log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Теорема 10. *Пусть для всякого* $\alpha > 0$ *выполнено* $pn^{\alpha} \to \infty$ *и* $q\ln n \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* n_0, *что при* $n \geqslant n_0$ *выполнено*

$$u_3(n,p) \geqslant (2-\varepsilon)\log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Теорема 11. *Зафиксируем некоторое* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ *и положим* $\tau(n) = pn^{\alpha}$. *Пусть с некоторым* $C > 0$ *начиная с некоторого* n *выполнено* $1 < \tau(n) < C$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* n_0, *что при* $n \geqslant n_0$ *имеет место неравенство*

$$u_3(n,p) \geqslant (2 - 4\alpha - \varepsilon)\,\frac{\ln n}{p}.$$

Доказательства теорем 7 и 8 очень просты, но мы их аккуратно проведем в разделе 3. Доказательство теоремы 9 весьма близко к доказательству теоремы 4, но есть нюансы, и мы докажем теорему 9 в разделе 4. Теоремам 10, 6 и 11 мы посвятим раздел 5 (именно в таком порядке).

3. Доказательства теорем 7 и 8

Заметим, что если в графе диаметров в $\mathbb{R}^3$ число вершин k, то в нем не больше $2k-2$ ребер (см. [27]).

3.1. Доказательство теоремы 7

Хорошо известно, что при ограничениях на p, заданных в формулировке теоремы, случайный граф с асимптотической вероятностью 1 является унициклическим. Но индуцированный подграф такого графа на любых k вершинах и с любым $k \in \{1, \ldots, n\}$ сам является унициклическим, т.е., в частности, имеет хроматическое число не больше трех. Значит, при достаточно больших n и всех k

$$\mathbb{P}_{n,p}\left(\exists\ H = (W, F) \subset G:\ |W| = k,\ H = G|_W,\ H - \text{граф диаметров},\ \chi(H) = 4\right) < \frac{1}{2},$$

так что $u_3(n, p) = 0$. Теорема доказана.

3.2. Доказательство теоремы 8

При $q = o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)$ с асимптотической вероятностью 1 дополнение $\overline{G}$ случайного графа G до полного графа K_n является паросочетанием. Значит, при больших n с вероятностью больше $\frac{1}{2}$ граф G содержит K_4, который имеет хроматическое число 4, у которого 4 вершины и который реализуется как граф диаметров (тетраэдр) в пространстве. Однако при $k \geqslant 5$ с той же вероятностью любой k-вершинный индуцированный подграф H случайного графа либо является полным графом без двух несмежных ребер (при $k = 5$), либо имеет строго больше, чем $2k - 2$, ребер. В первом случае $\chi(H) = 3$; во втором случае H нельзя реализовать графом диаметров в $\mathbb{R}^3$. Значит, при $k \geqslant 5$ требуемое свойство выполнено с вероятностью меньше половины. Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 9

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ (см. условие теоремы) и положим

$$k = k(n) = \left\lceil (2 + \varepsilon) \log_{\frac{1}{1-p}}(np) \right\rceil.$$

Прежде всего покажем, что $k \to \infty$. В самом деле, с учетом неравенства $-\ln(1 - p) < \frac{p}{1-p}$ имеем

$$\log_{\frac{1}{1-p}}(np) = \frac{\ln(np)}{-\ln(1 - p)} > \frac{(1 - p)\ln(np)}{p}.$$

Значит, если $p \not\to 1$, то, поскольку $np \to \infty$, получаем $k \to \infty$. Если же $p \to 1$, то заменяем $1 - p = q$ на $\frac{\sigma(n)}{\ln n}$ (см. условие теоремы) и получаем, в свою очередь,

$$\frac{(1 - p)\ln(np)}{p} = \frac{\sigma(n)\ln(np)}{p \ln n} \sim \sigma(n) \to \infty.$$

Далее, как и в параграфе 3.2, воспользуемся тем фактом, что у любого графа диаметров в $\mathbb{R}^3$, имеющего k вершин, число ребер не больше $2k - 2$.

Обозначим через $\mathcal{B}_k$ событие, состоящее в том, что у любого индуцированного подграфа H случайного графа G, имеющего k вершин, число ребер строго больше $2k - 2$. Положим $P_k = \mathbb{P}_{n,p}(\mathcal{B}_k)$. Если найдется такое $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant n_0$ выполнено $P_k > \frac{1}{2}$, то с вероятностью, большей половины, в случайном графе G не найдется индуцированного подграфа H, представимого как граф диаметров и имеющего k вершин. А значит, не найдется и такого подграфа большего размера, т.е. $u_3(n, p) < k$.

В дальнейшем мы покажем, что $P_k \to 1$ при $n \to \infty$, и это завершит доказательство теоремы.

Обозначим через X_k случайную величину, равную количеству индуцированных k-вершинных подграфов случайного графа, имеющих не более $2k - 2$ ребер. Тогда $P_k = \mathbb{P}_{n,p}(X_k = 0)$ и с учетом неравенства Маркова

$$P_k = \mathbb{P}_{n,p}(X_k = 0) = 1 - \mathbb{P}_{n,p}(X_k \geqslant 1) \geqslant 1 - \mathbb{M}X_k,$$

так что остается доказать асимптотику $\mathbb{M}X_k \to 0$. За счет линейности математического ожидания получаем

$$\mathbb{M}X_k = C_n^k \sum_{i=0}^{2k-2} C_{C_k^2}^i p^i q^{C_k^2 - i} \leqslant C_n^k \sum_{i=0}^{2k} C_{C_k^2}^i p^i q^{C_k^2 - i}.$$

Убедимся в том, что в последней сумме максимальным является последнее слагаемое. Для этого разделим $(i+1)$-е слагаемое на i-е $(0 \leqslant i \leqslant 2k-1)$ и проверим, что отношение не меньше единицы:

$$\frac{C_{C_k^2}^{i+1} p^{i+1} q^{C_k^2-i-1}}{C_{C_k^2}^{i} p^{i} q^{C_k^2-i}} = \frac{C_k^2 - i}{i+1} \cdot \frac{p}{q}.$$

Понятно, что функция $\frac{C_k^2-i}{i+1}$ убывает по i. Значит,

$$\frac{C_k^2 - i}{i+1} \cdot \frac{p}{q} \geqslant \frac{C_k^2 - 2k + 1}{2k} \cdot \frac{p}{q} > \frac{C_k^2 - 2k}{2k} \cdot \frac{p}{q} = \frac{k-5}{4} \cdot \frac{p}{q}.$$

Мы хотим показать, что

$$\frac{k-5}{4} \cdot \frac{p}{q} \geqslant 1,$$

а покажем даже, что

$$\frac{k-5}{4} \cdot \frac{p}{q} \to \infty.$$

Упростим, стало быть, запись и рассмотрим выражение $\frac{kp}{q}$. Поскольку $np \to \infty$ и $-\ln(1-p) < \frac{p}{1-p}$, имеем

$$\frac{kp}{q} > \frac{2\ln(np)}{-\ln(1-p)} \cdot \frac{p}{1-p} > 2\ln(np) \to \infty.$$

Итак, при больших n

$$\mathbb{M}X_k \leqslant (2k+1) C_n^k C_{C_k^2}^{2k} p^{2k} q^{C_k^2-2k}.$$

Воспользуемся простыми оценками $C_a^b \leqslant \left(\frac{3a}{b}\right)^b$ и $C_a^b \leqslant \frac{a^b}{b!}$. Получаем

$$\mathbb{M}X_k \leqslant (2k+1) \left(\frac{3n}{k}\right)^k \frac{(C_k^2)^{2k}}{(2k)!} p^{2k} q^{C_k^2-2k} \leqslant \left(\frac{3n}{k}\right)^k \frac{k^{4k}}{(2k)!} p^{2k} q^{C_k^2-2k} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{3n}{k}\right)^k \frac{k^{4k}}{((2k)/e)^{2k}} p^{2k} q^{\frac{k(k-5)}{2}} = \left(\frac{3}{4}e^2\right)^k n^k k^k p^{2k} q^{\frac{k(k-5)}{2}} = \left(\frac{3}{4} e^2 nkp^2 q^{\frac{k-5}{2}}\right)^k.$$

Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно проверить, что в ее условиях величина $nkp^2q^{\frac{k-5}{2}}$ стремится к нулю. Итак,

$$nkp^2 q^{\frac{k-5}{2}} < \exp\left(\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\ln(np)}{-\ln q}\ln q + \ln(np) + \ln(kp)\right) = \exp\left(\ln(np)\left(\frac{\ln(kp)}{\ln(np)} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \to 0,$$

поскольку при достаточно больших n

$$\frac{\ln(kp)}{\ln(np)} < \frac{\ln\left(3\frac{\ln(np)}{-\ln(1-p)}p\right)}{\ln(np)} \leqslant \frac{\ln(3\ln(np))}{\ln(np)} = \frac{\ln 3 + \ln\ln(np)}{\ln(np)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теорема доказана.

5. Доказательства теорем 10, 6, 11

5.1. Общая идея

В каждой из перечисленных теорем нужно установить нижнюю оценку вида $u_d(n,p) \geqslant k$. Понятно, что достаточно найти конкретный граф на k вершинах, который имеет хроматическое число $d+1$, реализуется как граф диаметров в $\mathbb{R}^d$ и с высокой вероятностью встречается в $G(n,p)$. Для плоскости таким графом будет цикл нечетной длины.

Для пространства это будет пирамида, в основании которой лежит цикл нечетной длины и вершина которой соединена с каждой вершиной основания. По сути, уже сейчас ясно, откуда возникло различие в ограничениях, наложенных на α в теоремах 6 и 11. Дело в том, что у цикла плотность (отношение числа вершин к числу ребер) асимптотически вдвое выше, чем у пирамиды.

Начнем мы с доказательства теоремы 10, поскольку в нем слабее ограничения на вероятность ребра и это позволяет делать более грубые оценки. В теоремах 6 и 11 мы эти (или аналогичные) оценки значительно уточним.

5.2. Доказательство теоремы 10

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$k = \left[(2-\varepsilon)\log_{\frac{1}{1-p}}(np)\right].$$

При доказательстве теоремы 9 мы уже убедились в том, что $k \to \infty$. Нам достаточно показать, что при больших n выполнено $u_3(n,p) \geqslant k$. Наличие целой части не играет никакой роли, т.к. $k \to \infty$ и при необходимости мы просто можем заменить ε на $\varepsilon' \in (0,\varepsilon)$. В дальнейшем некоторые неравенства будут выполнены лишь при $n \geqslant n_0$, но мы не будем каждый раз говорить об этом.

Обозначим через Y_k случайную величину, равную количеству индуцированных k-вершинных подграфов случайного графа G, являющихся пирамидами с циклом длины $k-1$ в основании. Если мы докажем, что при больших n выполнено $\mathbb{P}_{n,p}(Y_k > 0) > \frac{1}{2}$, то при тех же n мы получим $u_3(n,p) \geqslant k$. Как всегда, мы докажем еще больше: $\mathbb{P}_{n,p}(Y_k > 0) \to 1$.

В силу неравенства Чебышёва имеем

$$\mathbb{P}_{n,p}(Y_k > 0) = \mathbb{P}_{n,p}(Y_k \geqslant 1) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{D}Y_k}{(\mathbb{M}Y_k)^2}.$$

Для доказательства теоремы остается установить две асимптотики: $\mathbb{M}Y_k \to \infty$ и $\mathbb{M}_f^2 Y_k \sim (\mathbb{M}Y_k)^2$ (здесь $\mathbb{M}_f^2 Y_k$ — второй факториальный момент). За счет линейности математического ожидания имеем

$$\mathbb{M}Y_k = C_n^k k \frac{(k-2)!}{2} p^{2k-2} q^{C_k^2-(2k-2)}.$$

Нетрудно видеть, что поскольку p^{-1} не превосходит любую положительную степень n, то, по крайней мере,

$$k = \Theta\left(\log_{\frac{1}{1-p}}(np)\right) < \Theta\left(\frac{\ln n}{-\ln(1-p)}\right) \leqslant \Theta\left(\frac{\ln n}{p}\right) < \Theta\left(n^{\frac{1}{5}}\ln n\right) = o\left(\sqrt[4]{n}\right).$$

Поэтому с большим запасом $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$ и

$$\mathbb{M}Y_k \sim \frac{n^k}{k!} k \frac{(k-2)!}{2} p^{2k-2} q^{C_k^2-(2k-2)} = \frac{n^k}{2(k-1)} p^{2k-2} q^{C_k^2-(2k-2)} > \frac{1}{2k} n^k p^{2k} q^{k^2/2} = \frac{1}{2k}\left(np^2 q^{k/2}\right)^k.$$

Поскольку $k \to \infty$, для обоснования асимптотики $\mathbb{M}Y_k \to \infty$ достаточно найти такое $\delta > 0$, что

$$np^2 q^{k/2} = \exp\left(\ln(np) + \ln p + \frac{k}{2}\ln q\right) \geqslant 1 + \delta.$$

Это равносильно существованию такого $\delta > 0$, что $\ln(np) + \ln p + \frac{k}{2}\ln q \geqslant \delta$. После подстановки явного выражения для k имеем

$$\ln(np) + \ln p + (2-\varepsilon')\frac{\ln(np)}{-2\ln q}\ln q = \left(1 - \frac{2-\varepsilon'}{2}\right)\ln(np) + \ln p = \ln(np)\left(\frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\ln p}{\ln(np)}\right) > \frac{\varepsilon'}{4}\ln(np) \to \infty,$$

т.к. в наших условиях $\frac{\ln p}{\ln(np)} \to 0$, и все в порядке.

Проверим теперь асимптотику $\mathbb{M}_f^2 Y_k \sim (\mathbb{M}Y_k)^2$. Имеет место стандартное соотношение

$$\mathbb{M}_f^2 Y_k = \sum_{C_1, C_2} \mathbb{M}Y_{C_1, C_2},$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным парам различных k-вершинных пирамид $C_1, C_2 \subset K_n$, а Y_{C_1,C_2} — индикатор одновременного попадания пирамид C_1, C_2 в случайный граф G в качестве индуцированных подграфов. Отдельно рассмотрим слагаемые с $V(C_1) \cap V(C_2) = \emptyset$ и слагаемые с $V(C_1) \cap V(C_2) \neq \emptyset$. В первом случае получаем выражение

$$S_1 = C_n^k C_{n-k}^k \left(k\frac{(k-2)!}{2} p^{2k-2} q^{C_k^2-(2k-2)} \right)^2 \sim \left(C_n^k k\frac{(k-2)!}{2} p^{2k-2} q^{C_k^2-(2k-2)} \right)^2 = (\mathbb{M}Y_k)^2.$$

Предпоследний переход сделан за счет $k = o\left(\sqrt[4]{n}\right)$. Если покажем теперь, что

$$S_2 = \sum_{C_1, C_2} Y_{C_1,C_2} - S_1 = o\left((\mathbb{M}Y_k)^2\right),$$

то завершим доказательство теоремы. Для каждой пары пирамид C_1, C_2, которые различны, но пересекаются хотя бы по одной вершине (именно такие пары задают S_2), можно найти число общих вершин (обозначим его через $m = m(C_1, C_2)$) и число общих ребер (обозначим его через $l = l(C_1, C_2)$). Очевидно, что $m \in \{1, \ldots, k\}$, $l \in \{0, \ldots, 2m-2\}$. Таким образом,

$$S_2 \leqslant \sum_{m=1}^{k} \sum_{l=0}^{2m-2} C_n^k C_{n-k}^{k-m} C_k^m \left(k\frac{(k-2)!}{2} \right)^2 p^{4k-4-l} q^{2(C_k^2-(2k-2))-C_m^2+l}.$$

Допустим, мы доказали, что при всех m, l

$$\frac{C_n^k C_{n-k}^{k-m} C_k^m \left(k\frac{(k-2)!}{2} \right)^2 p^{4k-4-l} q^{2(C_k^2-(2k-2))-C_m^2+l}}{C_n^k C_{n-k}^k \left(k\frac{(k-2)!}{2} p^{2k-2} q^{C_k^2-(2k-2)} \right)^2} = o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Тогда

$$S_2 \leqslant 2k^2 C_n^k C_{n-k}^k \left(k\frac{(k-2)!}{2} p^{2k-2} q^{C_k^2-(2k-2)} \right)^2 o\left(\frac{1}{k^2}\right) =$$

$$= o\left(C_n^k C_{n-k}^k \left(k\frac{(k-2)!}{2} p^{2k-2} q^{C_k^2-(2k-2)} \right)^2 \right) = o((\mathbb{M}Y_k)^2),$$

и теорема доказана. Итак, имеем

$$\frac{C_n^k C_{n-k}^{k-m} C_k^m \left(k\frac{(k-2)!}{2} \right)^2 p^{4k-4-l} q^{2(C_k^2-(2k-2))-C_m^2+l}}{C_n^k C_{n-k}^k \left(k\frac{(k-2)!}{2} p^{2k-2} q^{C_k^2-(2k-2)} \right)^2} = \frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m+1)}{(n-2k+1)\cdot\ldots\cdot(n-2k+m)} C_k^m p^{-l} q^{-C_m^2+l} \leqslant$$

$$\leqslant 2k^{2m} n^{-m} p^{-l} q^{-C_m^2+l} \leqslant 2k^{2m} n^{-m} p^{-2m+2} q^{-C_m^2}.$$

Остается показать, что при всех $m \in \{1, \ldots, k\}$ выполнено

$$k^2 k^{2m} n^{-m} p^{-2m+2} q^{-C_m^2} = \exp\left((2m+2)\ln k - m\ln n - (2m-2)\ln p - C_m^2 \ln q\right) \to 0.$$

Если рассмотреть выражение в показателе экспоненты как функцию от m, то ввиду неравенства $\ln q < 0$ это квадратичная функция с положительным коэффициентом при m^2. Значит, ее максимум по m достигается либо при $m = 1$, либо при $m = k$. При $m = 1$ имеем (с учетом $k = o\left(\sqrt[4]{n}\right)$)

$$4\ln k - \ln n = \ln\left(\frac{k^4}{n}\right) = \ln(o(1)) \to -\infty,$$

и все в порядке. При $m = k$ имеем

$$(2k+2)\ln k - k\ln n - (2k-2)\ln p - C_k^2 \ln q = k\left(\ln(k^2) + \frac{2\ln k}{k} - \ln(np) - \frac{k-2}{k}\ln p - \frac{k-1}{2}\ln q\right) \leqslant$$

$$\leqslant k\left(\ln(k^2) + \frac{2\ln k}{k} - \ln(np) - \ln p - (2-\varepsilon')\,\frac{\ln(np)}{-2\ln q}\ln q\right) =$$

$$= k\left(\frac{-\varepsilon'}{2}\ln(np) + \ln(k^2) + \frac{2\ln k}{k} - \ln p\right) = k\ln(np)\left(-\frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\ln(k^2)}{\ln(np)} + \frac{2\ln k}{k\ln(np)} - \frac{\ln p}{\ln(np)}\right) \to -\infty,$$

поскольку $k \to \infty$, $np \to \infty$, $\frac{\ln p}{\ln(np)} \to 0$ и

$$\frac{\ln(k^2)}{\ln(np)} < \frac{2\ln\left(\frac{2\ln(np)}{-\ln(1-p)}\right)}{\ln(np)} < \frac{2\ln\left(\frac{2\ln(np)}{p}\right)}{\ln(np)} = \frac{2(\ln 2 + \ln\ln(np) - \ln p)}{\ln(np)} \to 0.$$

Снова все в порядке, и теорема доказана.

5.3. Доказательство теоремы 6

Как и в доказательстве теоремы 10, зафиксируем $\varepsilon > 0$, но на сей раз положим

$$k = \left[(2 - 2\alpha - \varepsilon)\,\frac{\ln n}{p}\right].$$

В данном случае очевидно, что $k \to \infty$. И целая часть нас по-прежнему не беспокоит.

Обозначим через Y_k случайную величину, равную количеству индуцированных k-вершинных подграфов случайного графа G, являющихся циклами. Если мы докажем, что при больших n выполнено $\mathbb{P}_{n,p}(Y_k > 0) > \frac{1}{2}$, то при тех же n мы получим $u_2(n,p) \geqslant k$. Как всегда, мы докажем еще больше: $\mathbb{P}_{n,p}(Y_k > 0) \to 1$.

Как и в параграфе 5.2, пользуемся неравенством Чебышёва, так что достаточно проверить справедливость соотношений $\mathbb{M}Y_k \to \infty$ и $\mathbb{M}_f^2 Y_k \sim (\mathbb{M}Y_k)^2$. С одной стороны, дальнейшие выкладки будут крайне похожи на выкладки из доказательства теоремы 10. С другой стороны, нынешняя величина Y_k слегка отличается от одноименной величины из параграфа 5.2, а главное, если в параграфе 5.2 вероятность p ребра случайного графа обладала свойством $pn^\alpha \to \infty$ при *любом* α, то здесь, напротив, $p = \Theta\left(n^{-\alpha}\right)$ при тех или иных $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Поэтому мы приведем выкладки во всех подробностях.

Итак, начинаем с математического ожидания. За счет его линейности имеем

$$\mathbb{M}Y_k = C_n^k \frac{(k-1)!}{2} p^k q^{C_k^2 - k}.$$

Нетрудно видеть, что при $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\tau \in (1, C)$ выполнено

$$k = \Theta\left(\frac{\ln n}{p}\right) = \Theta\left(\frac{n^\alpha \ln n}{\tau}\right) = o\left(\sqrt{n}\right).$$

Поэтому (уже без какого-либо запаса) $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$ и

$$\mathbb{M}Y_k \sim \frac{n^k}{k!}\frac{(k-1)!}{2} p^k q^{C_k^2 - k} = \frac{n^k}{2k} p^k q^{C_k^2 - k} > \frac{1}{2k} n^k p^k q^{k^2/2} = \frac{1}{2k}\left(npq^{k/2}\right)^k.$$

Поскольку $k \to \infty$, для обоснования асимптотики $\mathbb{M}Y_k \to \infty$ достаточно найти такое $\delta > 0$, что

$$npq^{k/2} = \exp\left(\ln(np) + \frac{k}{2}\ln q\right) \geqslant 1 + \delta.$$

Это равносильно существованию такого $\delta > 0$, что $\ln(np) + \frac{k}{2}\ln q \geqslant \delta$. После подстановки явного выражения для k с учетом $p < -\ln q$ имеем

$$\ln(np) + \left(1 - \alpha - \frac{\varepsilon'}{2}\right)\frac{\ln q}{p}\ln n \geqslant \ln(np) - \left(1 - \alpha - \frac{\varepsilon'}{2}\right)\ln n.$$

Теперь вспомним, что $p > n^{-\alpha}$, и оценим снизу первое слагаемое:

$$(1-\alpha)\ln n - \left(1 - \alpha - \frac{\varepsilon'}{2}\right)\ln n = \frac{\varepsilon'}{2}\ln n \to \infty,$$

и все в порядке.

Проверим теперь асимптотику $\mathbb{M}_f^2 Y_k \sim (\mathbb{M}Y_k)^2$. Как и прежде,

$$\mathbb{M}_f^2 Y_k = \sum_{C_1, C_2} \mathbb{M}Y_{C_1,C_2},$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным парам различных k-вершинных циклов $C_1, C_2 \subset K_n$, а Y_{C_1,C_2} — индикатор одновременного попадания циклов C_1, C_2 в случайный граф G в качестве индуцированных подграфов. Рассмотрим отдельно слагаемые с $V(C_1) \cap V(C_2) = \emptyset$ и слагаемые с $V(C_1) \cap V(C_2) \neq \emptyset$. В первом случае получаем выражение

$$S_1 = C_n^k C_{n-k}^k \left(\frac{(k-1)!}{2} p^k q^{C_k^2 - k}\right)^2 \sim \left(C_n^k \frac{(k-1)!}{2} p^k q^{C_k^2 - k}\right)^2 = (\mathbb{M}Y_k)^2.$$

Предпоследний переход сделан за счет $k = o\left(\sqrt{n}\right)$. Если покажем теперь, что

$$S_2 = \sum_{C_1, C_2} Y_{C_1,C_2} - S_1 = o((\mathbb{M}Y_k)^2),$$

то завершим доказательство теоремы.

Для каждой пары циклов C_1, C_2, которые различны, но пересекаются хотя бы по одной вершине (именно такие пары задают S_2), можно найти число общих вершин (обозначим его через $m = m(C_1, C_2)$) и число общих ребер (обозначим его через $l = l(C_1, C_2)$). Очевидно, что $m \in \{1, \ldots, k\}$, $l \in \{0, \ldots, m-1\}$. Таким образом,

$$S_2 \leqslant \sum_{m=1}^{k} \sum_{l=0}^{m-1} C_n^k C_{n-k}^{k-m} C_k^m A(k,m,l) p^{2k-l} q^{2(C_k^2 - k) - C_m^2 + l},$$

где $A(k,m,l)$ — число способов образовать пару циклов с выбранными k вершинами для каждого, пересекающихся по выбранным m вершинам и каким-то l ребрам. Если в теореме 10 мы очень грубо оценили величину, аналогичную величине $A(k,m,l)$, то теперь нам придется действовать значительно аккуратнее.

Обозначим количество изолированных цепей, по которым пересекаются два цикла, через r. Стоит отметить, что здесь мы рассматриваем и вырожденные цепи, состоящие из одной вершины. В каждой такой цепи количество вершин, разумеется, на единицу больше числа ребер. А значит, общее число вершин в пересечении в точности на r больше, чем число ребер. Иными словами, $r = m - l$. Заметим, что и дополнительное множество из $k - m$ «свободных» вершин каждого цикла, по которым они не пересекаются, также состоит из r цепей.

Будем конструировать нашу пару циклов следующим образом. Выберем сперва r цепей из m вершин в пересечении (обозначим это число через $g(m,r)$), а потом r цепей среди свободных $k-m$ вершин каждого цикла (соответственно, $g(k-m,r)$). Ясно, что каждая пара циклов задается подобным выбором, а значит, мы имеем оценку сверху:

$$A(k,m,l) \leqslant g(m,m-l)g^2(k-m,m-l).$$

Осталось понять, как выбрать r цепей из m вершин. Для этого сначала расставим всевозможными способами все вершины, а потом между ними на $m-1$ место поставим $r-1$ перегородку. Получаем $g(m,r)=m!C_{m-1}^{r-1}$. Окончательно имеем

$$A(k,m,l) \leqslant m!C_{m-1}^{m-l-1}\left((k-m)!C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2.$$

Покажем теперь, что $\frac{S_2}{S_1}=o(1)$, и завершим тем самым доказательство теоремы. Итак, имеем

$$\sum_{m=1}^{k}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{C_n^kC_{n-k}^{k-m}C_k^mA(k,m,l)p^{2k-l}q^{2(C_k^2-k)-C_m^2+l}}{C_n^kC_{n-k}^k\left(\frac{(k-1)!}{2}\right)^2p^{2k}q^{2(C_k^2-k)}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{k}\sum_{l=0}^{m-1}\left(\frac{k!}{(k-m)!}\right)^2\frac{(n-2k)!}{(n-2k+m)!}\frac{C_{m-1}^{m-l-1}\left((k-m)!C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2}{\left(\frac{(k-1)!}{2}\right)^2}p^{-l}q^{-C_m^2+l} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{k}\sum_{l=0}^{m-1}8k^2n^{-m}C_{m-1}^l\left(C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2n^{\alpha l}e^{\frac{m^2}{2}n^{-\alpha}}.$$

Здесь в последнем неравенстве мы пользуемся тем, что $k=o\left(\sqrt{n}\right)$, делая оценку

$$\frac{(n-2k)!}{(n-2k+m)!}=\frac{1}{(n-2k+1)\cdot\ldots\cdot(n-2k+m)} \leqslant 2n^{-m},$$

справедливую при больших n.

Разобьем внешнюю сумму на две — $\sum'+\sum''$ — и покажем, что обе они стремятся к нулю с ростом n. В первую войдут слагаемые при $m<\frac{k}{\ln k}$, а во вторую — оставшиеся, т.е. при $m \geqslant \frac{k}{\ln k}$. Рассмотрим первую из них. Заметим, что $C_{m-1}^l<2^m$ и $C_{k-m-1}^{m-l-1} \leqslant C_k^{m-l-1}$. Более того,

$$\frac{C_k^{m-l-1}}{C_k^{m-1}}=\frac{(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-l)}{(k-m+2)(k-m+3)\cdot\ldots\cdot(k-m+l+1)} \leqslant \frac{m^l}{(k/2)^l}=\left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

ведь $m=O\left(\frac{k}{\ln k}\right), l=O\left(\frac{k}{\ln k}\right)$. Следовательно, $C_k^{m-l-1} \leqslant C_k^{m-1}\left(\frac{2m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l$, откуда

$$\sum{}' < \sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}}\sum_{l=0}^{m-1}8k^2n^{-m}2^m\left(\frac{k^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l\right)^2n^{\alpha l}e^{\frac{m^2}{2}n^{-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}}\sum_{l=0}^{m-1}8\left(\frac{2}{n}\right)^mk^{2m}\frac{1}{((m-1)!)^2}\left(\frac{4m^2}{k^2}n^{\alpha}\right)^le^{\frac{m^2}{2}n^{-\alpha}}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}}\sum_{l=0}^{m-1}8\left(\frac{2}{n}\right)^mk^{2m}\frac{m^2}{(m!)^2}\left(\frac{4m^2}{k^2}n^{\alpha}\right)^le^{\frac{m^2}{2}n^{-\alpha}} \leqslant \sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}}\sum_{l=0}^{m-1}8\left(\frac{2}{n}\right)^mk^{2m}\frac{m^2}{(m/e)^{2m}}\left(\frac{4m^2}{k^2}n^{\alpha}\right)^le^{\frac{m^2}{2}n^{-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}}\sum_{l=0}^{m-1}8\left(\frac{2}{n}\right)^mk^{2m}\frac{m^2}{(m/e)^{2l}}\left(\frac{4m^2}{k^2}n^{\alpha}\right)^le^{\frac{m^2}{2}n^{-\alpha}}=\sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}}\sum_{l=0}^{m-1}8\left(\frac{2}{n}\right)^mk^{2m}m^2\left(\frac{4e^2}{k^2}n^{\alpha}\right)^le^{\frac{m^2}{2}n^{-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}}\sum_{l=0}^{m-1}8m^2\left(\frac{2k^2}{n}e^{\frac{m}{n^{\alpha}}}\right)^m\left(\frac{4e^2}{k^2}n^{\alpha}\right)^l.$$

Все выражение, кроме последней скобки, от l не зависит. Значит, можно вынести его за внутреннюю сумму и рассмотреть ее отдельно:

$$\sum_{l=0}^{m-1}\left(\frac{4e^2}{k^2}n^\alpha\right)^l \leqslant \sum_{l=0}^{m-1}\left(\frac{n^\alpha p^2}{c\ln^2 n}\right)^l = \sum_{l=0}^{m-1}\left(\frac{\tau^2}{cn^\alpha \ln^2 n}\right)^l \leqslant \sum_{l=0}^{m-1}\left(\frac{C^2}{cn^\alpha}\right)^l < 2.$$

Возвращаясь к сумме по m, с учетом неравенств $k \leqslant 2n^\alpha \ln n$ и $\alpha < \frac{1}{2}$ имеем

$$\sum{}' < \sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}} 16m^2\left(\frac{2k^2}{n}e^{\frac{m}{n^\alpha}}\right)^m \leqslant \sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}}\left((16m^2)^{1/m}\frac{8n^{2\alpha}\ln^2 n}{n}e^{\frac{k}{(\ln k)n^\alpha}}\right)^m.$$

Легко видеть, что $(16m^2)^{1/m} = O(1)$, $e^{\frac{k}{(\ln k)n^\alpha}} = O(1)$, а $\frac{8n^{2\alpha}\ln^2 n}{n} = o(1)$. Таким образом, мы имеем здесь сумму, ограниченную сверху геометрической прогрессией со знаменателем и первым членом, стремящимися к нулю, а это значит, наконец, что и вся сумма стремится к нулю.

Теперь рассмотрим случай $m \geqslant \frac{k}{\ln k}$. Здесь воспользуемся оценкой $C_{k-m-1}^{m-l-1} \leqslant C_k^m \leqslant \left(\frac{ek}{m}\right)^m \leqslant (e\ln k)^m$. Тогда

$$\sum{}'' = \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k}\sum_{l=0}^{m-1} 8k^2 n^{-m} C_{m-1}^l \left(C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2 n^{\alpha l} e^{\frac{m^2}{2}n^{-\alpha}} \leqslant \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k}\sum_{l=0}^{m-1} 8k^2 n^{-m} 2^m (e^2\ln^2 k)^m n^{\alpha m} e^{\frac{m^2}{2}n^{-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k} 8mk^2\left(2e^2\frac{(\ln^2 k)n^\alpha e^{\frac{m}{2n^\alpha}}}{n}\right)^m \leqslant \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k} 8\left(k^{\frac{3}{m}}2e^2\frac{(\ln^2 k)n^\alpha e^{\frac{k}{2n^\alpha}}}{n}\right)^m.$$

Как и в случае с $\sum'$, достаточно показать, что выражение в скобках стремится к нулю с ростом n. Первая его часть ограничена, поскольку $k^{\frac{3}{m}} \leqslant k^{\frac{3\ln k}{k}} \to 1$. Рассмотрим вторую часть и подставим в экспоненту выражение для k:

$$(\ln^2 k)n^{\alpha-1}\exp\left(\frac{k}{2n^\alpha}\right) \leqslant (\ln^2 n)n^{\alpha-1}\exp\left(\frac{(2-2\alpha-\varepsilon)n^\alpha\ln n}{2n^\alpha}\right) = (\ln^2 n)n^{\alpha-1}n^{1-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}} = (\ln^2 n)n^{-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Последнее выражение стремится к нулю при любом положительном ε, что и доказывает теорему.

5.4. Доказательство теоремы 11

Как всегда, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем

$$k = \left[(2-4\alpha-\varepsilon)\frac{\ln n}{p}\right].$$

Величина k слегка отличается от своего аналога в теореме 6, и мы совсем скоро поймем, за счет чего это отличие. Но сразу видно, что отличие лишь в константе, а поскольку ограничения в теореме 11 сильнее, чем в теореме 6, снова с запасом выполнено $k \to \infty$ и $k = o(\sqrt{n})$ (на самом деле $k = o(\sqrt[4]{n})$).

Действуем стандартно, доказывая, что $\mathbb{M}Y_k \to \infty$ и $\mathbb{M}_f^2 Y_k \sim (\mathbb{M}Y_k)^2$. Разумеется, здесь Y_k — число пирамид, как в теореме 10, а не число циклов, как в теореме 6. Тем не менее выкладки будут скорее подобны расчетам из параграфа 5.3.

В параграфе 5.2 мы убедились в том, что свойство $\mathbb{M}Y_k \to \infty$ заведомо выполнено, коль скоро $\ln(np)+\ln p+\frac{k}{2}\ln q \to \infty$. Практически такое же условие мы проверяли и в параграфе

5.3, причем там были как раз нынешние ограничения на параметры. Однако там не было слагаемого $\ln p$, и именно с этим связано различие между нынешним видом функции k (с вычитаемым 4α) и видом аналогичной функции в 5.3 (с вычитаемым 2α):

$$\ln(np) + \ln p + \frac{k}{2}\ln q = \ln(np^2) + \frac{k}{2}\ln q > (1-2\alpha)\ln n - \left(1 - 2\alpha - \frac{\varepsilon'}{2}\right)\ln n = \frac{\varepsilon'}{2}\ln n \to \infty.$$

Займемся вторыми моментами. Здесь тоже имеет место «симбиоз» подходов и оценок из параграфов 5.2 и 5.3. По-прежнему все сводится к доказательству того, что $\frac{S_2}{S_1} = o(1)$. И если S_1 — в точности то же, что и в 5.2, то S_2 оценивается настолько же аккуратнее, чем в 5.2, насколько аккуратнее это было сделано для одноименной величины в 5.3:

$$S_2 \leqslant \sum_{m=1}^{k}\sum_{l=0}^{2m-2} C_n^k C_{n-k}^{k-m} C_k^m B(k,m,l) p^{4k-4-l} q^{2(C_k^2-(2k-2))-C_m^2+l},$$

где $B(k,m,l)$ — число способов образовать пару пирамид с выбранными k вершинами для каждой, пересекающихся по выбранным m вершинам и каким-то l ребрам.

Оценим величину $B(k,m,l)$. Прежде всего назовем *главной вершиной* пирамиды ту ее вершину, которая не принадлежит циклу. Пусть даны две пирамиды, у каждой из которых k вершин, а также m общих вершин и l общих ребер. Обозначим множество общих вершин U, множество вершин первой пирамиды, не принадлежащих U, — U_1, множество вершин второй пирамиды, не принадлежащих U, — U_2. Пусть D_1, D_2 — главные вершины наших пирамид. Возможны пять случаев: 1) $D_1 = D_2 \in U$; 2) $D_1, D_2 \in U$, но $D_1 \neq D_2$; 3) $D_1 \in U$, $D_2 \in U_2$; 4) $D_2 \in U$, $D_1 \in U_1$; 5) $D_1 \in U_1$, $D_2 \in U_2$. В первом случае нашим пирамидам отвечают два цикла длины $k-1$, имеющие $m-1$ общих вершин и $l-m+1$ общих ребер. Ясно, что таких пар пирамид не больше, чем $mA(k-1, m-1, l-m+1)$. Во втором случае основание первой пирамиды проходит через главную вершину второй пирамиды, а основание второй пирамиды проходит через главную вершину первой пирамиды. Естественно, у этих циклов только $m-2$ общие вершины, а число их общих ребер лежит в пределах от l до $l-5$. Поэтому в случае 2) пар пирамид не больше, чем

$$m^2(A(k-1,m-2,l) + A(k-1,m-2,l-1) + A(k-1,m-2,l-2) + A(k-1,m-2,l-3) +$$
$$+ A(k-1,m-2,l-4) + A(k-1,m-2,l-5)).$$

Рассуждая аналогично, оцениваем число пар циклов в случаях 3) и 4), как

$$2(k-m)m(A(k-1,m-1,l) + A(k-1,m-1,l-1) + A(k-1,m-1,l-2)),$$

а в случае 5) — как

$$(k-m)^2 A(k-1,m,l) < k^2 A(k,m,l) \leqslant k^2 m! 2^m \left((k-m)! C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2.$$

Всякий раз мы считаем $A = 0$, коль скоро один из параметров отрицательный. К каждой величине A применим оценку из параграфа 5.3:

$$A(k-1,m-2,l) \leqslant g(m-2,m-l-2)g^2(k-m+1,m-l-2) = (m-2)! C_{m-3}^{m-l-3}\left((k-m+1)! C_{k-m}^{m-l-3}\right)^2 <$$
$$< m! 2^m k^2 \left((k-m)! C_{k-m}^{m-l-3}\right)^2;$$
$$A(k-1,m-2,l-1) \leqslant g(m-2,m-l-1)g^2(k-m+1,m-l-1) = (m-2)! C_{m-3}^{m-l-2}\left((k-m+1)! C_{k-m}^{m-l-2}\right)^2 <$$
$$< m! 2^m k^2 \left((k-m)! C_{k-m}^{m-l-2}\right)^2;$$
$$A(k-1,m-2,l-2) \leqslant g(m-2,m-l)g^2(k-m+1,m-l) = (m-2)! C_{m-3}^{m-l-1}\left((k-m+1)! C_{k-m}^{m-l-1}\right)^2 <$$

$$< m!2^m k^2 \left((k-m)!C_{k-m}^{m-l-1}\right)^2;$$

$$A(k-1,m-2,l-3) \leqslant g(m-2,m-l+1)g^2(k-m+1,m-l+1) = (m-2)!C_{m-3}^{m-l}\left((k-m+1)!C_{k-m}^{m-l}\right)^2 <$$

$$< m!2^m k^2 \left((k-m)!C_{k-m}^{m-l}\right)^2;$$

$$A(k-1,m-2,l-4) \leqslant g(m-2,m-l+2)g^2(k-m+1,m-l+2) = (m-2)!C_{m-3}^{m-l+1}\left((k-m+1)!C_{k-m}^{m-l+1}\right)^2 <$$

$$< m!2^m k^2 \left((k-m)!C_{k-m}^{m-l+1}\right)^2;$$

$$A(k-1,m-2,l-5) \leqslant g(m-2,m-l+3)g^2(k-m+1,m-l+3) = (m-2)!C_{m-3}^{m-l+2}\left((k-m+1)!C_{k-m}^{m-l+2}\right)^2 <$$

$$< m!2^m k^2 \left((k-m)!C_{k-m}^{m-l+2}\right)^2;$$

$$A(k-1,m-1,l) \leqslant g(m-1,m-l-1)g^2(k-m,m-l-1) = (m-1)!C_{m-2}^{m-l-2}\left((k-m)!C_{k-m-1}^{m-l-2}\right)^2 <$$

$$< m!2^m \left((k-m)!C_{k-m-1}^{m-l-2}\right)^2;$$

$$A(k-1,m-1,l-1) \leqslant g(m-1,m-l)g^2(k-m,m-l) = (m-1)!C_{m-2}^{m-l-1}\left((k-m)!C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2 <$$

$$< m!2^m \left((k-m)!C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2;$$

$$A(k-1,m-1,l-2) \leqslant g(m-1,m-l+1)g^2(k-m,m-l+1) = (m-1)!C_{m-2}^{m-l}\left((k-m)!C_{k-m-1}^{m-l}\right)^2 <$$

$$< m!2^m \left((k-m)!C_{k-m-1}^{m-l}\right)^2;$$

$$A(k-1,m-1,l-m+1) \leqslant g(m-1,2m-l-2)g^2(k-m,2m-l-2) = (m-1)!C_{m-2}^{2m-l-3}\left((k-m)!C_{k-m-1}^{2m-l-3}\right)^2 <$$

$$< m!2^m \left((k-m)!C_{k-m-1}^{2m-l-3}\right)^2.$$

В итоге

$$B(k,m,l) \leqslant m!2^m((k-m)!)^2\left(m\left(C_{k-m-1}^{2m-l-3}\right)^2 + m^2k^2\left(\left(C_{k-m}^{m-l-3}\right)^2 + \right.\right.$$

$$+ \left(C_{k-m}^{m-l-2}\right)^2 + \left(C_{k-m}^{m-l-1}\right)^2 + \left(C_{k-m}^{m-l}\right)^2 + \left(C_{k-m}^{m-l+1}\right)^2 + \left.\left(C_{k-m}^{m-l+2}\right)^2\right) +$$

$$\left. + 2km\left(\left(C_{k-m-1}^{m-l-2}\right)^2 + \left(C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2 + \left(C_{k-m-1}^{m-l}\right)^2\right) + k^2\left(C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2\right).$$

Более того, совсем тривиальна оценка

$$B(k,1,l) \leqslant k^2\left(\frac{(k-1)!}{2}\right)^2.$$

Вернемся к дроби $\frac{S_2}{S_1}$:

$$\frac{S_2}{S_1} = \sum_{m=1}^{k}\sum_{l=0}^{2m-2}\frac{C_n^kC_{n-k}^{k-m}C_k^mB(k,m,l)p^{4k-4-l}q^{2(C_k^2-(2k-2))-C_m^2+l}}{C_n^kC_{n-k}^k\left(k\frac{(k-2)!}{2}p^{2k-2}q^{C_k^2-(2k-2)}\right)^2} <$$

$$< \sum_{m=1}^{k}\sum_{l=0}^{2m-2}4\left(\frac{k!}{(k-m)!}\right)^2\frac{(n-2k)!}{(n-2k+m)!}\frac{B(k,m,l)}{m!((k-1)!)^2}p^{-l}q^{-C_m^2+l} <$$

$$< \sum_{m=1}^{k}\sum_{l=0}^{2m-2}8k^2n^{-m}\frac{B(k,m,l)}{m!((k-m)!)^2}p^{-l}q^{-C_m^2+l}.$$

Для дальнейшей оценки, как и в § 5.3, разобьем суммирование на Σ' и Σ'', проводя границу на прежнем $m = \frac{k}{\ln k}$.

Рассмотрим Σ'. Хорошо видно, что оценка величины $B(k,m,l)$ отлично сокращается с величиной $m!((k-m)!)^2$, стоящей в знаменателе. В то же время при текущих ограничениях на m и l справедливы неравенства

$$C_{k-m-1}^{2m-l-3} \leqslant C_{k-m+1}^{2m-l-1} \leqslant C_k^{2m-l-1} \leqslant C_k^{2m-1}\left(\frac{4m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{2m-1}}{(2m-1)!}\left(\frac{4m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m}^{m-l-3} \leqslant C_{k-m+1}^{m-l-2} \leqslant C_k^{m-l-2} \leqslant C_k^{m-1}\left(\frac{2m}{k}\right)^{l+1} \leqslant \frac{k^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m}^{m-l-2} \leqslant C_{k-m+1}^{m-l-1} \leqslant C_k^{m-l-1} \leqslant C_k^{m-1}\left(\frac{2m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m}^{m-l-1} \leqslant C_k^{m-l-1} \leqslant C_k^{m-1}\left(\frac{2m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m}^{m-l} \leqslant C_k^{m-l} \leqslant C_k^{m}\left(\frac{2m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{m}}{m!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m}^{m-l+1} \leqslant C_k^{m-l+1} \leqslant C_k^{m}\left(\frac{2m}{k}\right)^{l-1} \leqslant \frac{k^{m}}{m!}\left(\frac{2m}{k}\right)^{l-1} \leqslant \frac{k^{m+1}}{m!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m}^{m-l+2} \leqslant C_k^{m-l+2} \leqslant C_k^{m+2}\left(\frac{2m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{m+2}}{(m+2)!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m-1}^{m-l-2} \leqslant C_{k-m+1}^{m-l} \leqslant C_k^{m-l} \leqslant C_k^{m}\left(\frac{2m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{m}}{m!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m-1}^{m-l-1} \leqslant C_k^{m-l-1} \leqslant C_k^{m-1}\left(\frac{2m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m-1}^{m-l} \leqslant C_k^{m-l} \leqslant C_k^{m}\left(\frac{2m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{m}}{m!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l.$$

При $m \geqslant 4$ имеем $4m-2 \geqslant 2m+6$. При $m=3$ слагаемого $A(k-1,m-2,l-5)$ в оценке величины $B(k,l,m)$ нет, так что хватает неравенства $4m-2 \geqslant 2m+4$. При $m=2$ нет слагаемых $A(k-1,m-2,l-5), A(k-1,m-2,l-4)$, так что хватает неравенства $4m-2 \geqslant 2m+2$. Так или иначе

$$\frac{B(k,m,l)}{m!2^m((k-m)!)^2} \leqslant \left(\frac{16m^2}{k^2}\right)^l \frac{1}{((m-1)!)^2}\left(mk^{4m-2}+6m^2k^{4m-2}+6mk^{4m-2}+k^{4m-2}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{16m^2}{k^2}\right)^l \frac{1}{((m-1)!)^2}\cdot 24m^2k^{4m-2}.$$

Значит,

$$\Sigma' \leqslant 8k^2n^{-1}\frac{B(k,1,0)}{((k-1)!)^2} + \sum_{m=2}^{\frac{k}{\ln k}}\sum_{l=0}^{2m-2} 8k^2n^{-m}2^m\cdot 24m^2k^{4m-2}\left(\frac{16m^2}{k^2}\right)^l\frac{1}{((m-1)!)^2}p^{-l}e^{\frac{m^2}{2n^\alpha}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2k^4}{n} + \sum_{m=2}^{\frac{k}{\ln k}}\sum_{l=0}^{2m-2}\left((192m^2)^{\frac{1}{m}}e^{\frac{m}{2n^\alpha}}\frac{2k^4}{n}\right)^m\frac{m^4}{\left(\frac{m}{e}\right)^{2m}}\left(\frac{16m^2}{k^2}n^\alpha\right)^l \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2k^4}{n} + \sum_{m=2}^{\frac{k}{\ln k}}\sum_{l=0}^{2m-2}\left((192m^2)^{\frac{1}{m}}e^{\frac{m}{2n^\alpha}}\frac{2k^4}{n}\right)^m\frac{m^4}{\left(\frac{m}{e}\right)^{l}}\left(\frac{16m^2}{k^2}n^\alpha\right)^l =$$
$$= \frac{2k^4}{n} + \sum_{m=2}^{\frac{k}{\ln k}}\sum_{l=0}^{2m-2}\left((192m^6)^{\frac{1}{m}}e^{\frac{m}{2n^\alpha}}\frac{2k^4}{n}\right)^m\left(\frac{16em}{k^2}n^\alpha\right)^l \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2k^4}{n} + \sum_{m=2}^{\frac{k}{\ln k}} \sum_{l=0}^{2m-2} \left((192m^6)^{\frac{1}{m}} e^{\frac{m}{2n^\alpha}} \frac{2k^4}{n} \right)^m \left(\frac{16e}{k \ln k} n^\alpha \right)^l .$$

Ясно, что $\sum\limits_{l=0}^{2m-2} \left(\frac{16e}{k\ln k} n^\alpha\right)^l < 2$, откуда с учетом $k = o\left(\sqrt[4]{n}\right)$ получаем

$$\Sigma' < o(1) + 2 \sum_{m=2}^{\frac{k}{\ln k}} \left((192m^6)^{\frac{1}{m}} e^{\frac{m}{2n^\alpha}} \frac{2k^4}{n} \right)^m = o(1).$$

Перейдем к Σ''. При $m \geqslant \frac{k}{\ln k}$ в оценках биномиальных коэффициентов, из которых складывается величина $B(k,m,l)$, вынужденно опустим сомножители типа $\left(\frac{2m}{k}\right)^l$, а сохранившееся k заменим на $2k$. Например,

$$C_{k-m-1}^{2m-l-3} \leqslant C_{k-m-1+l+2}^{2m-l-3+l+2} = C_{k+l-m+1}^{2m-1} \leqslant C_{k+2m-2-m+1}^{2m-1} = C_{k+m-1}^{2m-1} \leqslant C_{2k}^{2m-1} \leqslant \frac{(2k)^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

Далее,

$$C_{k-m-1}^{2m-l-3} \leqslant \frac{(2k)^{2m-1}}{(2m-1)!} \leqslant (2m)(2k)^{-1} \left(\frac{2ek}{2m}\right)^{2m} \leqslant \frac{m}{k} (e \ln k)^{2m}.$$

Аналогично и каждый из оставшихся коэффициентов не превосходит $4k^2 \left(e^2 \ln^2 k\right)^m$. Получаем

$$\Sigma'' \leqslant \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k} \sum_{l=0}^{2m-2} 8k^2 n^{-m} 2^m \cdot 24m^2 \cdot 32k^5 \left(e^4 \ln^4 k\right)^m p^{-l} e^{\frac{m^2}{2n^\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k} 8k^2 n^{-m} 2^m \cdot 48m^3 \cdot 32k^5 \left(e^4 \ln^4 k\right)^m n^{2\alpha m} e^{\frac{m^2}{2n^\alpha}} < \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k} \left(2e^4 \left(2 \cdot 10^4 k^{10}\right)^{\frac{1}{m}} n^{2\alpha-1} (\ln^4 k) e^{\frac{m}{2n^\alpha}} \right)^m =$$

$$= \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k} \left(2e^4 \left(2 \cdot 10^4 k^{10}\right)^{\frac{1}{m}} n^{2\alpha-1} (\ln^4 k) \exp\left(\left(1 - 2\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) \ln n \right) \right)^m =$$

$$= \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k} \left(2e^4 \left(2 \cdot 10^4 k^{10}\right)^{\frac{1}{m}} n^{2\alpha-1} (\ln^4 k) n^{1-2\alpha-\frac{\varepsilon}{2}} \right)^m = o(1).$$

Теорема доказана.

6. Несколько заключительных комментариев

Пусть $p = n^{-\alpha}$. Мы знаем, что при $\alpha > 1$ выполнено $u_2(n,p) = 0$, а при $\alpha < \frac{1}{2}$ выполнено $u_2(n,p) = \Theta\left(\frac{\ln n}{p}\right)$. Аналогично при $\alpha > 1$ выполнено $u_3(n,p) = 0$, а при $\alpha < \frac{1}{4}$ выполнено $u_3(n,p) = \Theta\left(\frac{\ln n}{p}\right)$. Иными словами, даже при таком грубом взгляде на функцию вероятности ребра остается некоторый зазор между случаем, когда величина $u_d(n,p)$ равна нулю, и случаем, когда она отлична от нуля.

На самом деле, зазор, конечно, можно значительно сократить. Например, без труда доказываются следующие две теоремы.

Теорема 12. *Пусть $p = n^{-\alpha}$, где $\alpha < 1$. Тогда при всех достаточно больших n выполнено $u_2(n,p) \geqslant 3$.*

Теорема 13. *Пусть $p = n^{-\alpha}$, где $\alpha < \frac{2}{3}$. Тогда при всех достаточно больших n выполнено $u_3(n,p) \geqslant 4$.*

Теорема 12 следует из того простого факта, что в ее условиях случайный граф с вероятностью, стремящейся к 1, содержит треугольник, а в теореме 13 роль треугольника выполняет клика на четырех вершинах.

Разумеется, теоремы 12 и 13 можно уточнять. Однако именно это и сделано нами в настоящей работе. Просто нашей целью было найти те области изменения параметров, в которых верхние и нижние оценки по порядку или даже асимптотически совпадают. В бо́льших областях мы эту цель пока не реализовали.

Еще один любопытный факт сформулирован ниже.

Теорема 14. *Пусть $p = n^{-\alpha}$, где $\alpha > \frac{2}{3}$. Тогда либо $u_3(n,p) = 0$, либо для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n выполнено $u_3(n,p) \geqslant n^{3\alpha-2-\varepsilon}$.*

Теорема 14 дает «условный» результат в том смысле, что при $\alpha > \frac{2}{3}$ уже совсем не очевидно, что $u_3(n,p) \neq 0$. Понятно, что и нижняя оценка в ней не может быть основана на какой-то явной конструкции графа диаметров с хроматическим числом 4.

Доказательство теоремы 14. Идея доказательства состоит в том, что у случайного графа при нынешних значениях p с большой вероятностью все подграфы на не более $n^{3\alpha-2-\varepsilon}$ вершинах имеют хроматические числа не выше трех. Эта же идея использовалась в классических работах Боллобаша (см. [16]– [19], [28], [29]).

Положим

$$t = n^{3\alpha-2-\varepsilon}$$

и докажем, что

$$\mathbb{P}_{n,p}\left(\forall\, S,\ |S| \leqslant t,\ \chi\left(G|_S\right) \leqslant 3\right) \to 1,$$

или, что то же самое,

$$\mathbb{P}_{n,p}\left(\exists\, S,\ |S| \leqslant t,\ \chi\left(G|_S\right) > 3\right) \to 0.$$

Действительно,

$$\mathbb{P}_{n,p}\left(\exists\, S,\ |S| \leqslant t,\ \chi\left(G|_S\right) > 3\right) = \mathbb{P}_{n,p}\left(\exists\, S,\ |S| \leqslant t,\ \chi\left(G|_S\right) > 3 \ \ \forall\, x \in S \ \ \chi\left(G|_{S\setminus\{x\}}\right) \leqslant 3\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbb{P}_{n,p}\left(\exists\, s \in [4,t] \quad \exists\, S,\ |S| = s,\ |E\left(G|_S\right)| \geqslant \frac{3s}{2}\right) \leqslant \sum_{s=4}^{t} C_n^s C_{C_s^2}^{3s/2} p^{3s/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=4}^{t} \left(\frac{ne}{s}\left(\frac{se}{3}\right)^{\frac{3}{2}} n^{-\frac{3\alpha}{2}}\right)^s = \sum_{s=4}^{t}\left(cn\sqrt{s}n^{-\frac{3\alpha}{2}}\right)^s \leqslant \sum_{s=4}^{t}\left(cn\sqrt{t}n^{-\frac{3\alpha}{2}}\right)^s = \sum_{s=4}^{t}\left(cn^{-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^s = o(1).$$

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ N 12-01-00683, гранта Президента РФ МД-6277.2013.1 и гранта НШ-2519.2012.1 поддержки ведущих научных школ.

Литература

1. *Borsuk K.* Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre // Fundamenta Math. — 1933. — V. 20. — P. 177–190.
2. *Kahn J., Kalai G.* A counterexample to Borsuk's conjecture // Bulletin (new series) of the AMS. — 1993. — V. 29, N 1. — P. 60–62.
3. *Райгородский А.М.* О размерности в проблеме Борсука // Успехи матем. наук. — 1997. — Т. 52, № 6. — С. 181–182.
4. *Райгородский А.М.* Об одной оценке в проблеме Борсука // Успехи матем. наук. — 1999. — Т. 54, № 2. — С. 185–186.
5. *Райгородский А.М.* Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств // Успехи матем. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 107–146.

6. *Райгородский А.М.* Проблема Борсука. — М. : МЦНМО, 2006.

7. *Raigorodskii A.M.* Three lectures on the Borsuk partition problem // London Mathematical Society Lecture Note Series. — 2007. — V. 347. — P. 202–248.

8. *Райгородский А.М.* Вокруг гипотезы Борсука // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика». — 2007. — Т. 23. — С. 147–164.

9. *Райгородский А.М.* Контрпримеры к гипотезе Борсука на сферах малого радиуса // Доклады РАН. — 2010. — Т. 434, № 2. — С. 61–163.

10. *Raigorodskii A.M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory / J. Pach ed. — Springer, 2013. — P. 429–460.

11. *Raigorodskii A.M.* The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary // Mathematical Intelligencer. — 2004. — V. 26. — N 3. — P. 4–12.

12. *Болтянский В.Г., Гохберг И.Ц.* Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. — М. : Наука, 1965.

13. *Boltyanski V.G., Martini H., Soltan P.S.* Excursions into combinatorial geometry. — Berlin : Universitext, Springer, 1997.

14. *Райгородский А.М.* Гипотеза Кнезера и топологические методы в комбинаторике. — М. : МЦНМО, 2011.

15. *Matoušek J.* Using the Borsuk–Ulam theorem. — Berlin : Universitext, Springer, 2003.

16. *Райгородский А.М.* Модели случайных графов. — М. : МЦНМО, 2011.

17. *Bollobás B.* Random Graphs. — Cambridge Univ. Press. — Second Edition, 2001.

18. *Колчин В.Ф.* Случайные графы. — М. : Физматлит, 2002.

19. *Janson S., Łuczak T., Ruciński A.* Random graphs. — NY : Wiley, 2000.

20. *Erdős P., Rényi A.* On random graphs I // Publ. Math. Debrecen. — 1959. V. 6. — P. 290–297.

21. *Erdős P., Rényi A.* On the evolution of random graphs // Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. — 1960. — V. 5. — P. 17–61.

22. *Erdős P., Rényi A.* On the evolution of random graphs // Bull. Inst. Int. Statist. Tokyo. — 1961. — V. 38. — P. 343–347.

23. *Кокоткин А.А., Райгородский А.М.* О реализации случайных графов графами диаметров // Труды МФТИ. — 2012. — Т. 4, № 1. — С. 19–28.

24. *Райгородский А.М.* Проблема Нелсона–Эрдеша–Хадвигера и реализация случайных графов в пространстве // Успехи матем. наук. — 2006. — V. 61, № 4. — С. 195–196.

25. *Нагаева С.В., Райгородский А.М.* О вложимости конечных графов расстояний с большим хроматическим числом в случайные графы // Итоги науки и техники. Сер. «Современная математика». — 2009. — Т. 62. — С. 47–66.

26. *Нагаева С.В., Райгородский А.М.* О реализации случайных графов графами расстояний в пространствах фиксированной размерности // Доклады РАН. — 2009. — Т. 424, № 3. — С. 315–317.

27. *Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometry. — Berlin : Springer, 2005.

28. *Bollobás B.* The chromatic number of random graphs // Combinatorica. — 1988. — V. 8, N 1. — P. 49–55.

29. *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. — М. : Бином. Лаборатория знаний, 2007.

Поступила в редакцию 08.04.2013.